Corrigé du devoir n° 1

Exercice 1. On note L_1 et L_2 les deux lignes du système. En remplaçant L_2 par $(2-i)L_1+iL_2$ dans le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}(2+i)z-iu & = & 2+i \\ (1+i)z+(2-i)u & = & 2i\end{array}\right. ,$$

on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{lcl}(2+i)z-iu & = & 2+i \\ (4+i)z & = & 3\end{array}\right. .$$

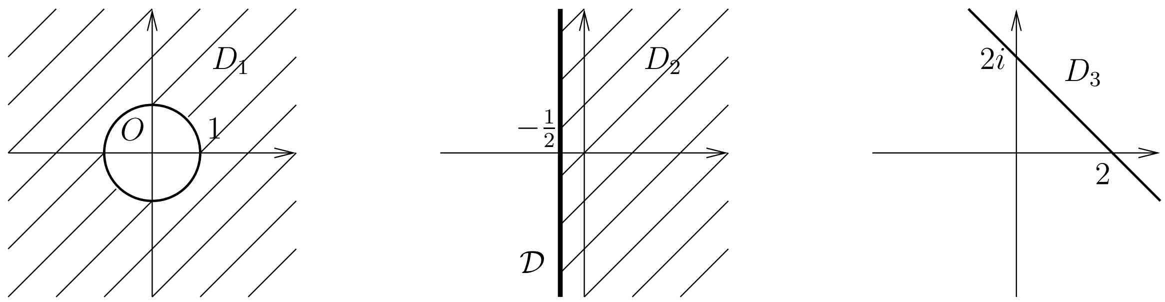
Ainsi $z = 3/(4+i) = \frac{12}{17} - \frac{3}{17}i$, et $u = (2+i)(1-z)/(-i) = \frac{-11}{17} + \frac{7}{17}i$.

Exercice 2. En utilisant la définition $|z|^2 = z\overline{z}$ et les propriétés de la conjugaison complexe, on obtient

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) - (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = 2u\overline{v} + 2v\overline{u} = 2(u\overline{v} + \overline{u\overline{v}}) = 4\mathrm{Re}(u\overline{v}).$$

Exercice 3.

- Si on note O le point d'affixe 0, D_1 est le complémentaire du disque fermé de centre O et de rayon 1.
- Comme $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, la condition définissant D_2 est équivalente à $\mathrm{Re}(z) > -1/2$. Si on note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = -1/2$, D_2 est donc le demi-plan situé à droite de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant exclue.
- Si on note $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, la condition définissant D_3 est équivalente à $2x+2y = 4$ soit $x+y = 2$. Il s'agit donc de la droite passant par les points de coordonnées $(0, 2)$ et $(2, 0)$, parallèle à la deuxième bissectrice.



Exercice 4.

1. Comme une valeur absolue est positive, $|\sin x| + |\cos x| = 0$ n'est possible que si $\sin x = \cos x = 0$. [*En effet, si* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *alors* $a+b \geq a \geq 0$ *; si* $a+b = 0$, *on en déduit que* $a = 0$, *puis que* $b = 0$ *par le même raisonnement.*] Or c'est impossible car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$. Donc il n'y a pas de solutions.

2. Comme $|\sin x|$ et $|\cos x|$ sont bornés par 1, $|\sin x|+|\cos x| \leq 2$, avec égalité si et seulement si $|\sin x| = |\cos x| = 1$. On en déduit que
$$\sin^2 x + \cos^2 x = |\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1.$$
Toujours à cause de l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, c'est impossible. Donc il n'y a pas de solutions.

3. On pose $X = \cos x$. L'équation s'écrit $2X^2 - 7X + 3 = 0$ dont les solutions sont $X = 3$ et $X = 1/2$. Comme $\cos x \leq 1$, $X = 3$ est impossible. L'équation de départ est donc équivalente à $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$. Soit $x = \pi/3\ [2\pi]$ ou $x = -\pi/3\ [2\pi]$.

Exercice 5.

1. $z^5 = (e^{2i\pi/5})^5 = e^{2i\pi} = 1$. Puisque $z \neq 1$ (car un argument de z est $0 < 2\pi/5 < 2\pi$), on a
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z^5 - 1)/(z - 1),$$
comme somme des termes d'une suite géométrique de raison z. D'où le résultat puisque $z^5 - 1 = 0$.

   Autre méthode : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, l'identité remarquable
$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = (x - 1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$
est très utile. On peut la démontrer par récurrence. Ou bien par un calcul direct dans le cas particulier $n = 5$, qui est celui qui nous intéresse ici.

2. En divisant l'identité $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ par $z^2 \neq 0$, on obtient $z^{-2}+z^{-1}+1+z+z^2 = 0$. Comme $u^2 = z^{-2} + z^2 + 2$, soit $z^{-2} + z^2 = u^2 - 2$, on en déduit que $(u^2 - 2) + u + 1 = 0$. Finalement $u^2 + u - 1 = 0$.

3. Les deux solutions de cette équation sont $u_1 = (-1 - \sqrt{5})/2 < 0$ et $u_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$. Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on a $\cos(2\pi/5) > 0$, puis $u = 2\mathrm{Re}(z) = 2\cos(2\pi/5) > 0$. On en déduit que $u = u_2$, puis que
$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

4. On utilise la formule $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$ pour $x = 2\pi/5$. Si $a \in \mathbb{R}^+$, une équation du type $y^2 = a$ possède deux solutions $y = \sqrt{a}$ et $y = -\sqrt{a}$, confondues si $a = 0$. Comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, on a $\cos(\pi/5) > 0$, donc il faut prendre la racine positive et
$$\cos(\pi/5) = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}, \quad \text{puis} \quad \cos(\pi/10) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{2}},$$
par la même méthode [*on a* $\cos(\pi/10) > 0$ *car* $0 < \pi/10 < \pi/2$].

   Autre méthode : On remarque que $\cos(\pi/5) = -\cos(4\pi/5) = 1 - 2\cos^2(2\pi/5)$. Soit
$$\cos(\pi/5) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$
qui est une simplification de la racine carrée ci-dessus.