Année universitaire 2015-2016
Licence 2 de mathématiques
Algèbre 3 - Feuille 3

Exercice 1

a. Soit n un entier ≥ 2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ d'ordre impair. Vérifier que $\sigma \in \mathcal{A}_n$.

b. Montrer que tout élément de $\mathcal{S}_6$ est d'ordre ≤ 6.

c. Prouver que tout élément de $\mathcal{A}_7$ est d'ordre ≤ 7.

Exercice 2
Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Démontrer que G est abélien.

Exercice 3
On considère l'intervalle $I =]-1, +\infty[$. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose $x \otimes y = xy + x + y$. Montrer que $\otimes$ est une loi interne sur I, puis que $(I, \otimes)$ est un groupe.

Exercice 4
Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G. Prouver que : $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 5
Soit G un groupe. Soit H une partie finie non vide de G stable par la loi de groupe. Démontrer que H est un sous-groupe de G.
Qu'en est-il si H est infini ?

Exercice 6 : centre d'un groupe

a. Soit G un groupe. On pose $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G \ xy = yx\}$. Vérifier que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

b. Montrer que $Z(\mathcal{S}_3)$ est trivial.

c. Soit n un entier ≥ 3. Prouver que $Z(\mathcal{S}_n)$ est trivial.

Exercice 7
Soient n un entier ≥ 1 et a un entier. Quel est l'ordre de $\bar{a}$ dans le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 8
Considérons l'ensemble $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $\det(M) =$

1. Posons $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. Vérifier que G muni de la multiplication matricielle est un groupe.

b. Quel est l'ordre de U dans G ?

c. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$. Soit $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = cq + r$. Calculer $UT^{-q}M$.

d. En déduire que $G = \langle T, U \rangle$.

e. Posons $V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Montrer que $G = \langle U, V \rangle$. Quel est l'ordre de V ?

Exercice 9 : groupes diédraux

Soient G un groupe et n un entier ≥ 3. Supposons qu'il existe $r \in G$ d'ordre n et $s \in G$ d'ordre 2 vérifiant : $G = \langle r, s \rangle$ et $sr = r^{-1}s$. Prouver que G est un groupe non abélien d'ordre $2n$.

Exercice 10

Soit G un groupe. On suppose que l'ensemble des sous-groupes de G est fini. Démontrer que G est fini.

Exercice 11

Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément de G d'ordre 2 ; *indication :* on pourra regrouper chaque élément avec son inverse.

Exercice 12 : nombres de Mersenne

Soit n un nombre premier impair. Soit p un diviseur premier de $2^n - 1$. Déterminer l'ordre de $\bar{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. En déduire que $2n$ divise $p - 1$.

Exercice 13 : critère de Pépin

Soit n un entier naturel ; on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a. Soit p un facteur premier de F_n. Prouver que 2^{n+1} divise $p - 1$; *indication :* on pourra considérer l'ordre de $\bar{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

b. Supposons qu'il existe un entier a tel que $a^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \bmod F_n$. En s'inspirant de la question **a**, démontrer que F_n est premier.