N1MA4M11 Algèbre 3

Examen du 19 juin 2013. Durée 3h, documents interdits.

Exercice 1

Dans cet exercice, vous pouvez appliquer les résultats du cours sans démonstration mais vous devez fournir un minimum d'explications.

Soit σ, τ les éléments du groupe de permutations S_8 définis par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposez σ et τ en produit de cycles à supports disjoints.
2. En déduire l'ordre de σ et de τ.
3. Les permutations σ et τ sont-elles conjuguées dans S_8 ? Donnez un exemple de permutation σ', différente de σ, et conjuguée à σ.
4. Calculez $\tau\sigma^{-1}$, puis sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. En déduire l'ordre de $\tau\sigma^{-1}$ ainsi que sa signature.

Exercice 2

Soit G un groupe. Étant donnés A et B deux sous-groupes de G, on note AB l'ensemble

$$AB = \{xy \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Soit H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrez que $HK = KH$ si et seulement si HK est un sous-groupe de G.
2. Dans cette question, $G = S_n$ avec $n \geq 4$. Utilisez la question précédente pour décider si HK est un sous-groupe de G dans les cas suivants :
   (a) $H = \langle(1,2)\rangle$, $K = \langle(3,4)\rangle$.
   (b) $H = \langle(1,2)\rangle$, $K = \langle(2,3)\rangle$.
3. Montrez que, si H est distingué dans G, $HK = KH$. En déduire que HK est alors un sous-groupe de G.
4. Montrez que, si H est distingué dans G, l'application $\phi : K \to HK/H$ definie par : $\phi(k) = kH$ induit un isomorphisme de $K/H \cap K$ sur HK/H.
5. Montrez que, si H et K sont distingués dans G, et si $H \cap K = \{1\}$, alors l'application $\psi : H \times K \to HK$ définie par : $\psi((h,k)) = hk$ est un isomorphisme.

Exercice 3

On considère le sous ensemble de $\mathbb{C}$:

$$A := \{a + bi \ : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

ainsi que l'application $f : A \to A$ définie par $f(a + bi) = a - bi$.

1. Montrez que $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif (indication : on pourra montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$).
2. Montrez que, si $a + bi \in A^*$ alors $a^2 + b^2 = 1$ et en déduire que $A^* = \{1, -1, i, -i\}$.
3. Montrez que f est un automorphisme de l'anneau A.
4. Soit $g : A \to A$ un homomorphisme d'anneaux.
   (a) Montrez que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $g(a + bi) = a + bg(i)$.
   (b) Montrez que, si $x = g(i)$, x vérifie $x^2 = -1$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $g = \mathrm{Id}$ ou $g = f$.