

# Contrôle optimal et sous-optimal d'écoulement décollé par réduction de modèles POD.

Michel Bergmann, Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

LEMTA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)  
ENSEM - 2, avenue de la forêt de Haye  
BP 160 - 54504 Vandoeuvre cedex, France  
Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

## Résumé :

*Cette communication présente une synthèse des travaux réalisés par notre groupe sur le contrôle de l'écoulement de sillage laminaire en aval d'un cylindre circulaire. L'objectif est de démontrer, qu'il est possible, moyennant certaines précautions qui seront décrites, de résoudre un problème de contrôle d'écoulement par une procédure couplant contrôle optimal ou sous-optimal et un modèle réduit de dynamique construit par POD. Cette approche conduit à une réduction relative du coefficient de traînée moyen de l'ordre de 25 à 30% pour des coûts de calcul limités.*

## Abstract :

*This communication presents a synthesis of the work done by our group on the control of the circular cylinder wake in the laminar regime. The objective is to demonstrate that, with some care which will be described, a flow control problem can be solved by a procedure that couples an optimal or suboptimal control approach and POD reduced order models. This approach leads to a relative mean drag reduction of about 25 to 30 % for reduced numerical costs.*

## Mots-clefs :

**Contrôle optimal ; réduction de modèle ; POD ; méthode à région de confiance ; sillage ; cylindre circulaire ; traînée.**

## 1 Introduction

### 1.1 De l'intérêt de la réduction de modèles en contrôle d'écoulement

Ces dernières années, les industriels du domaine aéronautique et automobile ont apporté un regain d'intérêt au contrôle actif d'écoulements et à l'optimisation de formes aérodynamiques. Formellement, ces problèmes se ramènent à minimiser une fonction objectif  $\mathcal{J}$  (coefficient de traînée, concentration de polluant, bruit émis,...) en fonction de  $n$  paramètres  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$  (vitesse de soufflage/aspiration, flux de chaleur, paramètres de formes,...) sous certaines contraintes (équations de Navier-Stokes, contraintes géométriques,...). Grossièrement, les différentes méthodes de résolution existantes peuvent être classées en deux catégories, les *méthodes de type descente* qui nécessitent au minimum une approximation du gradient de la fonction objectif, et les *méthodes stochastiques* dont le principe consiste à étudier l'évolution d'une population d'individus au cours de générations successives (algorithme génétique, méthode du simplexe, ...). Quelle que soit l'approche envisagée, les coûts de calcul (CPU, mémoire) liés à ces méthodes de résolution sont tellement importants qu'elles deviennent inadaptées aux applications du contrôle actif en boucle fermée, pour lesquelles le contrôleur a besoin de déterminer son action en temps réel. Une alternative consiste à résoudre ces problèmes en décrivant la dynamique des phénomènes non plus par des modèles précis, mais coûteux en résolution, mais

par des modèles approchés dits réduits. En mécanique des fluides, la méthode actuellement la plus utilisée est la POD ou *Proper Orthogonal Decomposition*. Cette méthode, introduite en Turbulence par Lumley [1] afin d'extraire les Structures Cohérentes présentes au sein d'un écoulement turbulent, permet d'évaluer une base, optimale au sens de l'énergie, qui peut être utilisée par la suite pour construire par projection de Galerkin sur les équations du mouvement un modèle réduit de dynamique de l'écoulement contrôlé [2]. Finalement, ce modèle réduit remplace les équations de Navier-Stokes comme équation d'état lors de la résolution du problème d'optimisation par une méthode de contrôle optimal [3].

Cette communication présente une synthèse des travaux réalisés par notre équipe sur une configuration modèle d'écoulement décollé constituée par le sillage laminaire de l'écoulement en aval d'un cylindre de section circulaire (section 1.2). L'objet est de démontrer qu'il est possible, moyennant certaines précautions qui seront justifiées intuitivement (section 2) puis décrites (sections 3 et 4), de résoudre un problème de contrôle d'écoulement par une approche liant contrôle optimal et réduction de modèles par POD. Nos travaux ayant fait l'objet d'exposés détaillés au cours des différentes réunions d'avancement du GDR, nous avons choisi ici de limiter la présentation aux principes des méthodes de contrôle mises en œuvre ainsi qu'aux résultats les plus pertinents. De manière systématique, le lecteur sera prié de se référer à d'autres publications pour toutes les précisions, en particulier algorithmiques.

## 1.2 Configuration de l'étude

L'objectif général de l'étude est de contrôler le sillage instationnaire existant en aval d'un cylindre circulaire (figure 1). L'écoulement est considéré comme incompressible et le fluide est supposé visqueux et Newtonien.

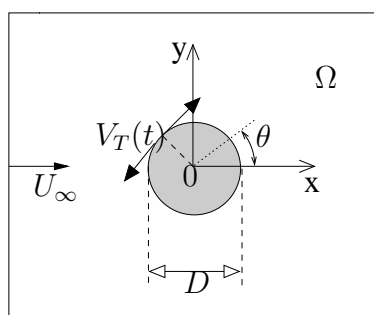


FIG. 1 – Représentation schématique de notre configuration d'écoulement contrôlé modèle.

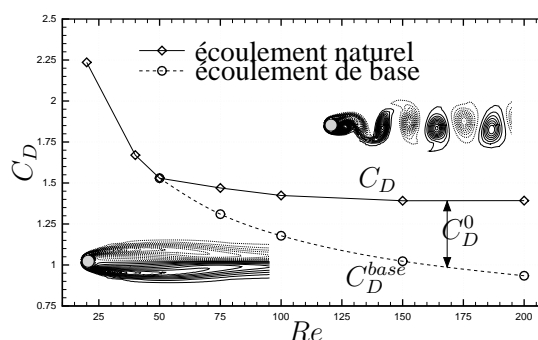


FIG. 2 – Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre l'écoulement naturel et l'écoulement de base stationnaire instable.

La dynamique d'un écoulement de sillage en régime laminaire est caractérisée [4] par son nombre de Reynolds  $Re$ , défini comme  $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$  où  $U_\infty$  est la vitesse à l'infini amont du cylindre,  $D$  son diamètre et  $\nu$ , la viscosité cinématique du fluide, et par son nombre de Strouhal  $St$  défini comme  $St = \frac{fD}{U_\infty}$  où  $f$  est la fréquence caractéristique du comportement périodique de l'écoulement (Fig. 2). Le contrôle de l'écoulement est exercé par rotation instationnaire

du cylindre autour de sa génératrice. Soient  $R$  le rayon du cylindre, et  $\dot{\theta}$  le taux de rotation instantané de celui-ci, on construit un paramètre de contrôle adimensionnel  $\gamma(t)$  comme le rapport de la vitesse tangentielle du cylindre  $V_T$  sur la vitesse à l'infini amont :

$$\gamma(t) = \frac{V_T(t)}{U_\infty} = \frac{R\dot{\theta}}{U_\infty}.$$

Pour  $\gamma = 0$ , l'écoulement sera dit non contrôlé. Soient  $A$ , l'amplitude, et  $St_f$ , le nombre de Strouhal de *forçage*, caractéristiques de l'écriture sous forme harmonique de la loi de contrôle  $\gamma$  :

$$\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t),$$

nous cherchons à déterminer les paramètres  $\mathbf{c} = (A, St_f)^T$  qui minimisent le coefficient de traînée moyen de l'écoulement, *i.e.*, à faire tendre l'écoulement vers la solution de base stationnaire instable (figure 2).

## 2 Résolution d'un problème d'optimisation par modèles réduits

### 2.1 Principe de la POD

Dans cette étude, nous avons fait le choix d'utiliser pour base réduite d'approximation de l'écoulement, une base déterminée par POD, en raison de son optimalité de convergence énergétique. Plus précisément, nous avons retenu un des avatars de la POD, la méthode des Snapshots dont le principe est le suivant. Partant de  $N$  réalisations de l'écoulement évaluées à des instants différents  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ , on détermine les valeurs et vecteurs propres  $\mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  de la matrice de corrélations des données, puis, on construit une nouvelle base ortho-normée par

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N w_i^j \mathbf{v}_j$$

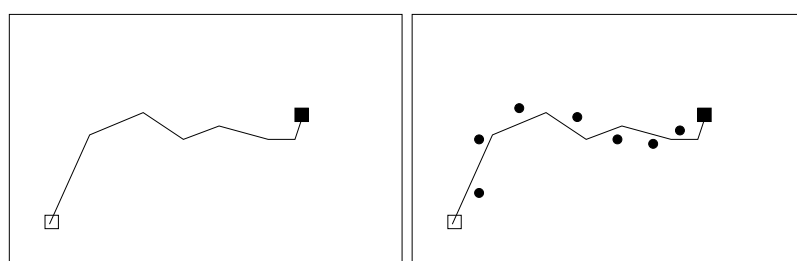
où  $w_i^j$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante du  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre  $\mathbf{w}_i$ . Par construction, les vecteurs propres  $V_{POD} = \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N\}$  sont rangés dans l'ordre décroissant en fonction de l'amplitude de la valeur propre associée. Si la décroissance des valeurs propres est suffisamment rapide, alors on peut choisir un sous-espace  $\{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n\}$  de  $V_{POD}$  comme espace  $V_{red}$  sur lequel réaliser la projection de la dynamique de l'écoulement. Pour que la base soit effectivement réduite, il faut que  $n \ll N$ .

### 2.2 Discussion générale

Les gains attendus par les approches par réduction de modèle reposent sur l'hypothèse qu'une réduction est *a priori* possible. Or, d'un point de vue de la théorie de l'information, la POD s'interprète comme une méthode qui supprime l'information redondante contenue dans l'ensemble des réalisations de la base de données utilisée pour construire la base réduite. En d'autres termes, une base POD est incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer.

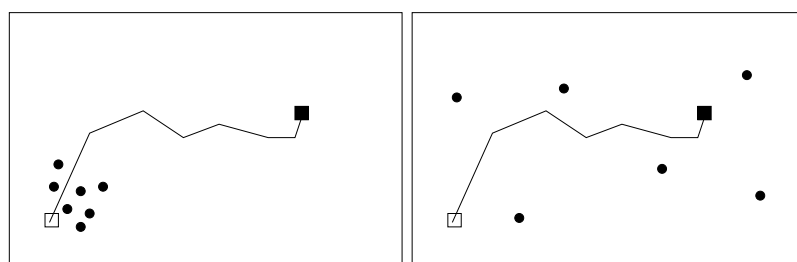
Une condition, nécessaire (mais pas suffisante), d'utilisation de modèles réduits construits par POD en contrôle d'écoulements repose donc sur la génération d'une "bonne" base de données. Idéalement, on aimerait construire une base de données qui contienne toute l'information nécessaire à la résolution ultérieure d'un problème d'optimisation par modèle réduit. A

défaut, on souhaiterait que cette base de données contienne autant d'information que possible. Mais le problème n'est pas simple. Pour s'en convaincre, considérons un problème d'optimisation quelconque posé dans l'espace des paramètres (figure 3(a)). En supposant connu le chemin qui mène à l'optimum avec le modèle précis, la construction de la base de données POD serait facile à réaliser, il suffirait pour cela de considérer des réalisations de l'espace des paramètres situées "suffisamment proches" du chemin vers l'optimum (figure 3(b)). Chacun des états successifs du processus d'optimisation pouvant alors être décrits par la base réduite, il existerait des garanties importantes pour que le modèle réduit construit sur  $V_{red}$  soit utilisable pour déterminer l'optimum. La difficulté pratique est que ce chemin n'est naturellement pas connu. Sans autre information sur le système à optimiser (et en particulier sur la valeur des paramètres optimaux que l'on recherche), il y a de forte probabilité qu'en prenant "au hasard" les réalisations de la base de données, celles-ci ne soient d'aucune utilité pour résoudre le processus d'optimisation (figures 3(c) et 3(d)).



(a) Configuration générale.

(b) Echantillonnage idéal.



(c) Echantillonnage inadapté.

(d) Echantillonnage inadapté.

FIG. 3 – Représentation schématique d'un problème d'optimisation dans l'espace des paramètres de contrôle. — chemin d'optimisation, conditions initiale  $\square$  et terminale  $\blacksquare$  du processus d'optimisation,  $\bullet$  réalisation utilisée pour la base de données.

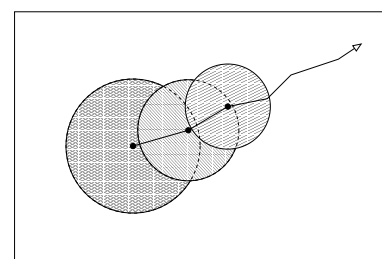


FIG. 4 – Représentation schématique de l'optimisation par méthode adaptative et région de confiance.

Dans ces conditions, comment procéder pour choisir "au mieux" les réalisations à utiliser pour construire la base réduite ? A l'heure actuelle, il n'existe pour ainsi dire pas de méthode systématique, rationnelle et efficace pour générer ces réalisations. Une façon de procéder consiste à exciter l'écoulement de manière *ad-hoc* afin de construire des réalisations qui possèdent la dynamique la plus "riche" possible. Cette méthode est mise en œuvre avec un certain succès à la section 3 et conduit à une solution sous-optimale. L'inconvénient est que la construction de la base de données ne repose sur aucune base théorique sérieuse. Une autre méthode consiste à utiliser une méthode adaptative par laquelle on construit pas à pas la solution optimale dans l'espace des paramètres de contrôle (figure 4). Ainsi, les contraintes sur la détermination des réalisations ne sont plus aussi fortes que précédemment car chaque base réduite ne doit plus représenter qu'une zone limitée de l'espace des paramètres. L'inconvénient est qu'il faut alors déterminer le moment où la base réduite n'est plus en mesure de représenter correctement le

modèle précis. Pour prendre en compte cette difficulté, nous utiliserons à la section 4 un algorithme dénommé TRPOD pour *Trust Region POD* [5] qui couple méthode d'optimisation à région de confiance et modèles réduits POD. La solution sera alors optimale.

### 3 Contrôle sous-optimal

La méthode d'optimisation mise en œuvre pour le contrôle sous-optimal est représentée de manière schématique sur la figure 5. Cette approche a fait l'objet de la publication [6] dans laquelle le lecteur pourra trouver de nombreux compléments.

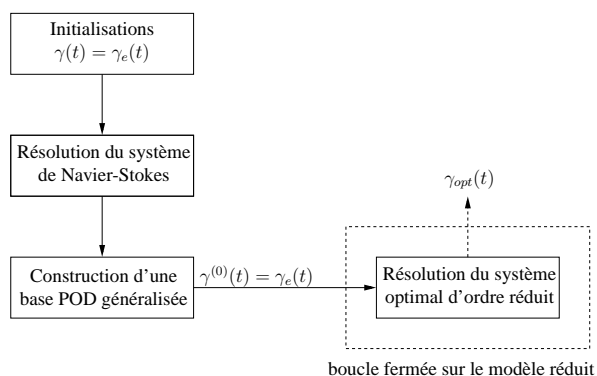


FIG. 5 – Représentation schématique de l'approche par contrôle sous-optimal.

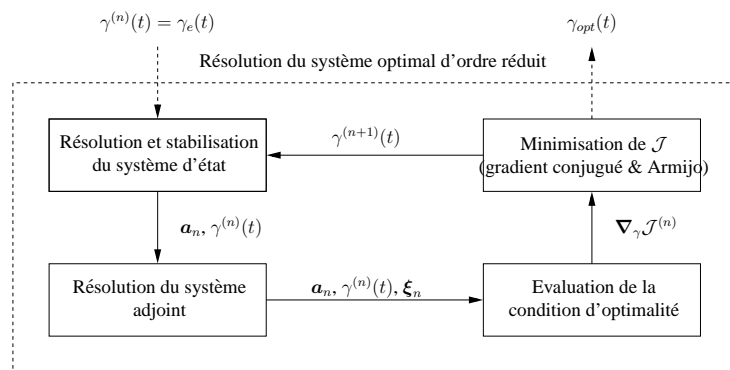


FIG. 6 – Représentation schématique de la résolution du système optimal.

Puisque la base POD n'est pas réactualisée au cours de la résolution du processus d'optimisation, le développement d'un modèle POD précis et robuste permettant en outre de décrire l'ensemble des dynamiques intermédiaires susceptibles d'être rencontrées devient capital. Pour cette raison, des fonctions de base POD  $\Phi_k$  dites généralisées ont été évaluées à partir d'une base de données obtenues après avoir imposé au cylindre une excitation temporelle  $\gamma_e$  *ad-hoc* décrite mathématiquement par l'expression :

$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi St_1 t) \times \sin(2\pi St_2 t - A_2 \sin(2\pi St_3 t))$$

où  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = 18$ ,  $St_1 = 1/120$ ,  $St_2 = 1/3$  et  $St_3 = 1/60$ .

Par ailleurs, le contrôle instationnaire étant appliqué aux frontières du cylindre, il est préférable [2] de décomposer le champ de vitesse sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  est le champ de vitesse moyen calculé par moyenne d'ensemble sur les  $N_{POD}$  réalisations de la base de données POD et où  $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$  est un champ de vitesse vérifiant des conditions aux limites homogènes sur le cylindre.

En outre, après projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les  $N_{gal}$  ( $\ll N_{POD}$ ) premiers modes POD, un modèle réduit de dynamique représentatif de la dynamique

contrôlée de l'écoulement est obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2. \end{aligned} \quad (2)$$

où les coefficients  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_{ij}$ ,  $\mathcal{C}_{ijk}$ ,  $\mathcal{D}_i$ ,  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{F}_{ij}$  et  $\mathcal{G}_i$  ne dépendent que de  $\Phi$ ,  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_c$  et du nombre de Reynolds  $Re$ .

En pratique, les équations (2) sont intégrées en temps par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à partir des conditions initiales

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, N_{gal} \quad (3)$$

ce qui donne des coefficients temporels  $a_i(t)$  de prédiction.

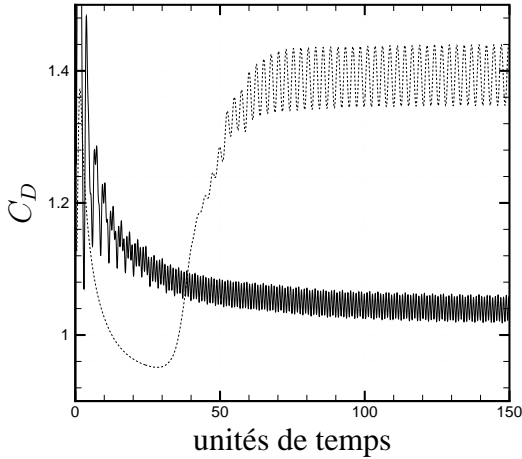


FIG. 7 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé (traits pleins) et dans le cas où le contrôle sous-optimal est appliqué (pointillés).

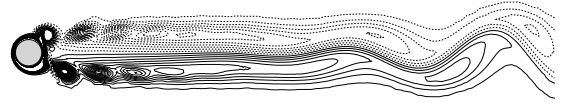


FIG. 8 – Iso-vorticités pour l'écoulement contrôlé ( $\gamma = \gamma_{sopt}$ ) à  $t = 150$ . Les lignes discontinues correspondent aux valeurs négatives.

Finalement, le champ de vitesse étant seul représenté dans la décomposition (1), il nous a été impossible de choisir pour fonctionnelle coût la traînée aérodynamique du cylindre. Par conséquent, nous avons minimisé sous contrainte du système d'état (2) l'instationnarité du sillage *i.e.* son énergie représentée mathématiquement par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \gamma(t)) = & \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_2^2 d\Omega dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma^2(t) dt \\ = & \frac{\alpha}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} (a_i(t))^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma^2(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Après des développements analytiques, ce problème de minimisation contraint conduit à un système optimal constitué par des équations d'état, des équations adjointes et des conditions d'optimalité, système que l'on résout de manière itérative comme il est indiqué sur la figure 6.

Après convergence du processus itératif, une loi de contrôle sous-optimale  $\gamma_{sopt}$  est obtenue. Cette loi s'écrit approximativement sous forme harmonique avec  $A = 2,2$  et  $St_f = 0,53$ . Lorsque cette loi de contrôle est introduite dans les équations de Navier-Stokes, plus de 25% de réduction relative de traînée est obtenue (figure 7). En comparaison avec la topologie de l'écoulement non contrôlé (figure 2) l'allée de Von-Kármán est fortement diminuée et l'écoulement tend à se symétriser (figure 8). Enfin, si ces résultats sont parfaitement comparables avec d'autres études utilisant pour équation d'état les équations de Navier-Stokes, l'intérêt de notre approche est que nos coûts de calcul (CPU et mémoire) sont négligeables devant les leurs, respectivement d'un facteur 100 et d'un facteur 600.

#### 4 Contrôle optimal par méthodes à région de confiance

La méthode d'optimisation mise en œuvre pour le contrôle optimal est représentée de manière schématique sur la figure 9. Par la suite, seul le principe des méthodes à région de confiance utilisant des fonctions modèles basées sur la POD sera présenté. Pour tous les détails et en particulier les preuves de convergence, le lecteur est prié de se référer à [5, 7].

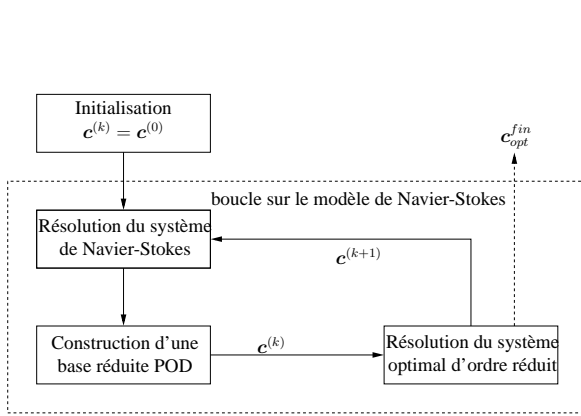


FIG. 9 – Représentation schématique de la méthode d'optimisation avec réactualisation de la base POD.

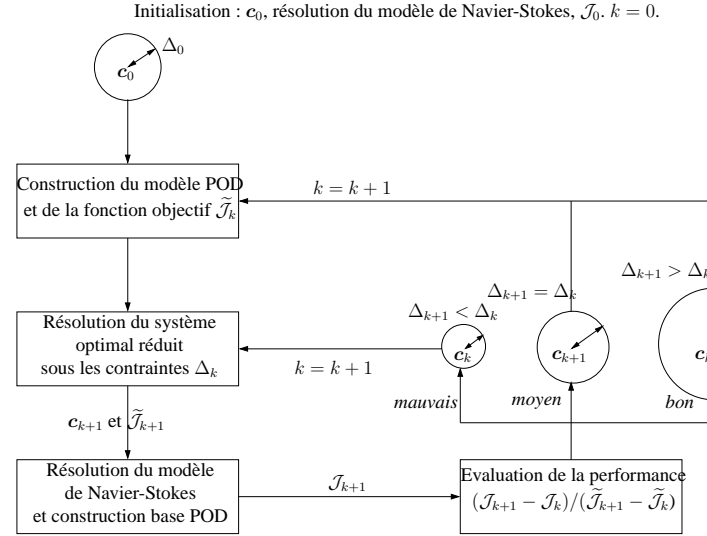


FIG. 10 – Schématisation de la méthode à région de confiance.

##### 4.1 Principe général

L'objectif est de résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) \quad (5)$$

avec  $\mathcal{J} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  et où  $\phi_{NS}(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^m$  représente les variables d'état obtenues par résolution numérique des équations du système. L'indice  $NS$  signifie que les équations

d'état qui relie les variables de contrôle  $\mathbf{c}$  aux variables d'état sont les équations de Navier-Stokes. Par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit, il est possible de reconstruire ces variables par utilisation d'une base POD. En notant  $\phi_{POD}$  ces variables, le problème (5) peut être remplacé par une suite de sous-problèmes de la forme

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (6)$$

Or, comme il a été discuté à la section 2.2, le modèle réduit de dynamique construit par POD ne représente la dynamique de l'écoulement contrôlé que sur une région limitée de l'espace des paramètres de contrôle dite *région de confiance*. Posons  $\Delta_k$ , le rayon de la région de confiance, et  $\mathbf{c}_k$ , les paramètres de contrôle obtenus pour un itéré  $k$ . Pour évaluer la fonction  $\mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$ , il est nécessaire de déterminer les variables  $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k)$ . Ces variables sont obtenues par résolution des équations de Navier-Stokes. Lors de cette résolution, il est possible d'extraire des réalisations (snapshots) de l'écoulement contrôlé, et ainsi de générer une base POD  $\{\Phi_i\}_{i=1, \dots, N_{POD}}^k$ . Cette base est utilisée pour construire un modèle d'ordre faible. L'intégration temporelle de ce modèle d'ordre faible permet de reconstruire les champs  $\phi_{POD}(\mathbf{c}_k)$ , et donc d'évaluer la fonction  $\mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$ . On définit ensuite la fonction

$$m_k(\mathbf{c}_{k+1}) = m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \tilde{\mathcal{J}}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) \quad (7)$$

comme fonction modèle de la fonction objectif

$$f(\mathbf{c}_{k+1}) = f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \quad (8)$$

à l'intérieur de la région de confiance  $\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k$ .

On est alors amené à résoudre le problème

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k. \quad (9)$$

Il faut ensuite évaluer la performance des nouveaux paramètres de contrôle  $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$  obtenus par résolution du problème (9). On compare ainsi la décroissance réelle de la fonction objectif,  $ared_k = f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) - f(\mathbf{c}_k)$ , à la décroissance prédite par la fonction modèle,  $pred_k = m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) - m_k(\mathbf{c}_k)$ . Si la décroissance de la fonction objectif est jugée bonne, en comparaison de celle obtenue par la fonction modèle, le pas  $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$  est accepté et le rayon de confiance est augmenté à l'itéré suivant. Si la décroissance est jugée moyenne, le pas est accepté et le rayon de confiance est maintenu. Enfin, si la décroissance est jugée mauvaise, le pas est refusé et le rayon de confiance est diminué. Afin d'évaluer la valeur de la fonction objectif au point  $\mathbf{c}_{k+1}$ ,  $f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$ , il est nécessaire de déterminer une nouvelle solution du modèle de précision,  $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$ . Un autre jeu de réalisations, qui correspond au nouveau contrôle  $\mathbf{c}_{k+1}$ , est disponible. Ce jeu sert alors à construire un nouveau modèle réduit, qui est représentatif de la dynamique modifiée par application des paramètres de contrôle  $\mathbf{c}_{k+1}$ . L'ensemble de la procédure est résumé sur la figure 10.

## 4.2 Application à la réduction de traînée d'un cylindre circulaire

Contrairement à ce qui avait été réalisé à la section 3, où l'instationnarité du sillage était la fonctionnelle objectif à minimiser, ici nous avons considéré pour fonctionnelle coût la traînée aérodynamique du cylindre. Afin de simplifier les notations futures, on introduit donc l'*opérateur de traînée*  $\mathcal{C}_D$  comme :



$$\mathcal{C}_D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U} \mapsto 2 \int_{\Gamma_c} \left( pn_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = C_D(t), \quad (10)$$

où  $\mathbf{U} = (u, v, p)^T$  est le champ vectoriel correspondant aux variables de vitesse et de pression et  $C_D$ , le coefficient de traînée instationnaire. Dans cette approche, puisqu'il est nécessaire de pouvoir reconstruire les variables  $u$  et  $p$  à l'aide d'un modèle d'ordre réduit basé sur la POD, nous avons étendu [7] la base POD  $\Phi_i$  à la pression  $p$ . Par ailleurs, afin d'améliorer la robustesse du modèle réduit de dynamique, la base propre POD déterminée pour un paramètre de contrôle  $\mathbf{c}$  donné, a été augmentée en ajoutant  $N_{neq}$  modes de non-équilibre, suivant en cela la procédure décrite dans [8]. Les champs de vitesse et de pression peuvent alors se décomposer sur la base propre POD comme :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}, \quad (11)$$

où  $\mathbf{U}_c$  généralise la fonction de contrôle  $\mathbf{u}_c$  introduite à la section 3. Compte tenu du développement (11), le système dynamique POD d'ordre réduit devient :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t). \end{aligned} \quad (12)$$

En notant  $\phi_{NS}(\mathbf{c}) = (u_{NS}, v_{NS}, p_{NS})^T$  et  $\phi_{POD}(\mathbf{c}_{POD}) = (u_{POD}, v_{POD}, p_{POD})^T$ , la fonction objectif est

$$f(\mathbf{c}) = \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(\phi_{NS}(\mathbf{c})) dt,$$

et la fonction objectif modèle, introduite et justifiée dans [7], est

$$m_k(\mathbf{c}) = \tilde{\mathcal{J}}(\phi_{POD}(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i dt,$$

où  $N_i = C_D(\Phi_i)$ .

Pour résoudre le sous-problème d'optimisation (9), le plus simple consiste à résoudre le système optimal construit à l'aide du modèle réduit de dynamique POD défini par (12).

### 4.3 Résultats numériques et observations

Afin d'évaluer la robustesse de cette méthode, différents paramètres de contrôle initiaux,  $\mathbf{c}_0 = (A; St)$ , ont été utilisés. La figure 11 représente pour  $\mathbf{c}_0 = (1, 0; 0, 2)$ , les évolutions

des valeurs de la fonction objectif au cours du processus d'optimisation. La figure 12 montre la convergence du processus dans l'espace des paramètres de contrôle. Quels que soient les paramètres de contrôle initiaux utilisés, les paramètres de contrôle obtenus numériquement ( $A = 4, 25$  et  $St_f = 0, 738$ ) convergent vers les paramètres de contrôle optimaux, ce qui prouve la performance et la robustesse de la méthode. La réduction relative du coefficient de traînée moyen est égale à 30% (figure 13). En outre, que ce soit pour la valeur du coefficient de traînée de l'écoulement contrôlé ou la dynamique de la vorticité (figure 14), l'écoulement contrôlé par la loi optimale se comporte comme l'écoulement de base stationnaire instable.

L'intérêt de l'utilisation de méthodes à région de confiance est l'existence de preuves mathématiques de la convergence des paramètres de contrôle obtenus sur le modèle réduit vers les paramètres de contrôle optimaux du système Navier-Stokes. En outre, cette méthode permet de réduire considérablement les coûts de calcul. Ainsi, le stockage mémoire est réduit d'un facteur 600 et le temps de calcul d'un facteur 4, permettant ainsi de s'intéresser à des configurations complexes, tant du point de vue de la géométrie que de la dynamique.

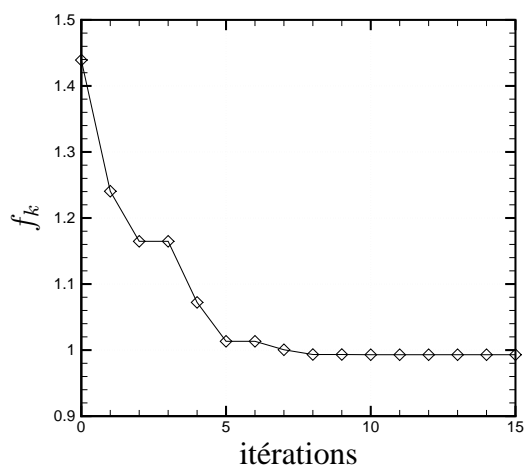


FIG. 11 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales :  $A = 1, 0$  et  $St = 0, 2$ .

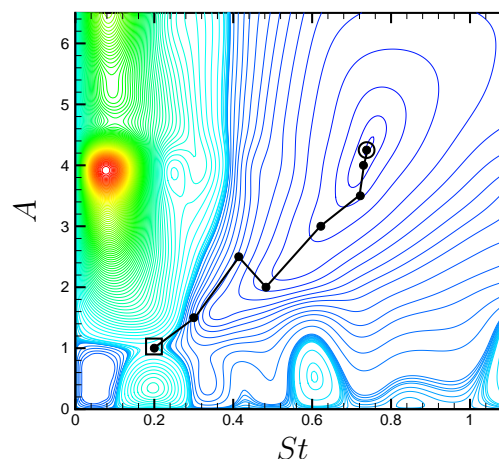


FIG. 12 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan  $(A, St)$ . Conditions initiales :  $A = 1, 0$  et  $St = 0, 2$ .

## 5 Conclusion

Nous avons montré, sur une configuration modèle d'écoulement décollé, qu'il était possible, moyennant certaines précautions qui ont été décrites, de résoudre un problème de contrôle d'écoulement par une approche liant contrôle optimal et réduction de modèles par POD. Sans nul doute, ce type d'approche est une des technologies clés qui permettra, dans un futur proche, de s'intéresser au contrôle actif en boucle fermée d'écoulements complexes.

## Références

- [1] J.L. Lumley. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation. The structure of inhomogeneous turbulence*, pages 166–178. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, 1967.
- [2] L. Cordier and M. Bergmann. Two typical applications of POD : coherent structures educ-

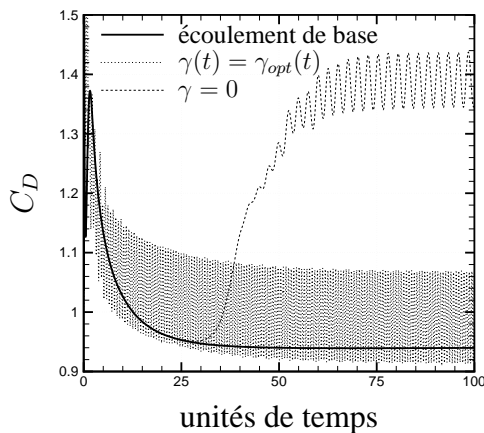


FIG. 13 – Evolution temporelle des coefficients de traînée.

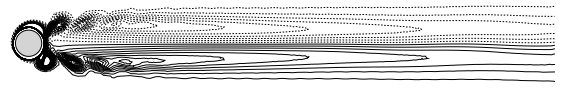


FIG. 14 – Iso-vorticités pour l'écoulement contrôlé ( $\gamma = \gamma_{opt} = A \sin(2\pi St_f t)$ ,  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,738$ ).

tion and reduced order modelling. In *Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002.

- [3] M.D. Gunzburger. Introduction into mathematical aspects of flow control and optimization. In *Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997a.
- [4] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 28 :477–539, 1996.
- [5] M. Fahl. *Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling*. PhD thesis, université de Trier, 2000.
- [6] M. Bergmann, L. Cordier, and Brancher J.-P. Optimal rotary control of the cylinder wake using POD Reduced Order Model. *Phys. Fluids*, 17(9), 2005.
- [7] M. Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004.
- [8] B.R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzyński, G. Tadmor, and F. Thiele. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 497 :335–363, 2003.