# Feuille n° 1

## ÉCRITURES ALGÉBRIQUE ET TRIGONOMÉTRIQUE

**Exercice 1.** Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -i \quad ; \quad Z_2 = 1+i \quad ; \quad Z_3 = 2i(3+i)(1+i)$$
$$Z_4 = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(-1+i)(1+i)} \quad ; \quad Z_5 = \frac{(1+i)^4}{2+i} \quad ; \quad Z_6 = \frac{2+i}{1-i} + \frac{2i}{1+i}$$

**Exercice 2.** Placer sur le cercle trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = e^{i0} \quad ; \quad Z_2 = e^{i\pi/6} \quad ; \quad Z_3 = e^{i\pi/4} \quad ; \quad Z_4 = e^{i\pi/2}$$

**Exercice 3.** Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1+i \quad ; \quad 1-i\sqrt{3} \quad ; \quad -\sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

**Exercice 4.** Mettre sous forme algébrique, c'est-à-dire sous la forme $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad Z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad Z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$
$$Z_4 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad Z_5 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

## TRIGONOMÉTRIE

Le but des exercices suivants est de retrouver les formules usuelles de trigonométrie à partir des propriétés de l'exponentielle complexe. On rappelle les propriétés suivantes $(x,\, y \in \mathbb{R})$ :

$$|e^{ix}| = 1 \quad ; \quad e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad ; \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x\,.$$

**Exercice 5.** a) Montrer que $(e^{i\theta})^{-1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

b) Etablir les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Exercice 6.** a) Calculer $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction des sinus, cosinus et tangente de $x$ ou de $y$ ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$.

b) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ pour $x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 7.** En utilisant les formules d'Euler,

a) exprimer $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$ et $\cos a \sin b$ à l'aide de somme de cosinus et/ou sinus,

b) linéariser $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$.

**Exercice 8.** Etablir la formule de Moivre $(\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$ :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

**Exercice 9.** Calculer $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2003}$.

**Exercice 10.** Calculer $\cos(\pi/12)$. [*Développer* $\cos(x - y)$ *pour de « bonnes » valeurs de* $x$ *et* $y$.]

**Exercice 11.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan x = -1 \, .$$

**Exercice 12.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) .$$

## INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

**Exercice 13.** a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z/(z - 1) = i$. Donner la solution sous forme algébrique.

b) Soient $M$, $O$ et $A$ les points d'affixes respectives $z$, $0$, $1$ ; on suppose que ces trois points sont distincts. Interpréter géométriquement le module et un argument de $z/(z - 1)$ et retrouver la solution de l'équation du a).

★ **Exercice 14.** Trouver les nombres complexes $z$ tels que

$$a)\ \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \quad ; \quad b)\ \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}.$$

## ENSEMBLES

**Exercice 15.** On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ y > x^2 - 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ y < 1 - x^2\}$. Représenter graphiquement $A$, $B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement A$, $\complement B$, $\complement A \cup \complement B$ et $\complement(A \cap B)$. [*Tous les complémentaires sont pris ici dans* $\mathbb{R}^2$.] Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ \ldots\}$.

**Exercice 16.** Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. Exprimer $\complement(A \cap B)$ et $\complement(A \cup B)$ à l'aide de $\complement A$ et $\complement B$.

**Exercice 17.** Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide,

$$I_1 = \bigcup_{n=1}^{10} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \quad ; \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$$

$$I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [n, +\infty[ \quad ; \quad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[ \ .$$