ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018
Licence de mathématiques, Ingénierie mathématique
UE TGM601U
Examen d'Analyse Fonctionnelle : Epreuve de A. Bachelot.
Date : Mercredi 2 mai 2018 **Heure :** 14h30-17h30.
Durée : 3h.

Collège Sciences et technologie

Lieu : bâtiment A22, Amphithéâtre Wegener.
- *Un aide-mémoire d'une page est autorisé* -
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Soient (E,d) un espace métrique et K une partie compacte de E.

(1) Montrer que pour tout $a \in E$ il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(a,R)$.
(2) Montrer que K est complet.
(3) Soit K_n une suite de compacts non vides de E vérifiant $K_{n+1} \subset K_n$. Montrer que $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Exercice 2.

Soit (E,d) un espace métrique et $\alpha \in]0,1[$. On note $C^\alpha(E)$ l'ensemble des applications f de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x\in E} \mid f(x) \mid + \sup_{x,y\in E,\, x\neq y} \frac{\mid f(x) - f(y) \mid}{[d(x,y)]^\alpha} < \infty.$$

(1) Montrer que $C^\alpha(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions à valeur réelle, uniformément continues et bornées sur E.
(2) Montrer que $\|.\|_\alpha$ est une norme sur $C^\alpha(E)$.
(3) Montrer que $(C^\alpha(E), \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On note $M = \sup_{y\in\mathbb{R}} \mid f(y) \mid$. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit par récurrence $n+1$ réels $(y_n(k))_{0\leq k\leq n}$ en posant

$$y_n(0) = 0, \quad y_n(k+1) = y_n(k) + \frac{1}{n} f(y_n(k)), \quad k = 0, ..., n-1.$$

(1) Montrer par récurrence sur k que pour tout $k = 0, ..., n$ on a $\mid y_n(k) \mid \leq \frac{k}{n} M$.

On définit sur $[0,1]$ une fonction u_n et une fonction v_n en posant $u_n(1) = v_n(1) = y_n(n)$ et pour $k = 0, ..., n-1$

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \Rightarrow u_n(x) = y_n(k) + \left(x - \frac{k}{n}\right) f(y_n(k)), \quad v_n(x) = y_n(k).$$

(2) Montrer que u_n est continue et C^1 par morceaux, et pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$u_n(x) = \int_{[0,x]} f(v_n(t))dt.$$

(3) Montrer que la suite $(u_n)_{1\leq n}$ est uniformément bornée et équicontinue sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe une suite croissante d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in C^0([0,1])$ telle que u_{n_p} converge uniformément sur $[0,1]$ vers u quand $p \to \infty$.

(4) Montrer que v_{n_p} converge uniformément sur $[0,1]$ vers u quand $p \to \infty$.

(5) Montrer que $u \in C^1([0,1])$ et vérifie

$$u' = f(u), \quad u(0) = 0.$$

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et E' son dual.

(1) Soit $x \in E, x \neq 0$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = ||x||$ et $||f|| = 1$.

(2) En déduire que pour tout $x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2$ il existe $f \in E'$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(3) Soit $M \subset E$ un sous-espace fermé et $x \in E \setminus M$.

(a) On pose

$$\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Montrer que $\delta > 0$.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par M et x. Pour tout $y \in M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $f(y + \lambda x) = \lambda \delta$. Montrer que l'on définit ainsi sans ambiguité une forme linéaire continue sur F. Calculer sa norme.

(c) En déduire qu'il existe $f \in E'$ tel que $f(x) = \delta$, $f\big|_M = 0$ et $\|f\| = 1$.

Exercice 5.

Soient H l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes $P(x)$ de degrés inférieur ou égal à 2 et F le sous espace des polynômes de degrés inférieur ou égal à 1. On pose

$$\|P\| = \left(\int_0^1 \mid P(x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur H, que cet espace muni de cette norme est un espace de Hilbert et que F est fermé.

(2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\{1, x, x^2\}$, construire une base hilbertienne de H.

(3) Etant donné un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, déterminer sa projection orthogonale sur F.

(4) Montrer que

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 \mid x^2 - ax - b \mid^2 dx$$

est atteint et calculer sa valeur.

♢♣♢♣♢♣♢
♣♢♣♢♣
♢♣♢
♣