Devoir n$^{\text{o}}$ 3 (Correction)

Exercice 1.

a. f restreinte à $]-\infty, 0[$ est une somme de fonctions continues, donc f est continue sur $]-\infty, 0[$. De même f est continue sur $]0, +\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue en 0. Or f est continue en 0 ssi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Ces trois quantités sont respectivement égales à 2, n et n, donc $C = \{(m, 2) \colon m \in \mathbb{R}\}$.

b. Comme f est dérivable, elle est continue ; donc n vaut 2 d'après la question précédente, et $f(0) = 2$. D'autre part f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car sa restriction à ces intervalles est une somme de fonctions dérivables. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi f est dérivable en 0. Or f est dérivable en 0 ssi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

donc ssi $m = 1$. D'où $D = \{(1, 2)\}$; de plus, si $(m, n) = (1, 2)$, on a $f'(0) = 1$.

c. On a $(m, n) = (1, 2)$. D'après la question précédente : si $x \in]-\infty, 0[$ on a $f'(x) = -2x + 1$, si $x \in]0, +\infty[$ on a $f'(x) = 1$, et en 0 on a $f'(0) = 1$. Comme f' est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ ssi elle l'est en 0. Or

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 1.$$

Donc f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

a. arctan et cos sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc leur composée aussi.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ d'où $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$. Et $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x = +\dfrac{\pi}{2}$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

c. Calculons $\arctan \sqrt{3}$. C'est l'unique réel a dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan a = \sqrt{3}$. Donc $a = \frac{\pi}{3}$, et $f(\sqrt{3}) = \cos(a) = \frac{1}{2}$.

d. $\cos(\arctan x) = \frac{1}{2} \iff (\arctan x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \quad \text{ou} \quad (\arctan x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Comme $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $\arctan x = \pm\frac{\pi}{3}$. On en déduit qu'elle possède deux solutions : $x = \pm\sqrt{3}$.

e. arctan est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\frac{\pi}{2}[$; cos est continue, strictement décroissante sur $[0, +\frac{\pi}{2}[$. Donc leur composée est continue, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. La restriction de f à $I = [0, +\infty[$ est donc une bijection de I sur $f(I) =]0, 1]$.

f. • arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Donc leur composée est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 + x^2)^{-1} \big(-\sin(\arctan x)\big).$$

Si $x \in]0, +\infty[$, alors $\arctan x \in]0, \pi/2[$ et $f'(x) \neq 0$. Donc g est dérivable sur $f(]0, +\infty[) =]0, 1[$, et on a

$$\forall y \in]0, 1[, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

• Il nous faut évaluer cette expression pour $y = \frac{1}{2}$. Dans une question précédente nous avons résolu l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$; $g(\frac{1}{2})$ est celle des deux solutions qui appartient à $]0, +\infty[$, *i.e.* $g(\frac{1}{2}) = +\sqrt{3}$ et

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{-4}{\sin(\arctan \sqrt{3})}.$$

- De plus $(\sin(\arctan\sqrt{3}))^2 = 1 - (\cos(\arctan\sqrt{3}))^2 = 1 - (f(\sqrt{3})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Comme $\arctan\sqrt{3}$ appartient à $[0, +\frac{\pi}{2}[$, son sinus est positif et $\sin(\arctan\sqrt{3}) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement,

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

g. On remarque que

$$(f(x))^2 = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$f(x)$ étant positif pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a donc $f(x) = +(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit que les primitives F de f sur $\mathbb{R}^+$ sont de la forme : $F(x) = \operatorname{Argsh} x + \text{Constante}$.

Exercice 3. arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et tan sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n,$$

leur composée f est donc définie sur ce dernier ensemble. Comme tan est π-périodique, f aussi ; il suffit donc de l'étudier sur $I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Mais arctan est la réciproque de tan : $I_0 \to \mathbb{R}$, donc $f(x) = x$ pour tout x dans I_0. Pour x dans I_n, on remarque que $x - n\pi \in I_0$. Comme $f(x) = f(x - n\pi)$ par périodicité, on a

$$f(x) = f(x - n\pi) = x - n\pi.$$

En particulier, f est une fonction affine par morceaux, «en dents de scie».

Exercice 4.

a. $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, et F en est une primitive, elle est donc dérivable sur cet intervalle avec $F'(x) = f(x)$. Elle est en particulier continue sur $[\pi/6, \pi]$.

Comme f est strictement positive sur $[\frac{\pi}{6}, \pi[$, F y est strictement croissante, mais il y a un problème en π. Pour tout $x < y < z$ dans $[\frac{\pi}{6}, \pi[$, on a $F(x) < F(y) < F(z)$. Comme F est continue en π, on peut faire tendre z vers π et obtenir $F(x) < F(y) \leqslant F(\pi)$ [*Attention, le* $<$ *devient* $\leqslant$ *lors du passage à la limite.*] En particulier, on a bien $F(x) < F(\pi)$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{6}, \pi[$ et F est strictement croissante sur l'intervalle fermé $[\frac{\pi}{6}, \pi]$.

Notons que $F(\pi/2) = 0$, donc $I < 0$ et $J > 0$.

b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, F étant *strictement* croissante et continue de $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ dans $[I, J]$ admet une réciproque G continue sur $[I, J]$. G est dérivable en un point $F(x) \in [I, J]$ ssi $F'(x) \neq 0$. Comme $F'(x) = f(x) > 0$ pour $x \in [\frac{\pi}{6}, \pi[$, G est dérivable sur $[I, J[$

c. D'après ce qui précède, $F(x) = 0$ ssi $x = \pi/2$ et

$$G'(0) = 1/F'(\pi/2) = 1/f(\pi/2) = \pi/2.$$

Exercice 5.

a. On effectue le changement de variable $u = \pi - t$: on a

$$\int_0^\pi \frac{\cos t}{2+\sin^2 t}\,dt = \int_\pi^0 \frac{\cos(\pi - u)}{2+\sin^2(\pi - u)}\,(-du) = \int_\pi^0 \frac{\cos u}{2+\sin^2 u}\,du.$$

Étant égale à son opposée, l'intégrale est nulle.

b. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc y admet une primitive. Comme $t^2 + t + 1 = (t + 1/2)^2 + 3/4$, on utilise le changement de variable $t + 1/2 = \sqrt{3/4}\,\operatorname{sh} u$, soit $dt = \sqrt{3/4}\,\operatorname{ch} u\,du$; en utilisant $\operatorname{ch}^2 u = (e^{2u} + e^{-2u} + 2)/4 = (1 + \operatorname{ch} 2u)/2$, on obtient

$$\int \sqrt{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{3}{4}\operatorname{ch}^2 u\,du = \frac{3}{8}\left(u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\right) + C.$$

On peut maintenant remplacer u par sa valeur $u = \operatorname{Argsh}\left(\sqrt{4/3}(t + 1/2)\right)$. Le résultat présentant un intérêt limité, on s'abstiendra de le reproduire.