

## DS n°1

19 mars 2014

Durée : 1h20

*Les documents sont interdits, les calculatrices autorisées.  
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.  
Quatre exercices traités parfaitement donneront la totalité des points.*

**Exercice 1.** L'entier 193 est-il inversible modulo 2014 ? Si oui, calculer son inverse.

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $19x + 3y = 2014$ .

**Exercice 3.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les fractions  $\frac{21n+4}{14n+3}$  et  $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$  sont irréductibles.

**Exercice 4.** On veut déterminer les solutions de l'équation diophantienne

$$(*) \quad x^2 - 13y^2 = 7$$

Soit donc  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution de (\*).

- (1) Montrer que ni  $x$ , ni  $y$  n'est divisible par 7.
- (2) Montrer que  $x^2 \equiv -y^2 \pmod{7\mathbb{Z}}$ .
- (3) En déduire que  $-1$  est un carré modulo 7.
- (4) Déterminer les carrés modulo 7, et en déduire que (\*) n'a pas de solutions entières.

**Exercice 5.** Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers  $a + b$  et  $ab$ .