Devoir surveillé
Modules et espaces quadratiques

le jeudi 24 octobre 2019, de 13h15 à 15h15

⋆⋆⋆

Calculette autorisée. Documents non-autorisés. Ce sujet comporte deux pages. La notation accordera la plus grande importance à la qualité de la rédaction.

⋆⋆⋆

Exercice 1 :

Soit A un anneau principal. Soit r un entier positif. Soit M un A-module libre de rang r. Soit N un sous-module de M. Montrez que N est un A-module libre de rang $\leqslant r$.

Il s'agit d'une question de cours. Vous donnerez la démonstration détaillée.

Exercice 2 : Construire une matrice de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est $(14, 35, 10)$.

Exercice 3 : On considère le $\mathbb{Z}$-module $M = (\mathbb{Z}/350\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/144\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/216\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})$.

1. Montrez que M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et donnez une famille génératrice.

2. Donnez les diviseurs élémentaires de M.

3. Donnez les facteurs invariants de M.

4. Quel est l'idéal annulateur de M ?

5. Quelles sont les composantes p-primaires de M ?

6. Pour tout entier premier p on note $M(p) = \{v \in M | p.v = 0\}$.

Montrez que $M(p)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7. Donnez la dimension du $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel $M(2)$. Vous justifierez votre réponse.

8. Donnez la dimension du $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-espace vectoriel $M(p)$ pour $p \in \{3, 5, 7, 11\}$.

Exercice 4 : Donnez la liste de tous les groupes commutatifs de cardinal 72 à isomorphisme près. Vous justifierez votre réponse.

Exercice 5 :

Dans cet exercice, A est un anneau commutatif unitaire, M est un A-module, et $u \in \mathrm{End}_A(M)$.

1. Rappelez pourquoi $\mathrm{End}_A(M)$ est un A-module.

2. On suppose que M est un A-module noethérien. Rappelez la définition d'un module noethérien. Rappelez la définition d'un anneau noethérien. En considérant la suite des sous-modules $\mathrm{Ker}(u^n)$ de M, montrez que si u est surjectif alors il est injectif.

3. Donnez un exemple d'un A-module noethérien M et d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_A(M)$ qui soit injectif mais non surjectif (on pourra prendre $M = A = \mathbb{Z}$).

4. Soit M le A-module $A^{(\mathbb{N})}$. Rappelez la définition précise de $A^{(\mathbb{N})}$. Montrez que M n' est pas noethérien.

5. Soit M le A-module $A^{(\mathbb{N})}$. Montrez que l'endomorphisme $u : M \to M$ qui à la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ associe la suite $a_1, a_2, \ldots$ est surjectif mais pas injectif.

6. Soit $A = \mathbb{Z}$ et soit M le A-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Montrez que l'application

$$u : \quad M \longrightarrow M$$

$$z \longmapsto 2z.$$

est surjective mais pas injective. Le module M est il noethérien ? Le module M est il de type fini ?

Exercice 6 : Soit $A = \mathbb{R}[x]$ l'anneau de polynômes à coefficients réels.

1. Expliquez rapidement pourquoi A est un anneau principal.

2. Quelles sont les unités de A ? Vous justifierez votre réponse.

3. Montrez que tout polynôme unitaire de degré 1 dans $\mathbb{R}[x]$ est un élément irréductible de $\mathbb{R}[x]$.

4. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme unitaire de degré 2 dans $\mathbb{R}[x]$ soit un élément irréductible de $\mathbb{R}[x]$.

5. Décrivez l'ensemble des éléments irréductibles de $A = \mathbb{R}[x]$ à association près. On rappelle que deux éléments irréductibles sont dits associés si le second est le produit du premier par une unité.

6. Donnez la factorisation en produits d'irréductibles de A des polynômes suivants : $a_1(x) = x^4 + x^3$, $a_2(x) = x^5 - 2x^3 + x$, $a_3(x) = x^6 + x^5 + x^4$, $a_4(x) = x^6 - 2x^3 + 1$.

7. On considre le A-module

$$M = (A/a_1A) \oplus (A/a_2A) \oplus (A/a_3A) \oplus (A/a_4A).$$

Quels sont les diviseurs élémentaires de M ? Quels sont les facteurs invariants de M ? Quelles sont les composantes p-primaires de M ?

8. Pour tout polynôme irréductible $P(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$ on note $M(P(x)) = \{v \in M | P(x).v = 0\}$.

Montrez que $M(P(x))$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}[x]/P(x)\mathbb{R}[x]$.

9. Quel est le corps $\mathbb{R}[x]/x\mathbb{R}[x]$? Donnez la dimension du $\mathbb{R}[x]/x\mathbb{R}[x]$-espace vectoriel $M(x)$. Vous justifierez votre réponse.

10. Donnez la dimension du $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1)\mathbb{R}[x]$-espace vectoriel $M(x^2 + x + 1)$.
