Feuille n$^{\mathrm{o}}$ 4

Exercice 1. Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle indiqué :

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ sur $I = [-1, 0]$
2. $\sin(x) + 1 = x$ sur $I =]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et ne s'annulant pas sur I.

1. Montrer que
$$\forall x \in I, f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad \forall x \in I, f(x) < 0.$$
2. Dans le cas où $I = [a, b]$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, montrer que
$$\exists \lambda > 0, \forall x \in I, f(x) \geq \lambda.$$

Exercice 3. Trouver dans chacun des cas une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0)f(1) < 0$ et :

1. n'ayant qu'une seule racine en $x = \frac{1}{2}$
2. ayant 2 racines distinctes
3. ayant une infinité de racines

Un dessin du graphe de la fonction suffira.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire $\exists x \in [0, 1], f(x) = x$. Si on suppose de plus que f est décroissante, montrer que ce point fixe est unique. Qu'en est-il si f n'est pas décroissante ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes une infinité de fois.

Exercice 6. Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et étudier si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
- $g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$
- $h(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$
- $l(x) = \dfrac{|\sin(x)|}{x}$
- $m(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

Exercice 7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^2 + b$ si $x \leq 0$
- $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ si $x > 0$

Étudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.