université de BORDEAUX	**Année universitaire 2015-2016** DST DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques/Informatique **Code UE :M1MI2012** **Épreuve : Algèbre 1** 17 mai 2015 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à M.

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les images par f de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ et en déduire la matrice N de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Justifie que P est inversible et calculer son inverse.

   Quelle relation y a-t-il entre N, P, P^{-1} et M ?

Exercice 2. Soient α et β deux nombres réels, fixés pour toute la suite de l'exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel et soit $f : E \to E$ une application linéaire. Soit $U = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ et soit $V = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$.

1. Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$ et f est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminez U et V et donnez leur dimension, puis montrez (sans calculs supplémentaires) que $E = U \oplus V$.

Exercice 4. On pose $\alpha = e^{i\pi/3} \in \mathbb{C}$ et on note $\overline{\alpha}$ son conjugué.
On considère le polynôme $A = X^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{C}[X]_n$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid A \text{ divise } P\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que l'application f :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}^3 \\ P &\mapsto (P(-1), P(\alpha), P(\overline{\alpha})) \end{aligned}$$
est une application linéaire.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f)$.
5. Soit $g : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire f restreinte à $\mathbb{C}[X]_2$. Déduire des questions précédentes que g est injective.
6. Montrer que g est surjective (on pourra appliquer le théorème du rang).
7. Écrire la matrice de g lorsque $\mathbb{C}[X]_2$ est muni de la base $\{1, X, X^2\}$ et $\mathbb{C}^3$ est muni de la base canonique. Justifiez sans calculs que cette matrice est inversible.