Devoir Maison n°2

Exercice 1

1. Montrer que, pour tous entiers m et n premiers entre eux, l'application

$$\phi\colon \begin{cases} (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* & \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ x \mod mn & \mapsto (x \mod m, x \mod n) \end{cases}$$

   est bien définie et est un isomorphisme de groupes.
2. On admet que pour tout entier $n \geq 2$ et tout nombre premier $p > 2$, le groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ est cyclique. Montrer que $(\mathbb{Z}/2268\mathbb{Z})^*$ est isomorphe à

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}.$$

3. Combien l'équation $x^3 = 1$ a-t-elle de solutions dans $(\mathbb{Z}/2268\mathbb{Z})^*$?

Exercice 2

Soit G un groupe fini. On fait agir G sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{cases} G \times G & \to G \\ g \cdot x & \mapsto g \cdot x = gxg^{-1} \end{cases}$$

Dans la suite $Z(G)$ désigne le centre de G, et G_g désigne le stabilisateur d'un l'élément $g \in G$ pour cette action.

1. Montrer que si $g \in G$ n'appartient pas à $Z(G)$, alors $Z(G) \subsetneq G_g \subsetneq G$.
2. En déduire que si G est non commutatif d'ordre p^3, où p est un nombre premier, alors $|Z(G)| = p$.
3. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien, pour tout p premier.

Exercice 3

1. Dans cette question, σ et τ sont deux transpositions distinctes de S_3.
   (a) Montrer que $S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $g \in Aut(S_3)$ qui envoie (12) sur σ et (23) sur τ, et en déduire l'ordre du groupe $Aut(S_3)$.
   (c) En déduire que S_3 est isomorphe à $Aut(S_3)$ (on pourra passer par le groupe des automorphismes intérieurs).
2. On cherche à dénombrer les actions fidèles de S_3 sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
   (a) Soit G un sous-groupe de S_4 de cardinal 6. On sait (par exemple par le lemme de Cauchy) qu'un tel sous-groupe admet un élément σ d'ordre 3 et un autre τ d'ordre 2. Montrer que le support de τ est inclus dans le support de σ.
   (b) Quels sont les sous-groupes d'ordre 6 de S_4 ?
   (c) Conclure.
3. Soit une action d'un groupe G sur un ensemble X admettant exactement deux orbites, l'une de cardinal p, et l'autre de cardinal q, où p et q sont premiers.
   (a) Montrer que pq divise $|G|$.
   (b) On suppose dorénavant que $p = 2$ et $q = 3$ et que l'action est fidèle. Quels sont les ordres possibles pour G ?
   (c) Déterminer les groupes G possibles, à isomorphisme près.