Corrigé du devoir n° 4

Exercice 1.

1. Si $x > 0$, alors $\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin(\frac{1}{x})$ est bien défini, donc on peut s'intéresser à la limite en $+\infty$. On a
$$\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^3(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{1+2X+X^3}{4+3X+2X^2}\frac{\sin(X)}{X} =: f(X),$$
en posant $X := 1/x$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Quand $X \to 0$, $\frac{1+2X+X^3}{4+3X+2X^2}$ tend vers $\frac{1}{4}$, et $\frac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1. Par composition de limites, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = 1/4.$$

2. Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$. Alors $\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)}$ est bien défini donc on peut s'intéresser à la limite en 0 et
$$\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2}{1-\cos(x)^2} - \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{1}{1+\cos(x)},$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1}{2}$$
car cos est continue en 0 et $\cos(0) = 1$.

Exercice 2. Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. $f(x)$ est défini si et seulement si $1 - x \neq 0$ et $1 - x^2 \neq 0$ donc l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f est une somme d'inverses de fonctions continues ne s'annulant pas sur D_f donc f est continue sur D_f.

2. Soit $x \in D_f$. $f(x) = \frac{a-2+ax}{(1+x)(1-x)}$.
   - $\lim_{x\to-1}\frac{a-2+ax}{1-x} = -1$. Comme $\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{1+x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{1+x} = -\infty$, on obtient
   $$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$$
   - Si $a = 1$, $f(x) = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{1}{2}$.
   Si $a \neq 1$, $\lim_{x\to+1}\frac{a-2+ax}{1+x} = a - 1$. $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x} = -\infty$ et $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x} = +\infty$
   Si $a > 1$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$
   Si $a < 1$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

3.
   - f n'a pas de limite finie en -1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en -1, quelle que soit la valeur de a.
   - Si $a \neq 1$, f n'a pas de limite finie en 1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
   Si $a = 1$, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3.

- La condition sur f signifie que son graphe privé du point $(0, f(0))$ est compris entre les droites $y = kx$ et $y = -kx$. Comme f est enfermée dans cet entonnoir, on devine que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

- $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, 0 \leq |f(x)| \leq k|x|$. D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Or, f continue en 0 ssi $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Donc f continue en 0 ssi $0 = f(0)$.

Exercice 4.

- Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 0$ donc $f(x) = 0$ donc f est nulle donc continue sur $]1, +\infty[$.

- Si $0 < x \leq 1, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ donc $f(x) = nx$ (car $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ donc $E(\frac{1}{x}) = n$) donc f est continue sur chacun des intervalles $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. En particulier, on a $f(\frac{1}{n}) = 1$.

- Si $x > 1$, alors $f(x) = 0$ donc $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$ donc f n'est pas continue en 1.

- Si $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, alors $f(x) = nx$ donc $\lim_{x\to \frac{1}{n+1}^+} f(x) = \frac{n}{n+1} \neq 1 = f(\frac{1}{n+1})$ donc f n'est pas continue en $\frac{1}{n+1}$.

- Le même genre de travail montre que f est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}[$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais qu'elle n'est pas continue en $-\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- On peut prolonger f par continuité en 0. En effet, si $x \neq 0$, $E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1$ par définition de la partie entière donc $\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$ donc $1 - x < f(x) \leq 1$ si $x > 0$ ou $1 - x > f(x) \geq 1$ si $x < 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

Exercice 5.

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists B > 0, \forall x \geq B, f(x) \geq 1)$.
  $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ donc $\exists A < 0, \forall x \leq A, f(x) \leq -1)$
  $A < B$, f continue sur $[A, B]$, $f(A) < 0$ et $f(B) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]A, B[, f(c) = 0$.

- Quitte à changer le polynôme P en $-P$, P satisfait les conditions précédentes, c'est-à-dire $\lim_{x\to +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} P(x) = -\infty$ (car il est de degré impair) et P est continu sur $\mathbb{R}$ donc il admet une racine réelle.