Partiel de Mathématiques n° 2

Durée 1h. Documents et calculatrices interdits

Le 29 novembre 2003

Barême indicatif : 3,4,6,3,4

Question de cours. Démontrer en s'appuyant sur la définition de la limite, que si les fonctions f et g définies dans un voisinage d'un nombre réel x_0 (sauf peut être en x_0) admettent respectivement les limites finies l et l' quand x tend vers x_0, alors la fonction $f+g$ tend vers $l+l'$ quand x tend vers x_0.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{4+\sin 2x + \cos 3x}.$$

1. Déterminer son domaine de définition D. Montrer que pour tout $x \in D$ on a
$$0 \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$
2. Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel. Trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que
$$(x \in D,\ |x| < \alpha) \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$
Conclure en terme de limites.

Exercice 2.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}?$$
Peut on la prolonger par continuité en 0 ?
2. Déterminer
$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x),\ \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x).$$
3. La fonction
$$x \mapsto \frac{x}{|x|+\sin x}$$
a-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 3. Montrer que l'équation

$$x(\cos x)^9 + x^2 \sin x + 1 = 0$$

possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$. On énoncera avec soin le théorème utilisé.

Exercice 4. On considère la fonction définie par

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2.$$

1. Donner un encadrement de $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle $]1,2[$.
2. Déterminer le minimum et le maximum de $f(x)$ sur l'intervalle $[1,2]$. Déterminer l'ensemble $f([1,2])$. On énoncera avec soin les théorèmes utilisés.