

# Contrôle optimal par réduction de dynamique du sillage d'un cylindre circulaire

Michel Bergmann, Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

`Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr`

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre Cedex, France



# Plan de l'exposé

I - Configuration et méthodes de résolutions numériques

II - Contrôle optimal

III - Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre (ROM)

V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

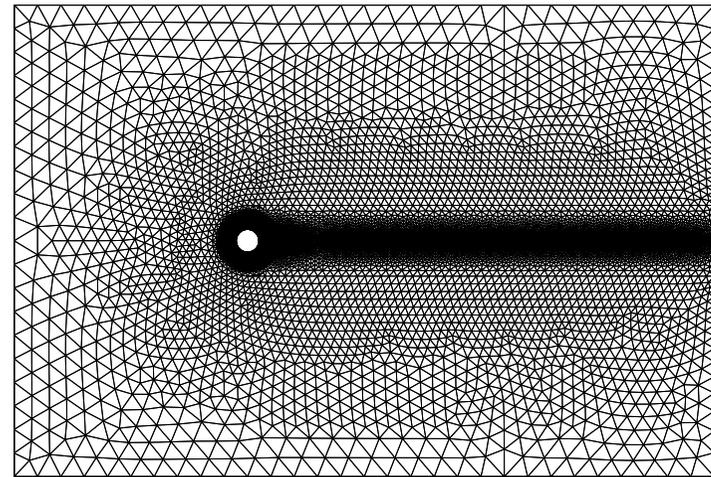
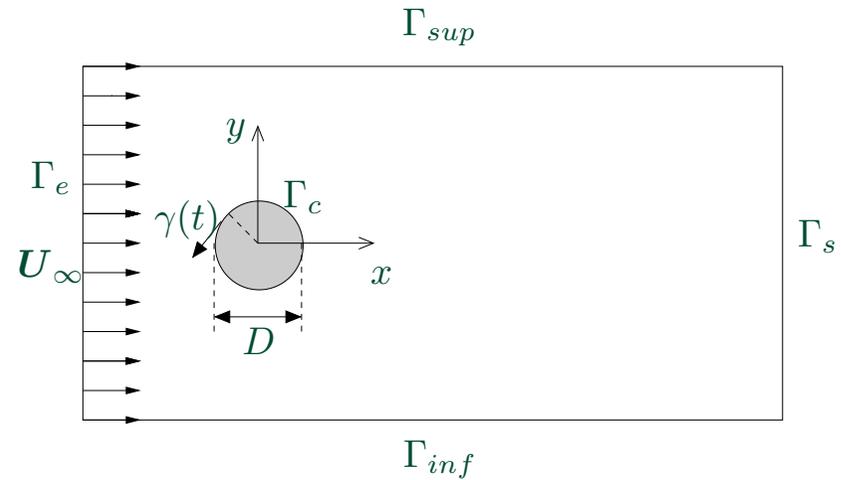
VI - Résultats

Conclusions et perspectives

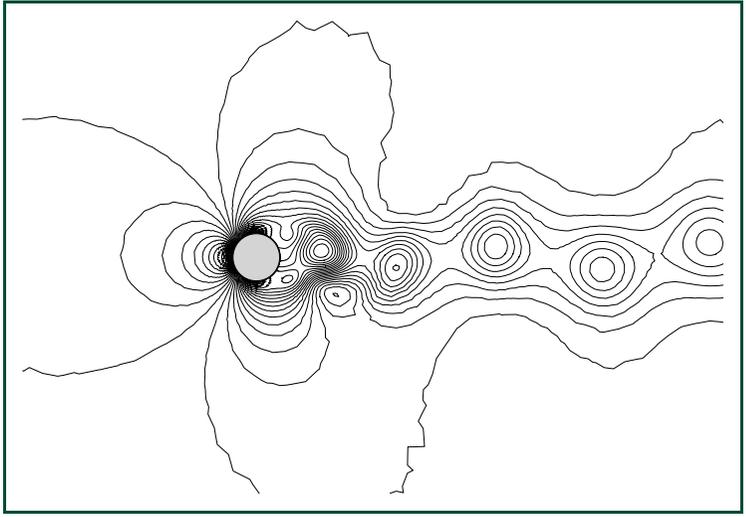


# I - Configuration et méthodes de résolutions numériques

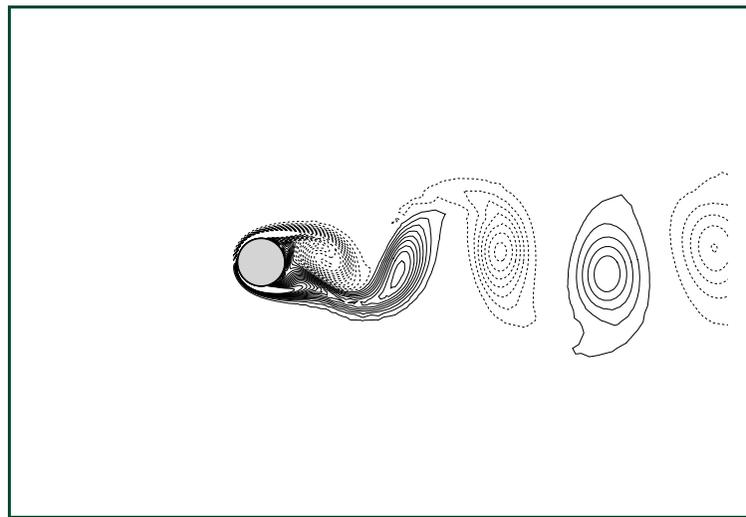
- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à  $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Oscillations du cylindre à une vitesse tangentielle  $\gamma(t)$
- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis ( $P_1, P_1$ ) en espace



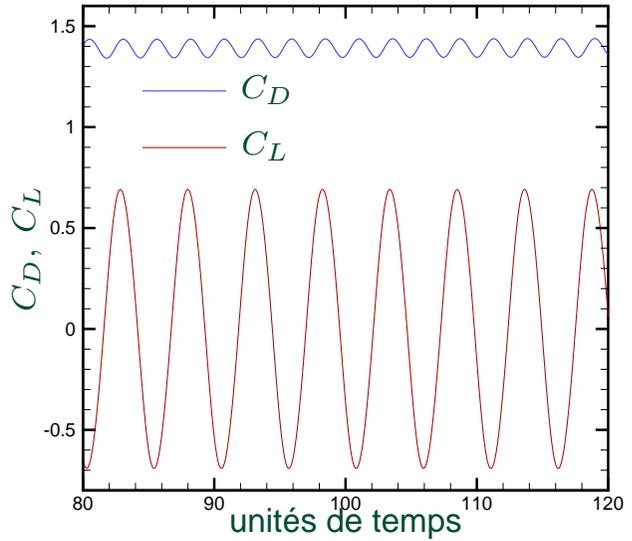
# I - Configuration et méthodes de résolutions numériques



Isobares à  $t = 100$ .



Iso-contours de vorticité à  $t = 100$ .



Coefficients aérodynamiques.

Auteurs	$S_t$	$C_D$
Braza <i>et al.</i> (1986)	0.2000	1.4000
Henderson <i>et al.</i> (1997)	0.1971	1.3412
He <i>et al.</i> (2000)	0.1978	1.3560
<b>Présente étude</b>	<b>0.1983</b>	<b>1.3972</b>

Nombres de Strouhal et coefficient de traînée.



## II - Contrôle Optimal *Définition*

Méthode mathématique permettant de déterminer **sans empirisme** une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

- Equations d'état  $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$  ;  
(Navier-Stokes + C.I. + C.L.)
- Variables de contrôle  $c$  ;  
(Soufflage/aspiration, paramètres de forme ...)
- Fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}(\phi, c)$ .  
(Traînée, portance, ...)

*Déterminer les variables de contrôle  $c$  et les variables d'état  $\phi$  telles que la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}(\phi, c)$  soit minimale ou maximale sous les contraintes  $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$ .*



## II - Contrôle Optimal *Multiplicateurs de Lagrange*

Optimisation avec contraintes  $\Rightarrow$  optimisation sans contraintes

► Introduction de multiplicateurs de Lagrange  $\xi$ .

► Fonctionnelle de Lagrange :

$$\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle \mathcal{F}(\phi, c), \xi \rangle$$

► Il faut rendre  $\mathcal{L}$  "stationnaire", on cherche donc  $\delta\mathcal{L} = 0$  :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$$

► On suppose  $\phi$ ,  $c$  et  $\xi$  indépendantes :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$$



## II - Contrôle Optimal *Système optimal*

- ▶ Equations d'état ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0$ ) :

$$\mathcal{F}(\phi, c) = 0$$

- ▶ Equations adjointes ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = 0$ ) :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right)^* \xi = \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^*$$

- ▶ Conditions d'optimalité ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = 0$ ) :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right)^* = \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} \right)^* \xi$$

⇒ Assure un minimum local

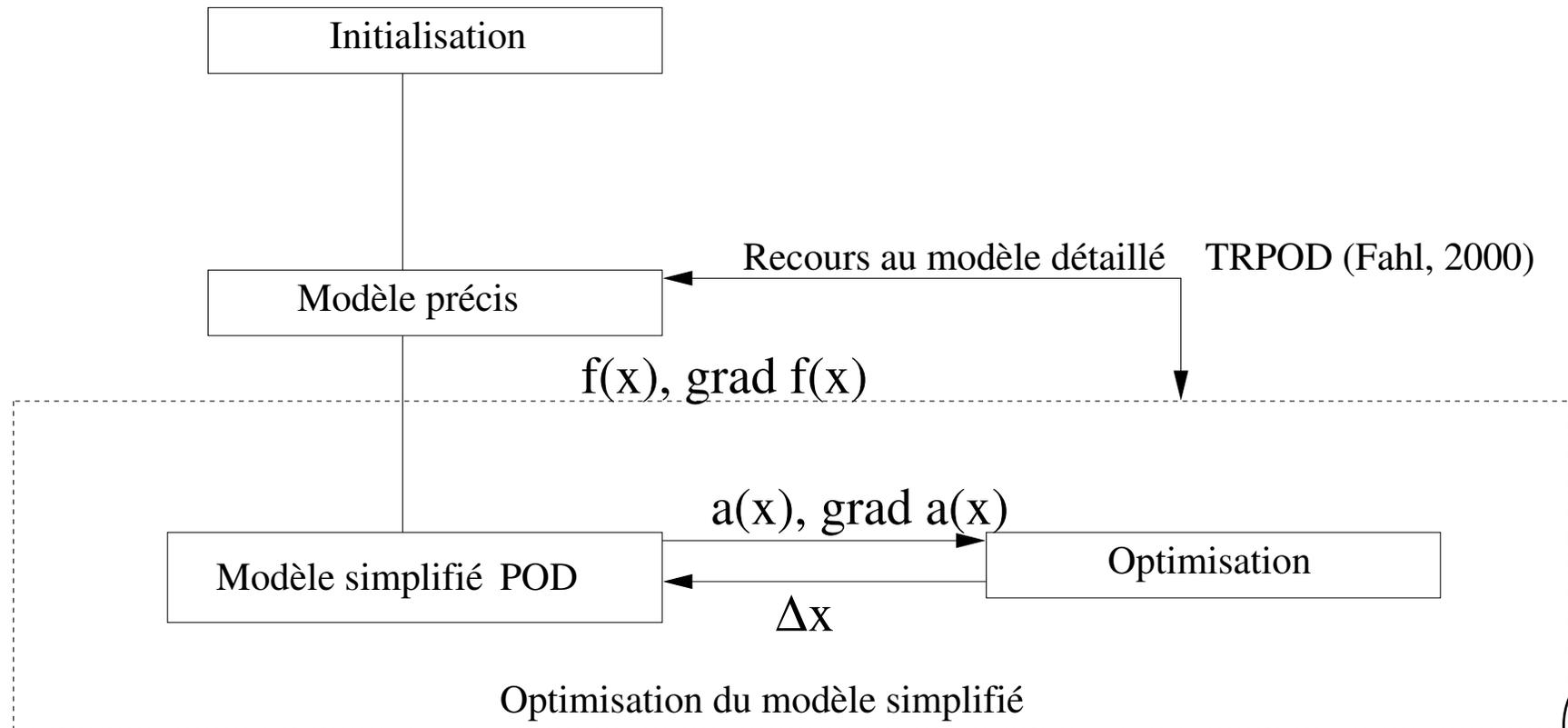
⇒ Méthode de résolution coûteuse en temps CPU  
et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !



## II - Contrôle Optimal *Réduction de modèle*

"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computation, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000



# III - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

► Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

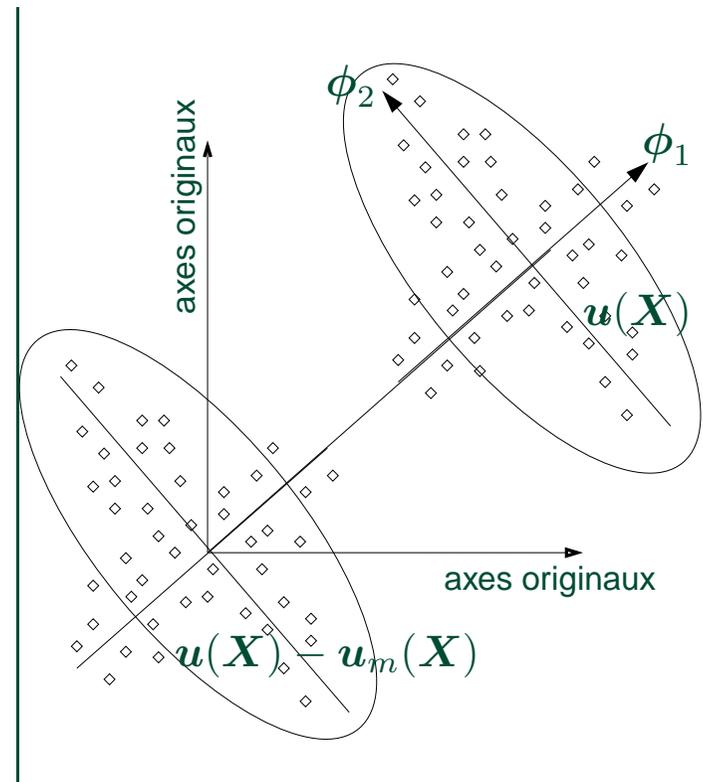
► Rechercher la réalisation  $\phi(\mathbf{X})$  "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ . ( $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$ )

►  $\phi(\mathbf{X})$  solution du problème :

$$\max_{\phi} \frac{\langle |(\mathbf{u}, \phi)|^2 \rangle}{\|\phi\|^2}.$$

► Convergence optimale en norme  $L^2$  (énergie) de  $\phi(\mathbf{X})$

⇒ réduction de dynamique envisageable.



---

Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.



# III - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \phi_j^{(n)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda^{(n)} \phi_i^{(n)}(\mathbf{X}) \quad n = 1, \dots, N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') : \text{tenseur des corrélations spatio-temporelles.}$

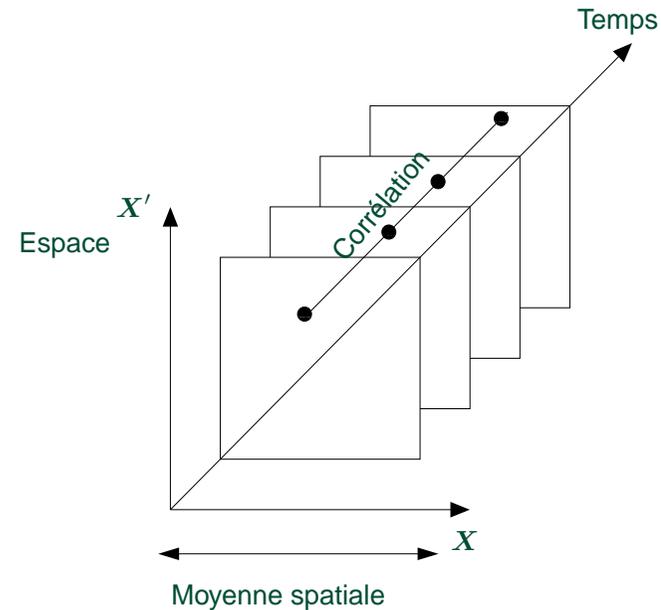
- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t, t') a^{(n)}(t') dt' = \lambda^{(n)} a^{(n)}(t)$$

$\hookrightarrow C(t, t') : \text{corrélations temporelles.}$

- $\phi(\mathbf{X})$  base de l'écoulement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \phi^{(n)}(\mathbf{x}).$$



Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N° 3, pp. 561–571.



## IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Projection de Galerkin de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left( \phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left( \phi^{(i)}, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned} \left( \phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \left( p, \nabla \cdot \phi^{(i)} \right) - \frac{1}{Re} \left( (\nabla \otimes \phi^{(i)})^T, \nabla \otimes \mathbf{u} \right) \\ &\quad - [p \phi^{(i)}] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \phi^{(i)}]. \end{aligned}$$

avec  $[a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$  et  $(A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega$ .



# IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Décomposition de la vitesse sur  $N_{POD}$  modes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a^{(k)}(t) \phi^{(k)}(\mathbf{x}).$$

- Système dynamique avec  $N_{gal}$  modes retenus (équations d'état) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d a^{(i)}(t)}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a^{(j)}(t) a^{(k)}(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma}{dt} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)}(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2 \\ a^{(i)}(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \phi^{(i)}(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

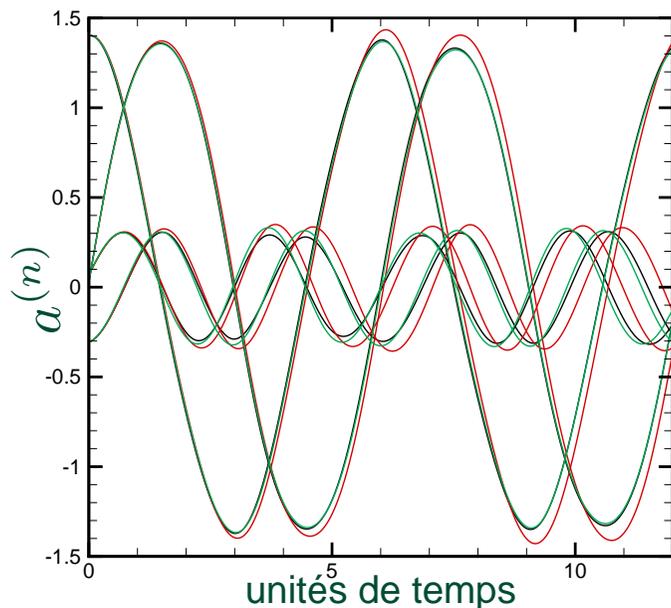
$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$  et  $\mathcal{G}_i$  dépendent de  $\phi, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_c$  et  $Re$ .



# IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre *Stabilisation*

Intégration et stabilisation (optimale) du modèle dynamique d'ordre réduit pour  $\gamma = A \sin(2\pi S_t t)$ ,  $A = 2$  et  $S_t = 0,5$ .

Erreurs de reconstruction POD  $\Rightarrow$  amplification des modes



*Evolution temporelle des 6 premiers modes propres temporels.*

## ► Causes :

- extraction des grosses structures porteuses de l'énergie
- dissipation dans petites structures

## ► Solution :

- Ajout de façon optimale d'une viscosité artificielle sur chaque mode

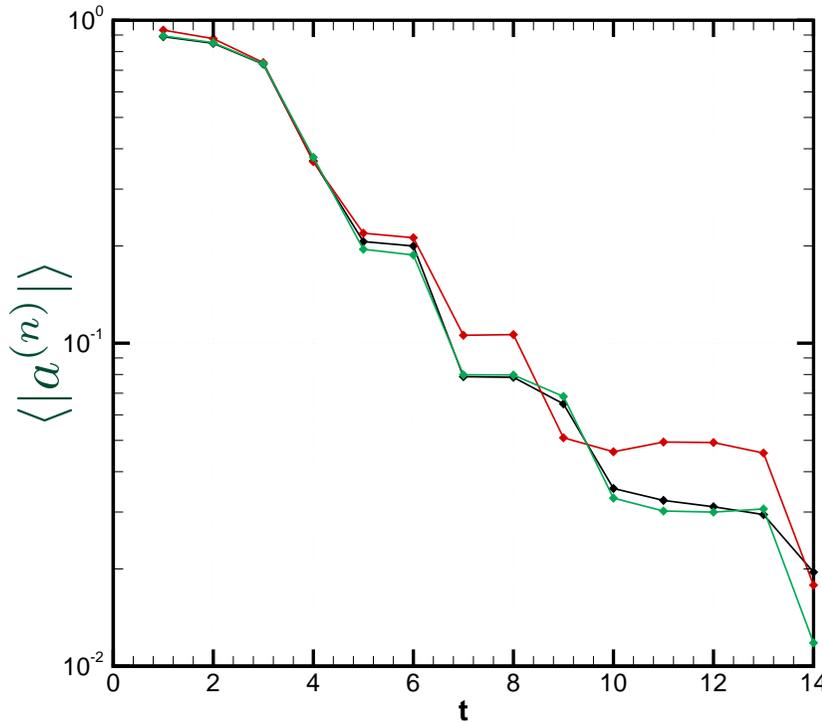
projection (Navier Stokes)

prédiction avant stabilisation (modèle d'ordre faible)

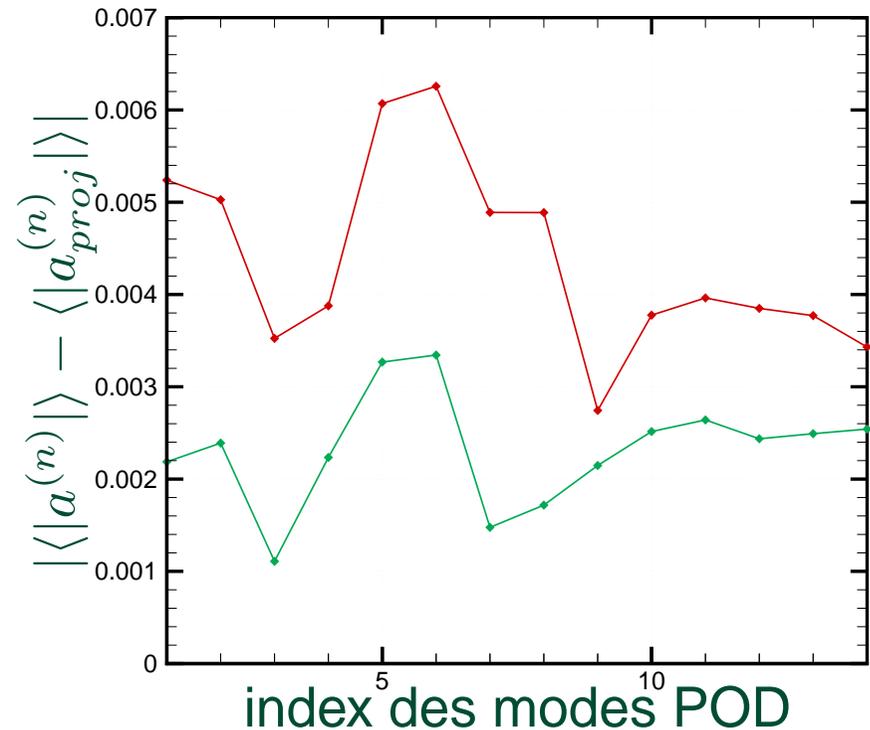
prédiction après stabilisation (modèle d'ordre faible).



# IV - Modèle réduit de la dynamique du cylindre *Stabilisation*



Comparaison des spectres énergétiques.



Comparaison des erreurs absolues.

- ▶ Recouvrement du spectre énergétique DNS par POD
- ▶ Diminution de l'erreur de reconstruction entre modes prédits (POD) et projetés (DNS)

⇒ Validation modèle réduit POD



# V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

- Fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^{N_{gal}} a^{(i)2} + \frac{\alpha}{2} \gamma(t)^2 \right) dt.$$

$\alpha$  : paramètre de régularisation (pénalisation).

- Equations adjointes :

$$\begin{cases} \frac{d\xi^{(i)}(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left( \mathcal{B}_{ji} + \gamma \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a^{(k)} \right) \xi^{(j)}(t) - 2a^{(i)} \\ \xi^{(i)}(T) = 0. \end{cases}$$

- Condition d'optimalité :

$$\delta\gamma(t) = - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi^{(i)}}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)} + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi^{(i)} + \alpha \gamma(t).$$



# V - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

►  $\gamma^{(0)}(t)$  fixé ; Pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  et tant que critère de convergence non vérifié Faire :

1. Résolution de 0 à  $T$  des équations d'état avec  $\gamma^{(n)}(t)$  ;

↔ *variables d'état*  $a^{(n)}(t)$

2. Résolution de  $T$  à 0 des équations adjointes avec  $a^{(n)}(t)$  ;

↔ *variables adjointes*  $\xi^{(n)}(t)$

3. Résolution des conditions d'optimalité avec  $a^{(n)}(t)$  et  $\xi^{(n)}(t)$  ;

↔ *gradient de la fonctionnelle objective*  $\delta\gamma^{(n)}(t)$

4. Nouveau contrôle ↔  $\gamma^{(n+1)}(t) = \gamma^{(n)}(t) + \omega^{(n)} \delta\gamma^{(n)}(t)$

► Fin Faire.



## VI - Résultats Généralités

► Pas de réactualisation de la base POD.

► Représentativité énergétique *a priori* différente de représentativité dynamique :

↪ inconvénient possible pour le contrôle.

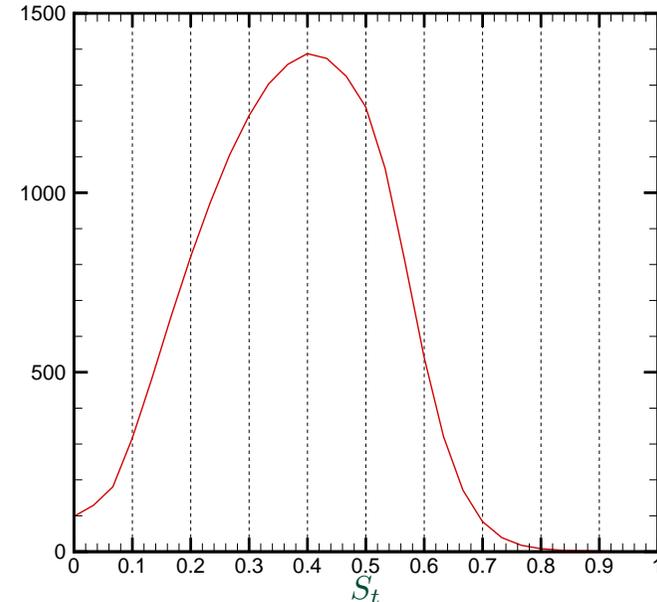
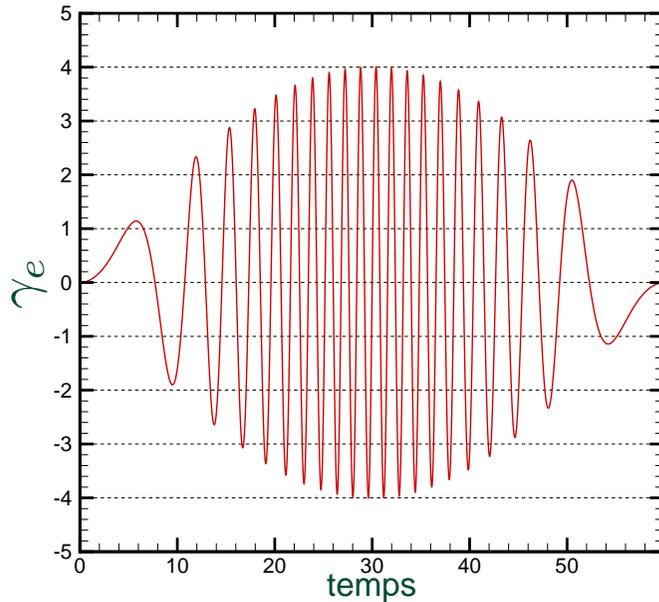
↪ un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer.

► Construction d'une base POD généralisée représentative d'une plus large gamme de dynamique :

↪ *excitation d'un plus grand nombre de degrés de liberté par balayage en amplitudes et en fréquences de  $\gamma(t)$ .*



# VI - Résultats *Excitation*



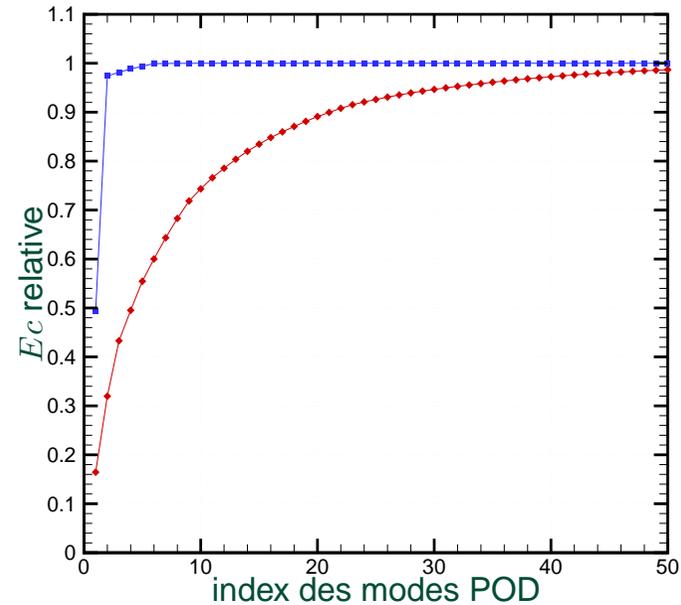
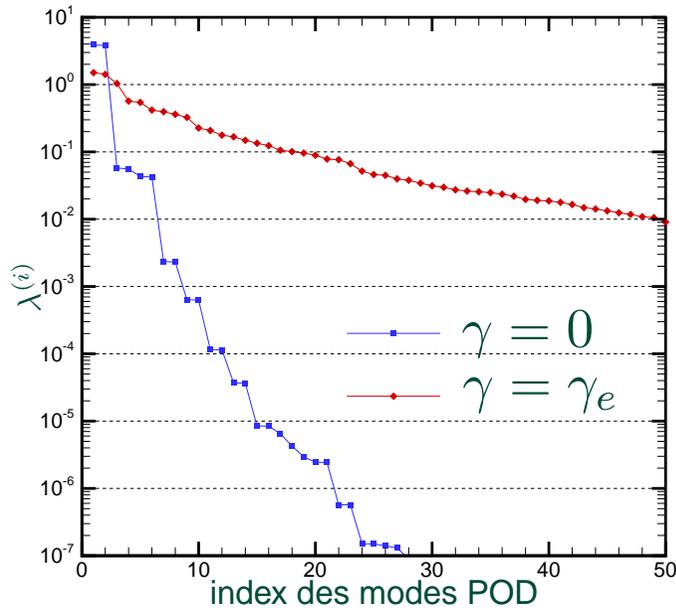
$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi S_{t1} t) \times \sin(2\pi S_{t2} t - A_2 \sin(2\pi S_{t3} t))$$

avec  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = 18$ ,  $S_{t1} = 1/120$ ,  $S_{t2} = 1/3$  et  $S_{t3} = 1/60$ .

- ▶  $0 \leq \text{amplitudes} \leq 4$  et analyse de Fourier  $\Rightarrow 0 \leq \text{fréquences} \leq 0.65$
- ▶  $\gamma_e$  loi de contrôle initiale dans processus itératif.



# VI - Résultats *Energie*



► **Cylindre stationnaire  $\gamma = 0$  :**

↪ *2 modes sur 100 suffisent pour représenter 97% de l'énergie.*

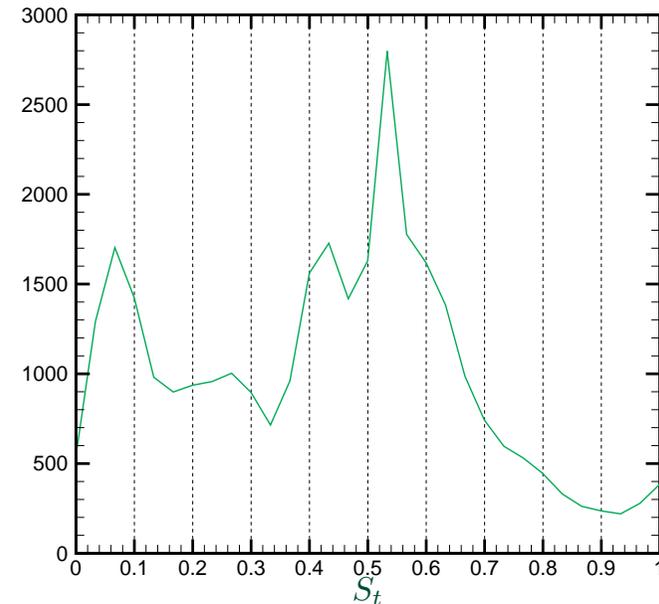
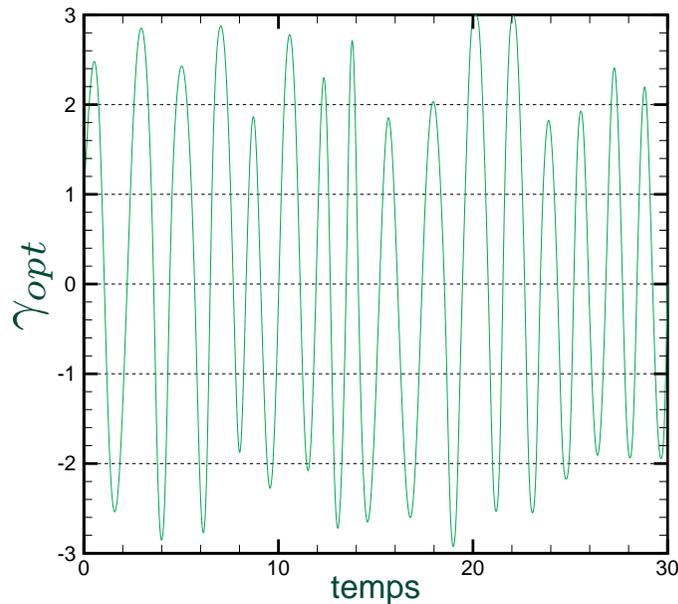
► **Cylindre excité  $\gamma = \gamma_e$  :**

↪ *40 modes sur 100 sont nécessaires pour représenter 97% de l'énergie*

⇒ *Evolution de la robustesse p.r. aux évolutions dynamiques.*



# VI - Résultats *Contrôle optimal*



- Diminution très importante de l'instationnarité du sillage.

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 9,81 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\gamma_{opt}) = 5,63.$$

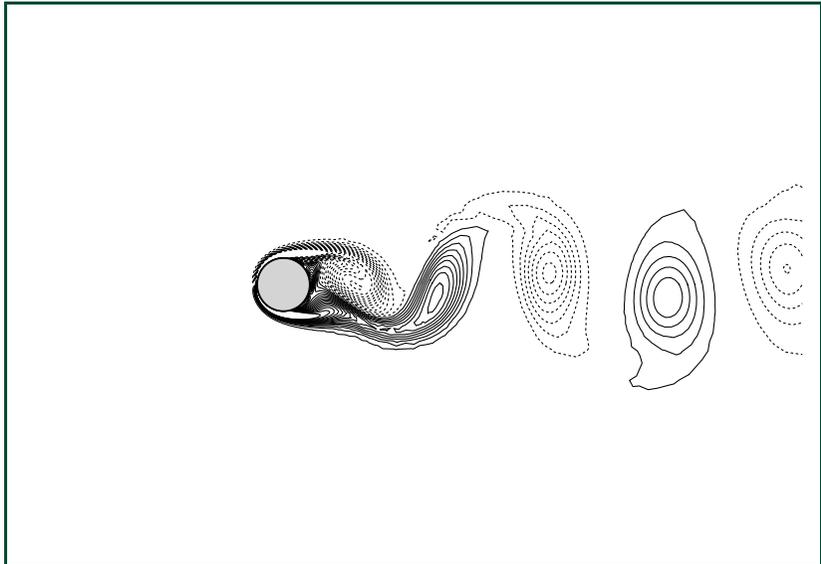
$$\gamma_{opt} \simeq A \sin(2\pi S_t t) \text{ avec } A = 2,2 \text{ et } S_t = 0,53$$

- Le contrôle est optimal pour le système POD ROM.
- Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

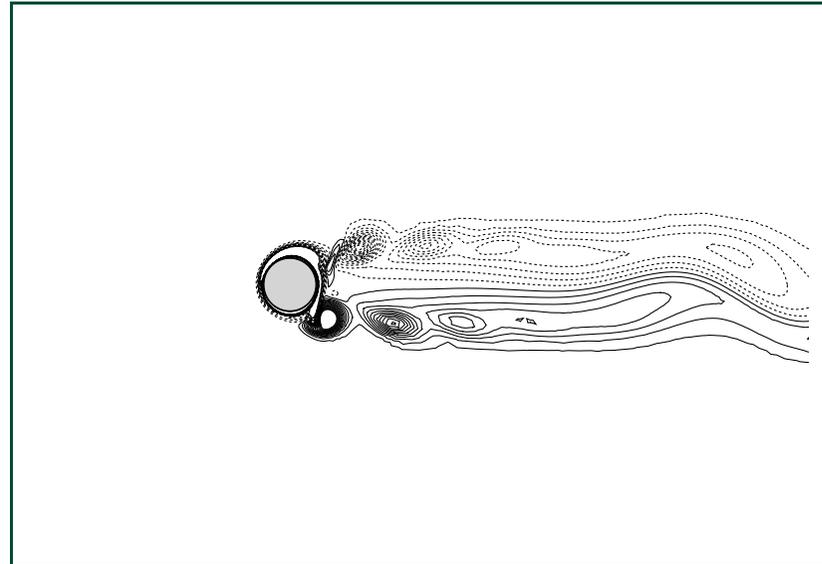


## VI - Résultats *Comparaison des structures du sillage*

- ▶ Aucune preuve mathématique d'optimalité pour Navier-Stokes.



a) cylindre stationnaire  $\gamma = 0$



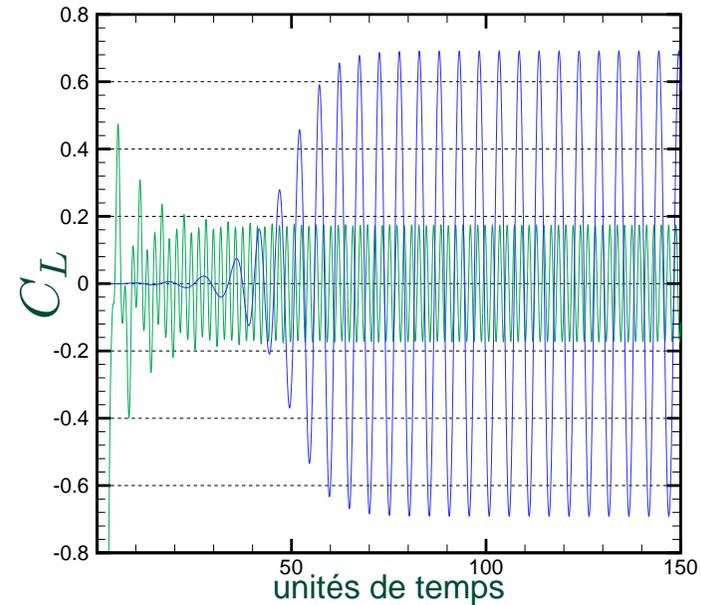
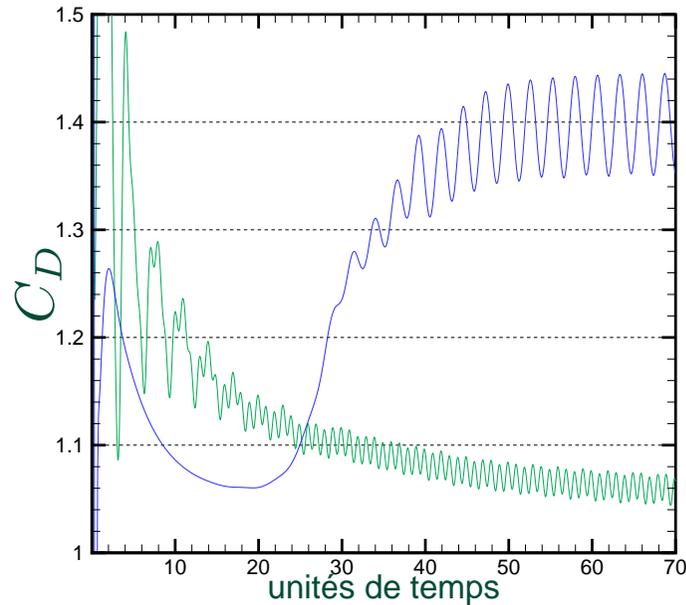
b) cylindre contrôlé  $\gamma = \gamma_{opt}$

*Isocontours de vorticité  $\omega_z$ .*

- ▶ Cylindre stationnaire :  $\gamma = 0 \Rightarrow$  Sillage asymétrique.
  - $\hookrightarrow$  Grosses structures porteuses d'énergie.
- ▶ Cylindre contrôlé :  $\gamma = \gamma_{opt} \Rightarrow$  Sillage quasi symétrique.
  - $\hookrightarrow$  Plus petites structures  $\Rightarrow$  moins énergétiques.



# VI - Résultats *Coefficients aérodynamiques*



- ▶ Importante réduction de traînée :  
 $C_D = 1,40$  pour  $\gamma = 0$  et  $C_D = 1,06$  pour  $\gamma = \gamma_{opt}$  (plus de 25%).
- ▶ Diminution de l'amplitude de la portance :  
 $C_L = 0,68$  pour  $\gamma = 0$  et  $C_L = 0,13$  pour  $\gamma = \gamma_{opt}$ .



## VI - Résultats *Coûts de calcul*

- ▶ Contrôle optimal Navier Stokes par He *et al.* (2000) :
  - ↪ loi de contrôle harmonique avec  $A = 3$  et  $S_t = 0,75$ .
    - ⇒ 30% de réduction de traînée.
- ▶ Contrôle optimal POD ROM (présente étude) :
  - ↪ loi de contrôle harmonique avec  $A = 2,2$  et  $S_t = 0,53$ .
    - ⇒ 25% de réduction de traînée.
- Coûts énergétiques inférieurs (gain énergétique supérieur ?)
- Temps de calcul : **100 fois inférieur** par POD ROM que par NSE !  
(idem équations adjointes et condition d'optimalité)
- Stockage mémoire : **600 fois moins de variables** par POD ROM que par NSE !

↪ Contrôle "optimal" écoulements 3D envisageable !



## ► Conclusions

- Objectifs atteints : diminution de la traînée via la minimisation de l'instationnarité du sillage du modèle réduit.
- Coûts de calculs très faibles.
- Méthode applicable à des cas moins académiques (aéroacoustique).

## ► Perspectives

- Améliorer la représentativité du modèle POD.
  - ↪ "Optimiser" l'excitation temporelle  $\gamma_e$ ,
  - ↪ Mélanger des snapshots correspondants à plusieurs excitations temporelles.
- Recherche d'un contrôle périodique  $\gamma(t) = A \sin(2\pi S_t t)$  avec réactualisation de la base POD (premiers résultats encourageants).
- Couplage avec des méthodes d'optimisation à régions de confiance (TRPOD) : convergence prouvée sous conditions.
- Coupler la pression au modèle POD.
- Contrôle optimal de Navier-Stokes.

