Devoir Maison n°1

Exercice 1

Notons $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et $\otimes$ la loi de composition interne sur G définie par la formule suivante : pour $(x, y), (x', y') \in G$,

$$(x, y) \otimes (x', y') := (xx', xy' + y).$$

1. Montrer que $(G, \otimes)$ est un groupe.
2. Le groupe $(G, \otimes)$ est-il commutatif ?
3. Soit $H = \{(1, y) \in G\} \subset G$. Montrer que $H \subset G$ est un sous-groupe commutatif.
4. On considère une relation $\sim$ sur G : soient $(x, y), (x', y') \in G$,

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow (x, y) \otimes (x', y')^{-1} \in H,$$

   où $(x', y')^{-1}$ désigne l'inverse de (x, y) dans $(G, \otimes)$.
   1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. On note dans la suite par $G/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence.
   2. Montrer que $(x, y) \sim (x', y')$ si et seulement si $x = x'$.
   3. En déduire une application *injective* de $G/\sim$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (DS 2011/12)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de montrer que le sous-groupe $G =< A, B >$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ engendré par A, B est un groupe d'ordre 16.

1. Montrer que A et B sont d'ordre 2.
2. Soit $R = BA$. Montrez que $G =< A, R >$.
3. Montrer que R est d'ordre 8 (on pourra remarquer que R est la matrice d'une rotation du plan).
4. Montrer que $A \notin < R >$ (on pourra considérer les déterminants de A et R).
5. En déduire que les 16 éléments de G : $R^i, AR^j, 0 \leq i, j \leq 7$ sont deux à deux distincts.
6. Montrer que $RA = AR^{-1} = AR^7$.
7. Déduire de tout ce qui précède que G est d'ordre 16.

Exercice 3

Soit G un groupe, dont la loi de composition interne est notée multiplicativement.

1. Soient H, K deux sous-groupes de G tels que $H \bigcup K$ soit aussi un sous-groupe de G. Montrer que nécessairement $H \subset K$ ou $K \subset H$. En déduire que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $H \cup K = G$.
   (b) $H = G$ ou $K = G$.
2. Soient H, K deux sous-groupes de G. Notons $H \cdot K = \{h \cdot k | h \in H, k \in K\}$. Montrer que $H \cdot K \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $H \cdot K = K \cdot H$.
3. Soit $n \geq 1$ un entier tel que l'application $x \mapsto x^n$ soit un *automorphisme* de G. Montrer que pour tout élément $x \in G$, x^{n-1} appartient au centre de G. C'est-à-dire, $x^{n-1}y = yx^{n-1}$ pour tout $y \in G$.