ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016
CPBX PC Ecole Semestre 4 - UE N1CP402D
Examen d'Analyse : Epreuve de A. Bachelot.
Date : Jeudi 26 mai 2016 **Heure :** 16h30-18h.
Durée : 1h30

Lieu : bâtiment A22, amphithéâtre Poincaré.
- Sans document -

Collège Sciences et technologie

Exercice 1.

1. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre de Lebesgue.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt.$$

Montrer que $F(x)$ existe et que $F \in C^1(\mathbb{R})$.

$\square$ On note $f(t,x) := \cos(xt)e^{-t^2}$. Comme $\mid f(t,x) \mid\leq e^{-t^2}$ qui est intégrable sue $\mathbb{R}$, F est bien définie. De plus $x \mapsto f(t,x)$ est $C^1(\mathbb{R})$ et pour tout x, $\mid \partial_x f(t,x) \mid\leq te^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Lebesgue assure que $F \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$F'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)te^{-t^2}dt$$

$\blacksquare$

3. En utilisant une intégration par partie, exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de $F(x)$.

$\square$ Pour $a > 0$, on écrit

$$-\int_{-a}^{a} \sin(xt)te^{-t^2}dt = \left[(-\sin(xt))\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\right]_{-a}^{a} - \frac{x}{2}\int_{-a}^{a}\cos(xt)e^{-t^2}dt.$$

En faisant tendre a vers l'infini, on en déduite que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$. $\blacksquare$

4. En déduire la valeur de $F(x)$ (on rappelle que $F(0) = \sqrt{\pi}$).

$\square$ On remarque que $\left(e^{\frac{x^2}{4}}F(x)\right)' = 0$ donc $F(x) = F(0)e^{-\frac{x^2}{4}}$ et comme $F(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut que $F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

$\blacksquare$

Exercice 2.

A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\iint_D x^2ydxdy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x-y \leq 2,\ \ -1 \leq x+3y \leq 3\}$.

$\square$ L'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ avec $u = x-y$ et $v = x+3y$ est une bijection C^1 de D sur $[1,2]\times[-1,3]$ dont l'inverse est donné par $x = \frac{3u+v}{4}$, $y = \frac{v-u}{4}$. Le théorème de changement de variable asure que $dxdy = \frac{1}{4}dudv$ et donc

$$\iint_D x^2ydxdy = \frac{1}{256}\iint_{[1,2]\times[-1,3]}(3u+v)^2(v-u)dudv = \frac{1}{256}\int_1^2\left(\int_{-1}^{3} 3u^2v - 9u^3 + 5uv^2 + v^3\ dv\right)du = -\frac{17}{256}.$$

$\blacksquare$

Exercice 3.

En utilisant un changement de variables, calculer

$$\int\int\int_K \frac{z}{(1+x^2+y^2)^2} dxdydz, \quad K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; x^2+y^2 \leq z^2, \;\; 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

REPONSE 2008 : $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$

Exercice 4.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, 0[$ est donnée par $f(x) = 0$, et la restriction à $[0, \pi[$ est donnée par $f(x) = x$.

REPONSE : $c_0 = \pi/4$, $c_{2n} = i/4n$, $c_{2n+1} = -i/2(2n+1) - 1/\pi(2n+1)^2$.

2. Enoncer le théorème de Dirichlet et calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

REPONSE : $\pi^2/8$, $\pi/4$.

3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

REPONSE : $\pi^2/6$

4. Enoncer le théorème de Parseval et calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

REPONSE : $\pi^4/96$

FIN