N1MA4M11 Algèbre 3

DS n° 1.

22 Mars 2013, durée 1h20

Documents interdits

$\boxed{1}$ Soit G un groupe, dont on note la loi multiplicativement et le neutre par 1. Soit

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

1. Montrez que, si G est commutatif, f est un homomorphisme de groupes. On note dans la suite de l'exercice $K = \mathrm{Ker}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$.
2. On suppose que G est un groupe commutatif d'ordre impair.
   (a) Montrez que $K = \{1\}$
   (b) Montrez que $Q = G$
3. Soit S_4 le groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$. Dans cette question G est le sous-groupe $\langle(1, 2), (3, 4)\rangle$ de S_4 engendré par les transpositions $(1, 2)$ et $(3, 4)$.
   (a) Montrez que G est un groupe commutatif d'ordre 4 (pour cela on pourra donner explicitement la liste des éléments de G).
   (b) En déduire que $K = G$.
4. Pour tout $k \geq 2$ donnez un exemple de groupe commutatif d'ordre 2^k tel que $K = G$ (indication : on pourra s'inspirer de la question précédente).
5. Si p est un nombre premier et $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, montrez que $K = \{1, -1 \bmod p\}$.
6. Montrez que si G est un groupe quelconque, dont tout élément est d'ordre 1 ou 2, alors G est commutatif (indication : on pourra montrer que $xyxy = 1 \Rightarrow xy = yx$) et $K = G$.

$\boxed{2}$ On rappelle que, si E est un ensemble, $S(E)$ désigne le groupe des permutations de E, et que la loi sur $S(E)$ est la loi de composition des applications. Soit G un groupe fini.

1. Montrez que l'application :

$$\begin{aligned} f : G &\to S(G) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

   où $f(x) \in S(G)$ est définie par : pour tout $g \in G$, $(f(x))(g) = xg$, est un homomorphisme de groupes.
2. Montrez que f est injective.
3. Caractérisez les groupes G pour lesquels f est un isomorphisme (Indication : on pourra comparer les ordres des groupes).
4. Déduire de la question 2 que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.