# Feuille n° 6

**Exercice 1.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante.

**a.** Montrer que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ en utilisant les propriétés des valeurs intermédiaires.

**b.** Si $f$ est strictement croissante, montrer que $f$ est injective, et en déduire que $f$ définit une bijection de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$.

**c.** Que se passe-t-il si $f$ est décroissante (resp. strictement décroissante) ?

**Exercice 2.** En utilisant les propriétés des fonctions continues, calculer les images directes $f(I)$ dans les cas suivants :

$$f(x) = \cos(x), \quad I = [-1,1]$$
$$f(x) = \operatorname{sh}(\sqrt{x}), \quad I = [0,3[$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}, \quad I = [0,1]$$

**Exercice 3.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 12}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x + 1}, \quad f(x) = \exp(x^3 - 2x + 1), \quad f(x) = e^{\cos(\sin(x))},$$
$$f(x) = \ln(\sin(x)), \quad f(x) = \ln(\ln(x)), \quad f(x) = \arccos(x)^3, \quad f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x),$$
$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch}(x)}{2 + \operatorname{sh}(x)}, \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{argth}(x)}, \quad f(x) = \frac{3 - 5x^4}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

**Exercice 4.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1},$$
$$\lim_{x\to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x)), \quad \lim_{n\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{x\to \pi/4} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\cos(2x)}.$$

**Exercice 5.** Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $\alpha^3 = \cos(\alpha)$.

**Exercice 6.** Soit $f(x) = xe^x$ pour $x$ réel.

**a.** Montrer que $f$ est décroissante pour $x \leqslant -1$, croissante pour $x \geqslant -1$.

**b.** En déduire qu'il existe un unique réel $c > 0$ tel que

$$e^{1+1/c} = c.$$

**Exercice 7.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0, \\ 1 - \sin(x)^2 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

**a.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

**c.** Montrer que $f$ est dérivable en 0. Quelle est sa dérivée ?

**d.** Vérifier que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0),$$

et donc que $f'$ est également continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

**a.** Montrer que

$$|f(x)| \leqslant x^2$$

pour tout $x$. En déduire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$.

**c.** Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**d.** Expliquer pourquoi $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite pour $x \to 0$, et en déduire que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.