Université de Bordeaux
Licence de Sciences, Technologies, Santé
Mentions Mathématiques et Informatique
M1MI2012 Algèbre 1

Algèbre 1

Exercices et Annales

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z &=& 5\\ x-y-z &=& 1\\ x+z &=& 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y+6z+2t &=& 5\\ y-2z+t &=& 1\\ z-3t &=& 2 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{lcl} x-3y+z &=& 1\\ 2x+y-z &=& -1\\ x+11y-z &=& 5 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-2z &=& 10\\ 3x+2y+2t &=& 1\\ 5x+4y+z+3t &=& 14 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t &=& 10\\ x-y+z+t &=& 6\\ x+y-z+t &=& 4\\ x+y+z-t &=& 4 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-5z+4t &=& 43\\ -3x+2y+z-2t &=& 5\\ 4x-y+2z+3t &=& -13\\ 5x+y+3z+t &=& -28 \end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z &=& 5\\ x-y-z &=& 1\\ x+z &=& 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} x+iy+2z &=& 0\\ ix+3z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{lcl} -2x+y &=& -4+i\\ x+iz &=& 2-i\\ x-y-iz &=& 2 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 1+2i\\ ix-3z &=& 3-i\\ x+iy+z &=& 2-i \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 1\\ 2x+iy-z &=& i\\ -ix+(1+i)y+2iz &=& 1 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 1\\ x+jy+j^2z &=& 1\\ x+j^2y+jz &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t &=& 0\\ 2x-y-z+3t &=& 0\\ x-2y+2z-t &=& 1\\ 2x+2y-2z+5t &=& -1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+5y-8z &=& 8\\ 4x+3y-9z &=& 9\\ 2x+3y+3z &=& 7\\ 3x+8y-7z &=& 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_3+x_5+x_6 &=& 0\\ x_1+x_6 &=& 0\\ x_2+x_4+2x_6 &=& 0\\ x_1+x_2+x_5+2x_6 &=& 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6 &=& 0 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{lcl} x_1+2x_3+4x_4 &=& -8\\ x_2-3x_3-x_4 &=& 6\\ 3x_1+4x_2-6x_3+8x_4 &=& 0\\ -x_2+3x_3+4x_4 &=& -12 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres u, v, w, t pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} x+3y+6z & = & u \\ 3x+y+3z & = & v \\ 6x+6y+z & = & w \\ 7x+9y+7z & = & t \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{lcl} 3x-y-2z & = & u \\ -x+3y-z & = & v \\ -2x-2y+3z & = & w \\ x-3y+z & = & t \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+2z & = & u \\ x+2y+z & = & v \\ x+y+z & = & w \\ 4x+3y+4z & = & t \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{lcl} x-y-z & = & 0 \\ x+jy+j^2z & = & u \\ j^2y+jz & = & v \end{array}\right.$$

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 5. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si v est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots$:

1. $v = (3, 1, -4)$, $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (0, 1, -1)$.
2. $v = (1, 1, 1, -1)$, $e_1 = (1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (0, 1, 3, 0)$, $e_3 = (0, 0, 4, 1)$.
3. $v = (1, 2, 3, 4)$, $e_1 = (1, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)$, $e_4 = (1, 0, 0, -1)$
4. $v = (0, 0, 0)$, $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (3, 2, 1)$, $e_3 = (12, 24, 36)$.

Exercice 6. Démontrez que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7. Démontrez que $E = \{(a, b, 0, a) \mid a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$.

Exercice 8. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si v appartient au sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$:

1. $v = (20, -51, 112)$, $E = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
2. $v = (0, 0, 0, 0)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$
3. $v = (0, 1, 2, 3, 4)$, $E = \mathrm{Vect}((0, 1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, -1))$
4. $v = (1, j, j^2)$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Exercice 9. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$?

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{array}{lcl} F & = & \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)) \\ G & = & \mathrm{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)) \end{array}$$

Exercice 11. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 12. Dans $\mathbb{C}^n$, montrez que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont égaux :

$$E = \{v = (v_1, \dots, v_n) \mid \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\}$$
$$F = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, \dots, 0), (1, 0, -1, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0, -1))$$

Exercice 13.

1. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. Démontrez les inclusions : $E \cap F \subset E \subset E + F$ et $E \cap F \subset F \subset E + F$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$E = \{v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \text{ et } v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0\}$$
$$F = \mathrm{Vect}((1, 2, 0, 0), (1, -1, -1, 1))$$

   (a) Trouvez un élément qui appartient à E mais pas à $E \cap F$.
   (b) Trouvez un élément qui appartient à F mais pas à $E \cap F$.
   (c) Trouvez un élément de $E + F$ qui n'est pas dans E ni dans F.

Exercice 14. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f(0) = 1\}$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f \text{ continue}\}$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f \text{ croissante}\}$
4. $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0\}$

Exercice 15. Montrez que les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels :

1. L'ensemble des suites à support fini.
2. L'ensemble des suites de limite nulle.

Exercice 16. Montrez que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a, b], \mathcal{R})$:

1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
2. $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\right\}$

Exercice 17. Soit I un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{F}(I, E)$ l'ensemble de toutes les applications de I à valeurs dans E. Montrez que cet ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des opérations d'addition et de multiplication scalaire que vous préciserez.

Exercice 18. Notons $E =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une loi interne $x \dot{+} y = xy$ et une loi externe $\lambda \cdot x = x^\lambda$. L'ensemble $(E, \dot{+}, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour $z \in \mathbb{C}$, $x \in E$, on définit une nouvelle loi externe par $z \cdot x = \overline{z}x$. L'ensemble E muni de la loi interne initiale et de cette nouvelle loi externe est-il encore un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 20. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, trouver une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. $\{e_1, e_2\}$ avec $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 2, 2)$
2. $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$
3. $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -2)$
4. $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (2, -1, 3)$ et $e_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 21. On considère dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (4, 1, 4)$, $w = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que les familles $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ sont libres.
2. La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre ?

Exercice 22. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ? Donnez une base du sous-espace vectoriel engendré par chacune de ces familles.

1. $A = \{(2, 3, 0), (0, 1, 4)\}$
2. $B = \{(0, 1, -1), (1, 2, -1), (0, 2, 1), (4, 6, 3)\}$
3. $C = \{(1, 1, 0), (2, -1, 1), (0, -1, 1)\}$

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (0, 1, 2)$. La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? Forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Déterminer une équation linéaire homogène dont u et v sont solution, puis montrer que l'ensemble de ses solutions est égal à $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Existe-t-il w tel que $\{u, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en trouver un.

Exercice 24. Les familles de vecteurs suivantes peuvent-elles être complétées en une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui, le faire.

1. $\{u, v, w\}$, avec $u = (1, 2, -1, 0)$, $v = (0, 1, -4, 1)$, $w = (2, 5, -6, 1)$.
2. $\{u, v, w\}$, avec $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$, $w = (1, 2, 0, 3)$.
3. $\{u, v\}$, avec $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 1, 1)$.

Exercice 25. $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{K}^3$. Soit $f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Montrer que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre et compléter celle-ci en une base de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 26. On considère les vecteurs $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 27. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (0, \lambda, 2)$, $u_2 = (\lambda, 3, 5)$ et $u_3 = (\lambda, 0, 1)$, où $\lambda \in R$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $\{u_1, u_2, u_3)$ est libre.
2. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $\{u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que $\{(0, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 28. Soit $\{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, avec $n \geq p + 1$. Établir :

1. Si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre et $u_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$, alors $\{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\}$ est libre.
2. Si $\{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, et $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, alors $\{u_1, ..., u_p\}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 29. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $f_i = e_1 + \cdots + e_i$. Montrer que $B' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ en fonction de ses composantes dans B.

Exercice 30. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base B_F de F.
2. Compléter B_F en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3, 4)$ et $w = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre ?
4. Soit $G = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 31. (DS mars 2013) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 4)$

1. Montrer que le vecteur $(x, 0, 1)$ appartient à $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ pour une seule valeur de x à déterminer et calculer λ et μ tels que $(x, 0, 1) = \lambda v_1 + \mu v_2$.
2. Notant $e_3 = (0, 0, 1)$, montrer que $\{v_1, v_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées dans cette base de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$
3. Déterminer trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $v = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si $ax + by + bz = 0$.

Exercice 32. (DS mars 2012)

Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants : $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -2, -3, -3)$, $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 3)$.

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée.
2. Donner une dimension et une base de :
   (a) $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
   (b) $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
3. Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base de F obtenue au 2(a).
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
5. En déduire la dimension de $F + G$.

Exercice 33. (DS mars 2014, légèrement modifié).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ et la famille $\mathcal{F}_n = \{f_1, ..., f_n\}$ de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définie par :

$$f_i = e_i + e_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ et } f_n = e_n + e_1.$$

Par exemple, si $n = 2$, $f_1 = f_2 = e_1 + e_2$ et $\mathcal{F}_2$ est liée.

1. Montrer que si $n = 3$, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. Est-elle une base de $\mathbb{K}^3$?
2. Montrer que si $n = 4$, la famille $\mathcal{F}_4$ est liée.
3. Traiter le cas $n \geq 5$ quelconque.

Exercice 34. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E + F$.

Exercice 35. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0), v = (0, 1, -1, 0), w = (1, 1, 1, 1), x = (0, 0, 1, 0) \text{ et } y = (1, 1, 0, -1).$$

Soient $E = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $F = \mathrm{Vect}(x, y)$. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 36. Soient

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\right\} \text{ et } F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\right\}.$$

Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E + F$.

Exercice 37. Dans $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on considère trois sous-ensembles :
$E_{00} = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \mid \exists N \in \mathbb{N} \mid \ \forall n \geq N,\ u_n = 0\}$,
$E_0 = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \ \mid \ \lim u_n = 0\}$ et
$E_\infty = \{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ \mid \ \exists M > 0 \mid \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M\}$.

1. Montrez que E_{00}, E_0 et E_∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrez que $E_{00} \subset E_0 \subset E_\infty$ et que ces inclusions sont strictes.
3. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la suite $\delta^i \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par

$$\delta_n^i = \begin{cases} 1, & \text{si } n = i \\ 0, & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

   Montrez que la famille $\{\delta^i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est libre. En déduire que les espaces E_{00}, E_0 ou E_∞ ne sont pas de dimension finie.

Exercice 38. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h_a(x) = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. la famille $\{f, g\}$ est-elle libre ou liée ?
2. Même question avec la famille $\{f, g, h_1\}$.
3. Même question avec la famille $\{h_a,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 39. Soit E l'ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'equation différentielle : $f'' + f = 0$.

1. Montrez que E est un espace vectoriel. Donnez une base de E.
2. Même question avec l'equation différentielle : $f'' - f = 0$.

Exercice 40. Soit

$$E = \{u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}.$$

1. Calculez les 10 premiers termes de la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (on l'appelle *la suite de Fibonacci*).
2. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
3. Montrez que l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Montrez que la suite de terme général x^n appartient à E si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.
5. Soit x_1 et x_2 les deux racines réelles de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, montrez que $\{x_1^n, x_2^n\}$ forme une base de E et en déduire la forme générale d'une suite appartenant à E.
6. Déduire de ce qui précède que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)$$

Exercice 41. Soient $F = \{u = (u_n)_n \ : \ \forall n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$ et $G = \{u = (u_n)_n \ : \ \forall n,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\}$ deux sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. Montrez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Determinez $F \cap G$.
3. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrez que F et G sont de dimension 2 et déterminez une base de chacun d'eux.

Matrices

Exercice 42. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, BC, $(AB)C$, et $A(BC)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 43. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

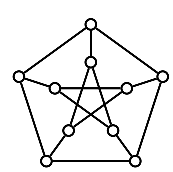
Calculer AB puis BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 44. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire la valeur de B^n, pour tout entier naturel n.
2. Pour tout entier naturel n, calculer $(B + I_3)^n$ (on utilisera la formule du binôme).
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 45. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets, sans boucles et sans arêtes multiples. La matrice A est carrée de taille n, de coefficients 0 ou 1, avec $A_{i,j} = 1$ si et seulement si i et j sont reliés par une arête.

1. Montrez que le coefficient (i, j) de A^2 est égal au nombre de chemins de longueur 2 du graphe allant de i à j (où un chemin est une succession d'arêtes, et sa longueur est le nombre d'arêtes parcourues).
2. Généralisez cette interprétation à A^k, $k \geq 3$.
3. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dessinez le graphe dont A est la matrice d'adjacence, puis calculez A^2 et A^3 en vous aidant du graphe.
4. Soit A la matrice d'adjacence du graphe suivant (appelé le *graphe de Petersen*) :



Démontrez, en utilisant l'interprétation en termes de chemins, que

$$A^2 + A - 2I = J$$

où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 46. Montrez que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 47. Montrez que le produit de deux matrices carrées diagonales est encore une matrice diagonale, et que le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieure.

Exercice 48. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer le cas échéant leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$? La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrez que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que dans ce cas, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 52. Calculer les puissances des matrices suivantes (a et b sont des nombres réels ou complexes quelconques)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 53. Déterminez le rang des matrices suivantes, puis déduisez-en la dimension du noyau et de l'image de chacune de ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54. Pour chacune des matrices dans Exercice 53, déterminez son noyau et donnez une base de son image.

Exercice 55. Déterminez le rang des matrices suivantes, où $\lambda, a, b, p, q, r \in \mathbb{K}$ sont des paramètres.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Rappelez la preuve de l'inégalité $\mathrm{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$.
2. Donnez un exemple de deux matrices A, B telles que $\mathrm{rang}(AB) < \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$.
3. Supposons que la matrice B est *inversible* (en particulier $n = p$). Montrez $\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}(\mathrm{A})$.

Exercice 57. Soit n un entier naturel non nul. Pour $1 \leq i, j \leq n$ deux entiers, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i colonne j) qui vaut 1. On appelle *matrice de transvection* (resp. *matrice de dilatation*) toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $T_{ij}(\lambda) := I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$ (resp. de la forme $D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Les matrices $D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$ sont-elles inversibles ?
2. Montrez que la multiplication de A à droite par $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j de A par λ ;
3. Montrez que la multiplication de A à droite par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j de A par $C_j + \lambda C_i$.
4. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, donnez une matrice P_{ij}, indépendante de A, telle que la multiplication de A à droite par P_{ij} ait pour effet d'échanger la colonne i et la colonne j de A.
5. Comparez les produits $D_i(\lambda)A, T_{ij}(\lambda)A, P_{ij}A$ avec la matrice A.

Exercice 58. Montrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminez leur dimension :

1. L'ensemble des matrices diagonales
2. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures)
3. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}$ (l'ensemble des matrices symétriques)
4. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$ (l'ensemble des matrices antisymétriques)

Exercice 59. Notons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note $\mathcal{J}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\{J^k, \ k \in \mathbb{N}\}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{J}$? Si $A, B \in \mathcal{J}$ montrez que le produit AB appartient à $\mathcal{J}$.

Applications linéaires, sommes directes

Exercice 60. Soit l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x,y,z)) = (2x+y+z, x+2y+z, 3x+3y+2z).$$

1. Montrez que $f$est une application linéaire.
2. Déterminez une matrice A telle que $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ et en déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner des bases de l'image et du noyau de f. Quel est le rang de f ?
4. Soit $v = f(u)$ un élément de l'image de f, montrez que l'image réciproque de v par f et l'ensemble $\{u + w \mid w \in \mathrm{Ker}(f)\}$.
5. En déduire l'ensemble des solutions du système

$$(S) \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ x+2y+z = 1 \\ 3x+3y+2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 61. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrez que u est linéaire et donnez la matrice de u dans les bases canoniques.
2. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrez que $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$.

Exercice 62. Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T la transformation linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Écrire la matrice A de T dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ puis déterminer le noyau de cette application. .
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ et trouver la nature de l'application T.
4. Écrire la matrice de passage P de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{f_1, f_2, f_3\}$, calculer son inverse P^{-1}, puis écrire et vérifier la relation qui lie les matrices A, B, P et P^{-1}.

Exercice 63. (Exercice 1 du DST 2013) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \epsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \epsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \epsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E
2. Calculer $f(\epsilon_1)$, $f(\epsilon_2)$, $f(\epsilon_3)$ et en déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f
4. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
6. Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 64. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Exercice 65. (Extrait de l'examen deuxième session 2016)
Soit

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$$

1. Quelle est la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$?
2. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Soit $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1, j, j^2)$ et $e_3 = (1, j^2, j)$. Calculez $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2, e_3.
3. Soit $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Montrez que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
4. Donnez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$, et la relation qui lient M, M', P et P^{-1}.

Exercice 66. (Extrait de l'examen deuxième session 2016)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$E = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)),$$

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\},$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$$

1. Déterminer une base et la dimension de F et de G (justifiez votre réponse).
2. Même question pour $E \cap F$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = (E \cap F) \oplus G$

Exercice 67. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit U et V deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1. Montrez que, si $E = U \oplus V$, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Réciproquement, montrez que, si $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E alors $E = U \oplus V$.

Exercice 68. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to E$ une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. On dit que p est un *projecteur* ou une *projection*.

1. Montrez que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{0}\}$

2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. Montrez que, si $x \in E$ s'écrit $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = v$.
4. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Quelle est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ de E ?
5. Montrer que $\mathrm{Id} - p$ est aussi une projection.
6. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 69. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et s un endomorphisme de E involutif, c'est-à-dire tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. On pose $U = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $V = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

1. Montrer que $U \cap V = \{0\}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $(x + s(x))/2 \in U$ et $(x - s(x))/2 \in V$.
3. Déduire des questions précédentes que $E = U \oplus V$.
4. Montrez que, si $x \in E$ s'écrit $x = u + v$ avec $u \in U$ et $v \in V$, alors $s(x) = u - v$.
5. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Quelle est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ de E ?

On dit que s est la symétrie par rapport à U parallèlement à V. Donnez une interprétation géométrique de cette terminologie.

Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Calculez les coordonnées de $s((x_1, x_2, x_3))$.

Exercice 70. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de F, puis donnez un sous-espace E tel que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ (on dit que E est un *supplémentaire* de F).

1. $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$,
2. $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 71. Notons $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}$ et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$ où A^T désigne la transposée de A. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$? Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Exercice 72. Montrer que les sous-ensembles $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ et $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus H$.

Arithmétique

Exercice 73. Si $a = 462$ et $b = 104$, calculez par l'agorithme d'Euclide étendu $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$, ainsi que deux entiers u et v tels que $au + bv = d$. Calculez $\mathrm{ppcm}(a, b)$.

Exercice 74. Calculez par la méthode de votre choix les pgcd suivants : $\mathrm{pgcd}(46848, 2379)$, $\mathrm{pgcd}(13860, 4488)$, $\mathrm{pgcd}(42098, 36146)$, $\mathrm{pgcd}(30076, 12669, 21733)$, $\mathrm{pgcd}(4096, 11111111111111)$.

Exercice 75. Soit a, b, c, d des nombres entiers.

1. Montrez que $\mathrm{pgcd}(ca, cb) = c\,\mathrm{pgcd}(a, b)$.
2. Montrez que, si $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$, alors il existe des entiers a', b', premiers entre eux, tels que $a = da'$ et $b = db'$.
3. Réciproquement, montrez que si $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux, alors $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 76. Montrez que $\mathrm{pgcd}(2n^3 + 5n^2 + 4n + 1, 2n^2 + n) = 2n + 1$.

Exercice 77. Trouvez deux entiers u et v tels que $29u + 24v = 3$, puis déterminez tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$. Mêmes questions pour $30u + 35v = 100$, $13u + 19v = 4$.

Exercice 78. Soit $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Dans cet exercice on veut déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $d = au + bv$, c'est-à-dire toutes les relations de Bezout entre a et b.

Soit $d = au_o + bv_0$ une relation de Bezout particulière et soit a' et b' des entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$.

1. Justifiez l'existence de a' et b', et montrez que $\mathrm{pgcd}(a', b') = 1$.
2. Si $d = au + bv$, Montrez que $a'(u - u_0) + b'(v - v_0) = 0$.
3. En déduire qu'il existe un entier k tel que $u = u_0 + b'k$ et $v = v_0 - a'k$.
4. Conclure.

Exercice 79. Démontrez les résultats suivants :

1. Si a divise c et b divise c et si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ alors ab divise c.
2. Si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ et si $\mathrm{pgcd}(a, c) = 1$ alors $\mathrm{pgcd}(a, bc) = 1$.
3. Si p est un nombre premier et si p divise ab alors p divise a ou p divise b.

Exercice 80. Faire la liste des nombres premiers inférieurs à 100. On pourra utiliser le crible d'Ératosthène.

Exercice 81. Nombres de Mersenne. Un nombre de Mersenne est un nombre entier de la forme $M_p = 2^p - 1$. Montrez que, si M_p est premier, alors p est premier (on pourra utiliser la formule $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)$). Vérifiez que M_2, M_3, M_5, M_7 sont premiers mais pas M_{11}. *On connait 47 nombres premiers de Mersenne. On conjecture qu'il en existe une infinité.*

Exercice 82. Nombres parfaits. Un entier positif a est un nombre parfait si la somme de ses diviseurs positifs est égale à $2a$. Montrez que, si $a = 2^n p$ avec p premier, a est parfait si et seulement si $p = 2^{n+1} - 1$. En déduire que p est un nombre premier de Mersenne et donc que

$n+1$ est un nombre premier (voir l'exercice sur les nombres de Mersenne). Calculez les quatre premiers nombres parfaits de la forme $a = 2^n p$.

Exercice 83. Nombres de Fermat. Un nombre de Fermat est un nombre entier de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrez que, si $2^a + 1$ est premier, alors a est nécessairement une puissance de 2 (on pourra utiliser la formule : si n est impair, $x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x + 1)$).
2. Vérifiez que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers, mais que F_5 n'est pas premier (on pourra chercher un facteur de la forme $128k + 1$).
3. Montrez les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
F_n &= (F_{n-1} - 1)^2 + 1 \\
F_n &= F_{n-1} + 2^{2^{n-1}} F_0 \dots F_{n-2} \\
F_n &= F_{n-1}^2 - 2(F_{n-2} - 1)^2 \\
F_n &= (F_0 F_1 \dots F_{n-1}) + 2
\end{aligned}$$

   et déduire de la dernière que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

On ne connait aucun autre nombre premier de Fermat que $F_0, \dots, F_4$.

Exercice 84.

1. À quoi reconnaissez-vous qu'un entier écrit en base 10 est divisible par 2 ? Par 5 ? Par 3 ? Par 9 ? Expliquez le résultat en termes de congruences modulo 2,5,3,9.
2. Montrer qu'un entier dont l'écriture en base 10 est $a_{m-1} \dots a_1 a_0$ est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{m-1} a_{m-1} = 0 \bmod 11$.
3. Sans utiliser de calculatrice et sans poser de division, établir une règle de divisibilité par 101 et montrer que 478775514327 est divisible par 101.
4. Trouver un critère permettant de savoir simplement si un entier dont l'écriture en base 2 est $a_{m-1} \dots a_1 a_0$ est divisible par 7. L'entier 101101010110111 est-il divisible par 7 ?

Exercice 85.

1. Écrire les tables d'addition et de multiplication des entiers modulo 7 et modulo 8.
2. Dans les deux cas, donner la liste des éléments inversibles ainsi que leurs inverses.
3. Résoudre les équations (i.e. trouver *l'ensemble* des solutions)

$$\begin{array}{lll}
5x - 3 = 1 \bmod 7 & 3x + 7 = 0 \bmod 7 & 3x + 4 = 1 \bmod 8 \\
2x + 5 = 1 \bmod 8 & 4x + 3 = 1 \bmod 8 &
\end{array}$$

Exercice 86.

1. Écrire les premières lignes du triangle de Pascal, et constater que, pour un nombre premier p, tous les coefficients de la p-ième ligne (1 2 1 est la deuxième ligne) qui ne sont pas '1' sont divisibles par p.
2. Le démontrer, et en déduire la *formule du binôme du cancre :* pour tout nombre premier p, et tout entiers x, y,

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \bmod p.$$

Annales des années 2015 et 2016

Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 1

19 mars 2015, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations linéaires suivant en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } x+y-z=0\right\}$$

et

$$F = \text{Vect}\left\{(1,-1,0),(0,1,-1)\right\}.$$

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez, *en le justifiant*, si elle est vraie ou fausse :

a) $F \subset E$.

b) $E \subset F$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1,1,0,0), \; e_2 = (0,1,1,0), \; e_3 = (0,0,1,1),$$
$$e_4 = (0,1,0,1), \; e_5 = (1,0,0,1) \text{ et } e_6 = (1,0,1,0).$$

1. La famille $\mathcal{F} = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ est-elle libre ?

2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_0 = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = \{e_1,e_2,e_3,e_5\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Soit $\{e_1,\dots,e_p\}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à Vect $\{e_1,\dots,e_p\}$, la famille $\{e_1+u,\dots,e_p+u\}$ est libre.

2. (*Hors barème, mais donnant lieu à un bonus de points*)
On suppose maintenant que u est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1,\dots,e_p$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que

$$u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que la famille $\{e_1+u,\dots,e_p+u\}$ soit libre.

Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 2

23 avril 2015, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Calculez l'inverse, s'il existe, de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A si $a = b = c$?
2. Quel est le rang de A si a, b, c sont deux à deux distincts ?
3. Quel est le rang de A si $a = b$ et $b \neq c$?

Exercice 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = 3I_3 + N$.

1. Calculez N^2, N^3, puis N^p pour tout $p \geq 4$.
2. En déduire M^p pour tout $p \geq 2$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).
3. On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$, telles que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, et vérifiant pour tout $n \geq 0$ les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Calculez X_1, puis X_2.

b) Montrez que, pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = MX_n$, puis que, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = M^n X_0.$$

c) Déduire de la question 2. les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA$ pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le but de cet exercice est de montrer qu'alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_2$. On note

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez AE_{11} et $E_{11}A$ puis en déduire que $b = c = 0$.

2. Calculez AE_{12} et $E_{12}A$ puis en déduire que $a = d$.

université de BORDEAUX	**Année universitaire 2014-2015** S1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques/Informatique **Code UE :M1MI2012** **Épreuve : Algèbre 1** 12 juin 2015 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1. Soit a un réel. On considère les deux matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que $B = I + A + A^2 + A^3$, où I désigne la matrice identité en dimension 4.
3. Calculer le produit $B(I - A)$. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,1)$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.
   (c) Déterminer la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
3. Montrer, *sans calcul*, que $N = P^{-1}MP$.
4. Calculer N^n pour tout entier naturel n.
5. En utilisant la relation établie à la question 3, en déduire la valeur de M^n pour tout entier naturel n.

Suite au dos de la feuille →

Exercice 3.

1. Montrer que les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + X + 1$, que l'on calculera, sont aussi racines du polynôme $X^3 - 1$.
2. Pour tout entier naturel n, on note R_n le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe des constantes a_n et b_n telles que $R_n = a_n + b_n X$.
   (b) Calculer R_n quand n vaut 0, 1 ou 2.
   (c) Pour un entier naturel quelconque n, montrer, en évaluant le polynôme $X^n - 1$ en les racines du polynôme $X^2 + X + 1$, que a_n et b_n sont solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues que l'on explicitera.
   (d) Montrer finalement que R_n ne dépend que du reste de la division euclidienne de n par 3 et le calculer.

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle qu'un *endomorphisme* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application linéaire de E dans lui-même.

Si f est un endomorphisme et k un entier naturel, on pose

$$f^k = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme f est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel m tel que $f^m = 0$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ qui a tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$ associe le n-uplet $(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ ("*décalage vers la droite*").
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Déterminer son noyau et son image .
   (b) Montrer que f est nilpotent.
2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{K}[X]_n$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. On rappelle qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de dimension $n + 1$de $\mathbb{K}[X]$, dont une base est donnée par la famille $(1, X, \ldots, X^n)$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on définit
$$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X).$$
   (a) Quelle relation y-a-t-il entre le degré de P et celui de $\Delta(P)$?
   (b) Montrer que la restriction de Δ à $\mathbb{K}[X]_n$ définit un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]_n$, que l'on note Δ_n.
   (c) Déterminer le noyau de Δ_n puis son image.
   (d) Montrer que Δ_n est nilpotent.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme nilpotent. Soit m le plus petit entier strictement positif tel que $f^m = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.
   (b) Montrer que les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)$ forment une famille libre.
   (c) En déduire que $m \leq \dim E$.

Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2015-2016

Algèbre 1

Devoir surveillé n$^\circ$ 1

9 mars 2016, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Déterminez l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y - 2z + t = 1 \\ x + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on demande de déterminer si elles sont libres et de déterminer la dimension du sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.

1. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 2, 2)$.
2. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.
3. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{u}_3 = (1, -1, -2)$.
4. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ et $\vec{u}_4 = (1, 2, 3)$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $\vec{w} = (3, 1, 3)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Montrer que lorsque cette condition est satisfaite, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ sont égaux.
2. À quelle condition, portant sur a, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. On considère pour $n \geq 2$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

et

$$F = \mathrm{Vect}((1, \ldots, 1)).$$

1. Donnez une base et la dimension de F.
2. Montrez que $\{(1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots (1, 0, \ldots, 0, -1)\}$ est une base de E, et déterminez la dimension de E.
3. Montrez que $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$.
4. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(u, v) \in E \times F$ tels que $x = u + v$. (indication : on pourra écrire $v = \lambda(1, \ldots, 1)$ et calculer λ en fonction des coordonnées de x).

<table>
<tr>
<td>université de BORDEAUX</td>
<td>Année universitaire 2015-2016
DST DE PRINTEMPS

Parcours : Mathématiques/Informatique Code UE :M1MI2012
Épreuve : Algèbre 1
17 mai 2015 : 14h (durée : 3h)
Documents interdits

Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon</td>
<td>Collège Sciences et Technologies</td>
</tr>
</table>

Exercice 1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à M.

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les images par f de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ et en déduire la matrice N de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Justifie que P est inversible et calculer son inverse.

   Quelle relation y a-t-il entre N, P, P^{-1} et M ?

Exercice 2. Soient α et β deux nombres réels, fixés pour toute la suite de l'exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel et soit $f : E \to E$ une application linéaire. Soit $U = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ et soit $V = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$.

1. Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$ et f est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminez U et V et donnez leur dimension, puis montrez (sans calculs supplémentaires) que $E = U \oplus V$.

Exercice 4. On pose $\alpha = e^{i\pi/3} \in \mathbb{C}$ et on note $\overline{\alpha}$ son conjugué.
On considère le polynôme $A = X^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{C}[X]_n$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid A \text{ divise } P\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que l'application f :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}^3 \\ P &\mapsto (P(-1), P(\alpha), P(\overline{\alpha})) \end{aligned}$$
est une application linéaire.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f)$.
5. Soit $g : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire f restreinte à $\mathbb{C}[X]_2$. Déduire des questions précédentes que g est injective.
6. Montrer que g est surjective (on pourra appliquer le théorème du rang).
7. Écrire la matrice de g lorsque $\mathbb{C}[X]_2$ est muni de la base $\{1, X, X^2\}$ et $\mathbb{C}^3$ est muni de la base canonique. Justifiez sans calculs que cette matrice est inversible.

<table>
<tr><td>université de BORDEAUX</td><td>Année universitaire 2015-2016
DST de printemps - Seconde session
Parcours : Mathématiques/Informatique Code UE :M1MI2012
Épreuve : Algèbre 1
juin 2016 : (durée : 3h)
Documents interdits
Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon</td><td>Collège Sciences et Technologies</td></tr>
</table>

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$
\begin{aligned}
E &= \mathrm{Vect}\left\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\right\},\\
F &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ et } z+t=0\right\}\\
\text{et } G &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\right\}
\end{aligned}
$$

1. Déterminer une base et la dimension de F et de G (justifiez votre réponse).
2. Même question pour $E\cap F$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4=(E\cap F)\oplus G$.

Exercice 2. Soit

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C}^3\\
(x_1,x_2,x_3) &\mapsto (x_3,x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

1. Quelle est la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$?
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Soit $j=e^{2i\pi/3}$. Montrer que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$.
4. Soit $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,j,j^2)$ et $e_3=(1,j^2,j)$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ en fonction de e_1,e_2,e_3.
5. Soit $\mathcal{B}'=\{e_1,e_2,e_3\}$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
6. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$, et la relation qui lie M, M', P et P^{-1}.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{R}[X]_n$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\mathcal{B}_n = \{1, X, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$.

Soient

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}[X]_n &\to \mathbb{R}[X]_n \\ P(X) &\mapsto P(X+1) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g_n : \mathbb{R}[X]_n &\to \mathbb{R}[X]_n \\ P(X) &\mapsto P(X-1) \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont des applications linéaires.
   Déterminer $f_n \circ g_n$ et $g_n \circ f_n$.
2. Montrer que f_n est un isomorphisme.
3. Pour $n = 1, 2, 3$, donner la matrice M_n de f_n et la matrice N_n de g_n dans la base $\mathcal{B}_n$.
4. Expliciter les matrices M_n et N_n dans le cas général $n \geq 1$.
5. Déduire des questions précédentes que M_n est inversible. Quel est son inverse ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires.

1. Justifier que f n'est pas injective et que g n'est pas surjective [*on pourra utiliser le théorème du rang*].
2. En déduire que l'application $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ n'est ni injective, ni surjective.