Optimisation aérodynamique par modèle réduit POD et méthode à région de confiance

Michel Bergmann

Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - $54\,504$ Vandœuvre Cedex, France

Plan de l'exposé

Introduction

I - Etude paramétrique & influence des paramètres de contrôle

II - Méthodes mathématiques

- La théorie du contrôle optimal
- Réduction de modèle par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

III - Optimisation *avec* réactualisation de la base POD

- Méthode adaptative
- Méthode à région de confiance

Conclusions et perspectives

Introduction *Contexte et objectifs de l'étude*

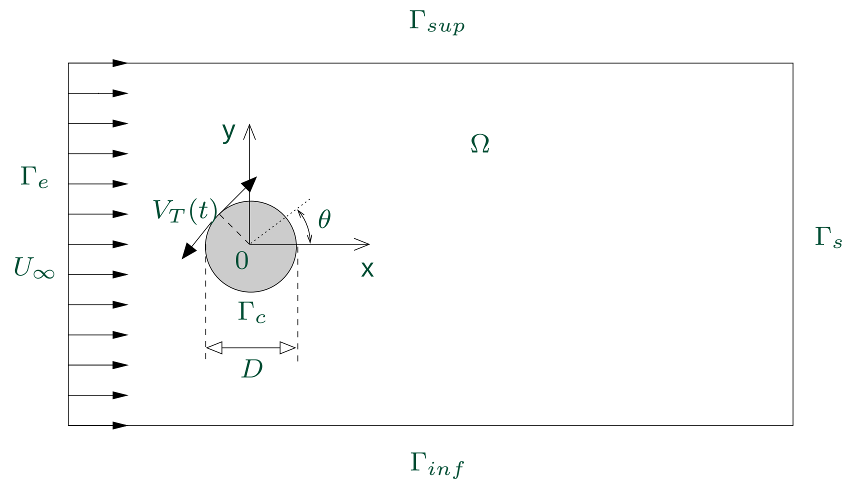
Optimisation de l'aérodynamique interne et externe d'un avion par *contrôle des écoulements* : un enjeu majeur pour le développement du transport aéronautique

- Optimisation aérodynamique
  - Augmentation de l'autonomie en vol
  - Diminution de la masse au décollage

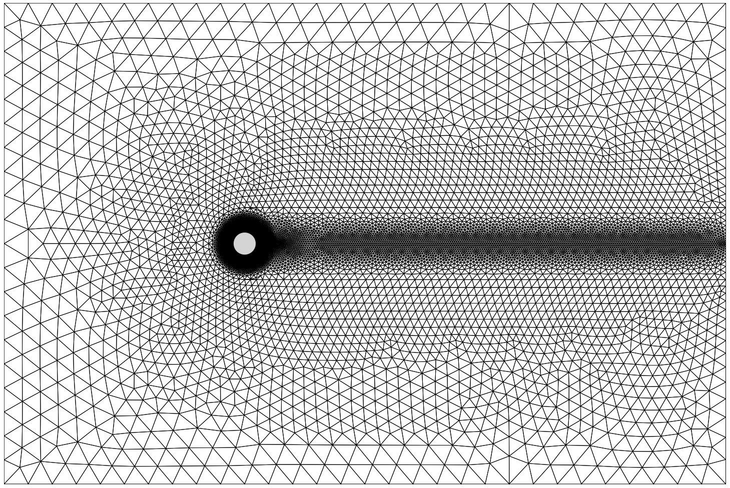
    $\hookrightarrow$ Réduction des coûts opérationnels
  - Réduction de l'émission de gaz polluant
  - Réduction de la nuisance sonore
  - Gain de manœuvrabilité
- Exemple chiffré
  - Réduction 1% consommation mondiale de fuel pour le transport aéronautique

    $\hookrightarrow$ gain de dépense de 1,25 millions de dollars par jour en coût opérationnel (valeur en 2002)

- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Vitesse tangentielle $V_T(t)$ appliquée au cylindre



- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis (P_1, P_1) en espace



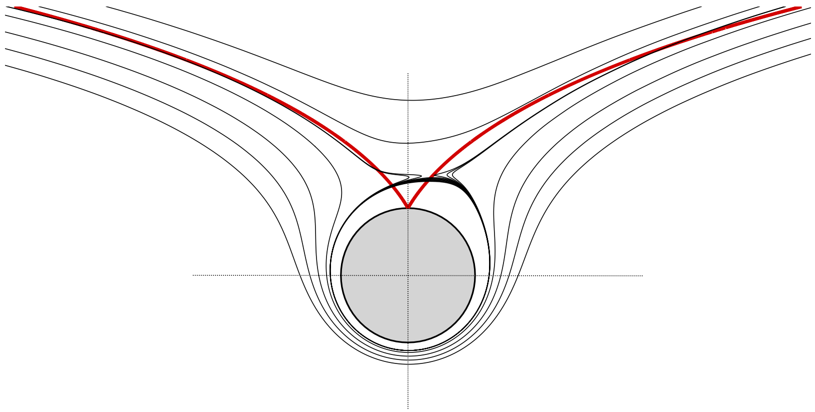
Code de calcul développé par M.Braza et D. Ruiz (IMFT-ENSEEIHT).

▶ Rotation constante : $V_T(t) = V_0\, U_\infty$

Observations numériques,

- Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
- Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \to 0$.

Analytiquement, $V_0 = 3,1$
`[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]`

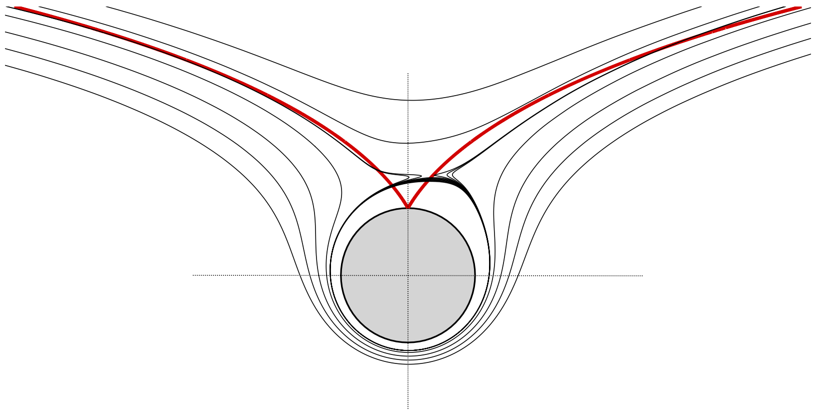


▶ Rotation constante : $V_T(t) = V_0\, U_\infty$

Observations numériques,

- Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
- Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \to 0$.

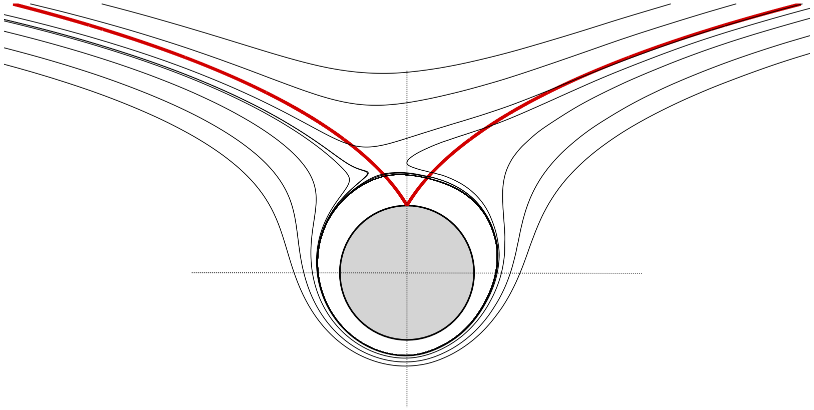
Analytiquement, $V_0 = 3,1$
`[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]`



▶ Contrôle appliqué juste sur la partie $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$ (utilisation de la forme de Von Mises des éqs. de CL `[Batchelor, JFM, 1956]`)

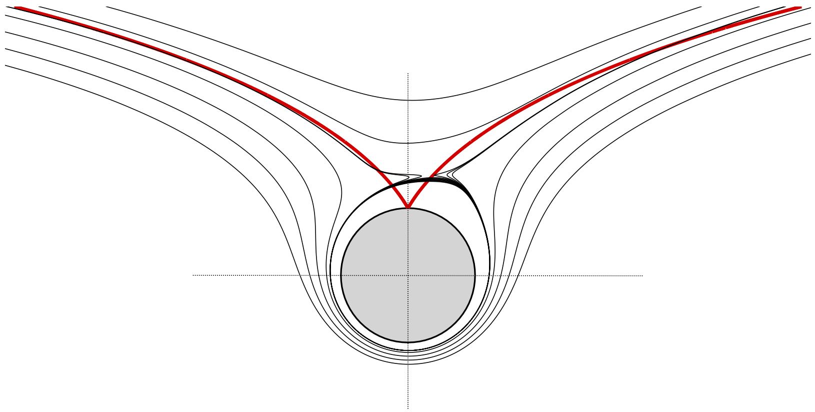
Circulation $\Gamma = 2\pi R V_0 \sqrt{\dfrac{\theta_{max} - \theta_{min}}{\pi}}$

- $100^\circ \leq \theta_c \leq 160^\circ$
- $V_c = \sqrt{3} V_0$



Introduction *Rotation à vitesse constante*

▶ Rotation constante : $V_T(t) = V_0\, U_\infty$

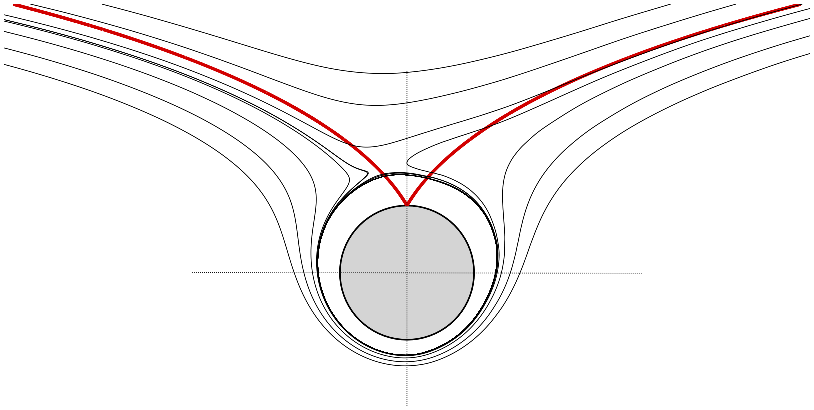


Observations numériques,

- Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
- Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \to 0$.

Analytiquement, $V_0 = 3,1$
[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]

▶ Contrôle appliqué juste sur la partie $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$ (utilisation de la forme de Von Mises des éqs. de CL [Batchelor, JFM, 1956])



Circulation $\Gamma = 2\pi R V_0 \sqrt{\dfrac{\theta_{max} - \theta_{min}}{\pi}}$

- $100^\circ \leq \theta_c \leq 160^\circ$
- $V_c = \sqrt{3} V_0$

Réduction de traînée due au déplacement du point d'arrêt.

Rotation sinusoïdale $\gamma(t) = \frac{V_T(t)}{U_\infty} = A \sin(2\pi St_f t)$: point d'arrêt reste fixe à $\theta = 0^\circ$.
[Tokumaru & Dimotakis, JFM, 1991]

But : déterminer A et St_f qui minimisent la traînée (sans considérations énergétiques)

Introduction *Coefficient de traînée & écoulement de base stationnaire instable*

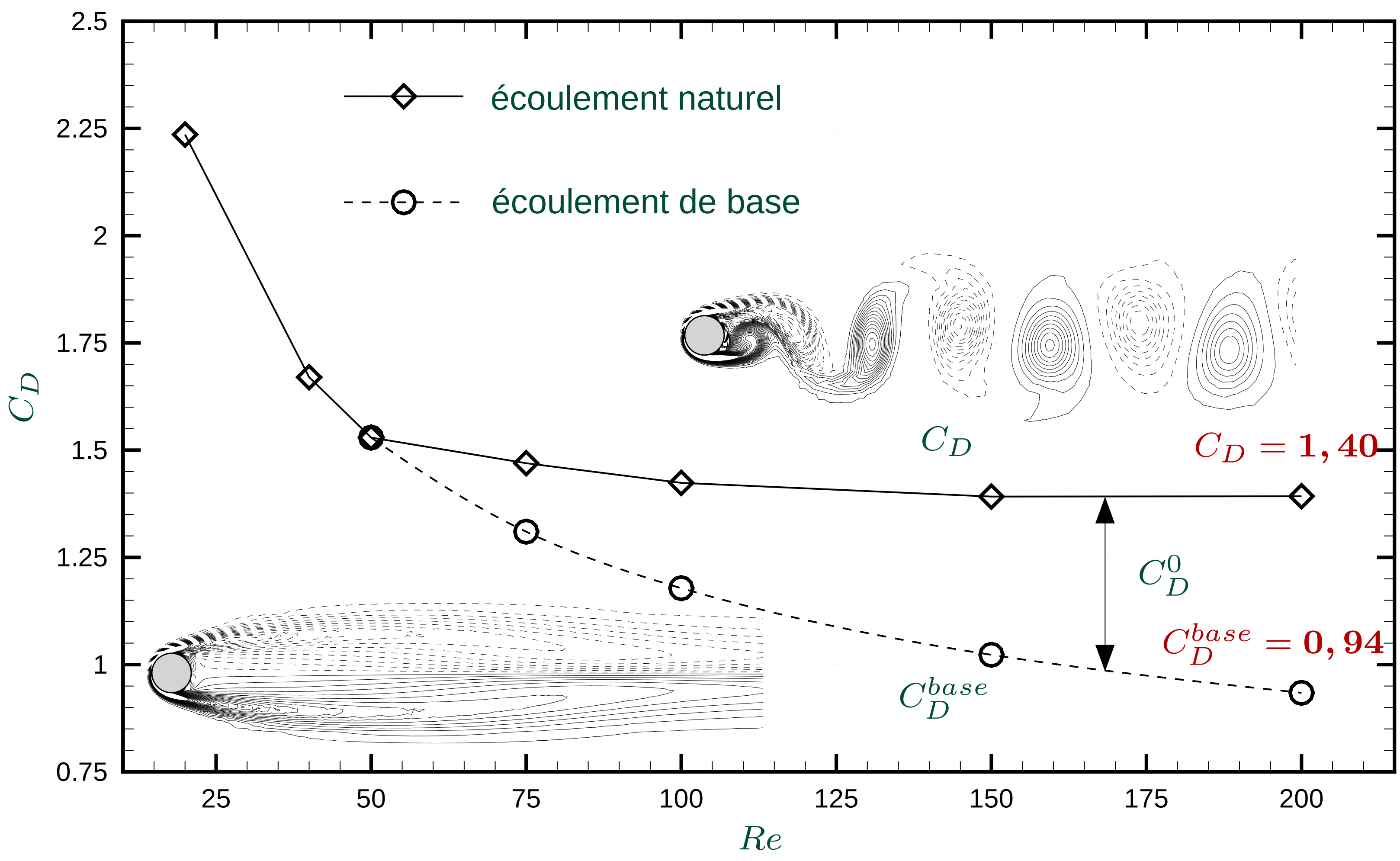


Fig. : *Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre l'écoulement naturel et l'écoulement de base stationnaire instable.*

Protas, B. et Wesfreid, J.E. (2002) : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14**(2), pp. 810-826.

I - Etude paramétrique *Coefficient de traînée moyen*

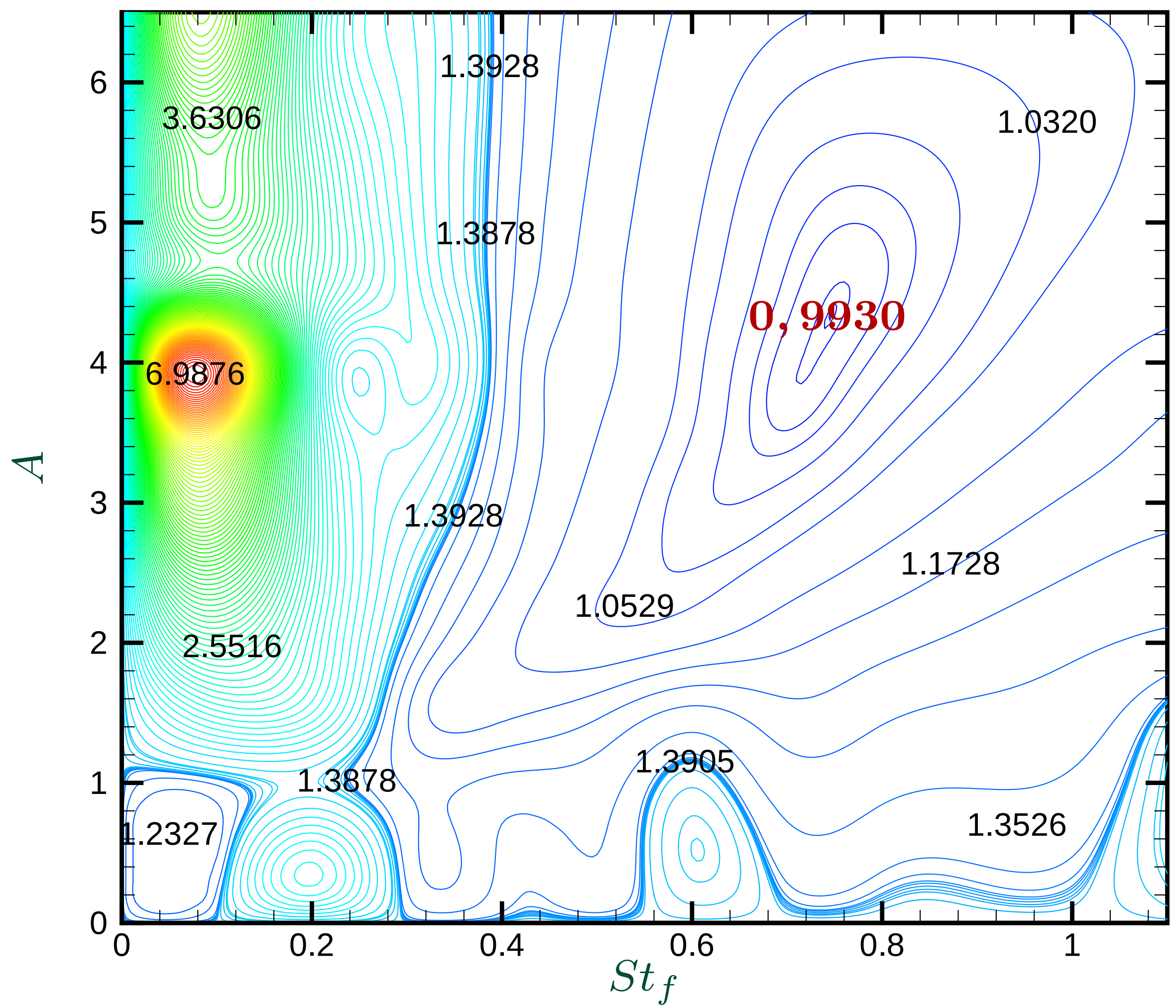


Fig. : *Coefficient de traînée moyen en fonction de l'amplitude et de la fréquence de forçage.*

Minimum (global ?) : $C_D = 0,9930$ pour $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

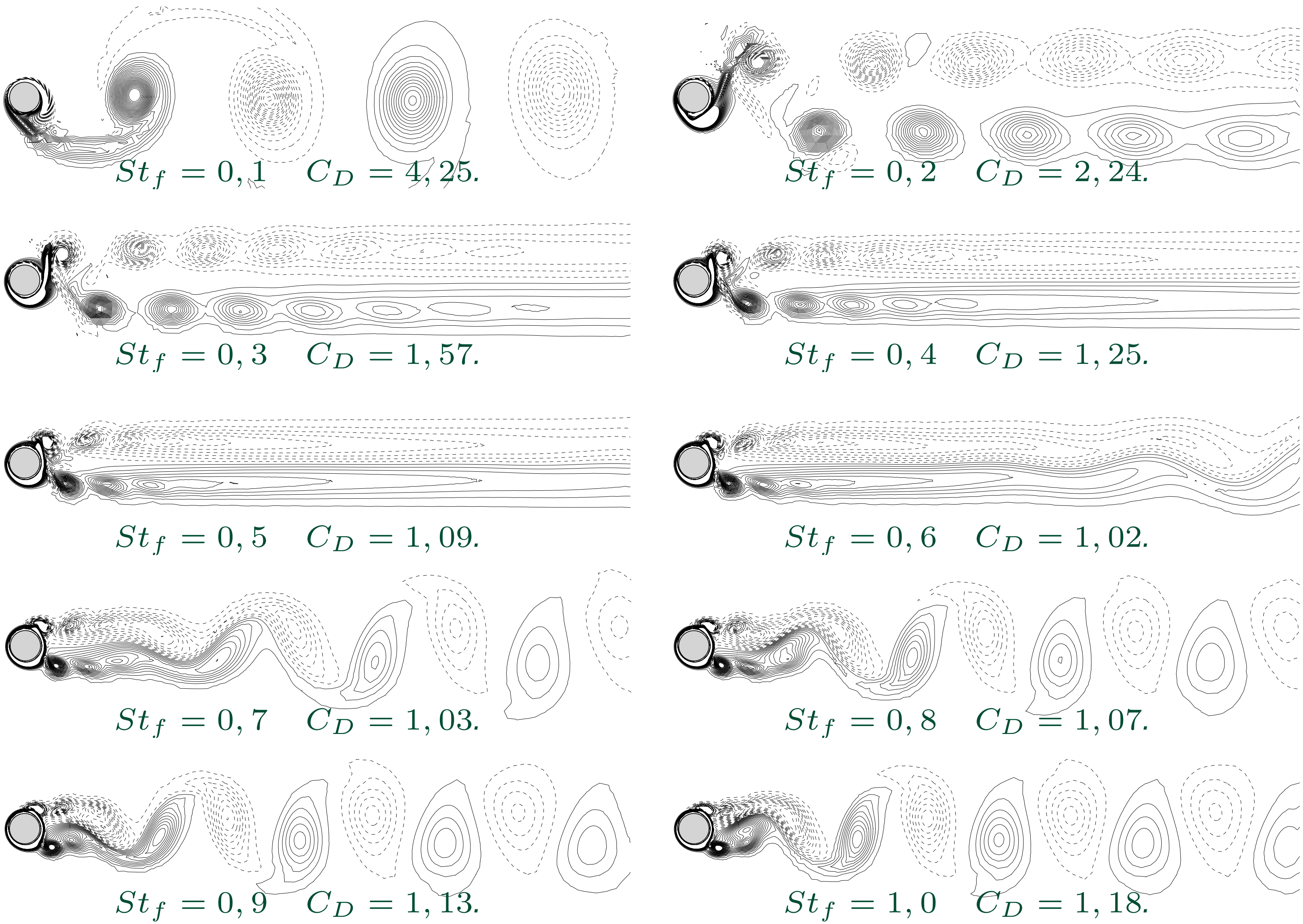


Fig. : *Isovaleurs de la vorticité* ω_z *pour* $A = 3$

Définitions : *Lock-on* : la fréquence du lâché de tourbillons St est égale à la fréquence de forçage St_f, soit $St = St_f$

Lock-in : idem *lock-on* avec $St_f = St_n$, où St_n est la fréquence naturelle

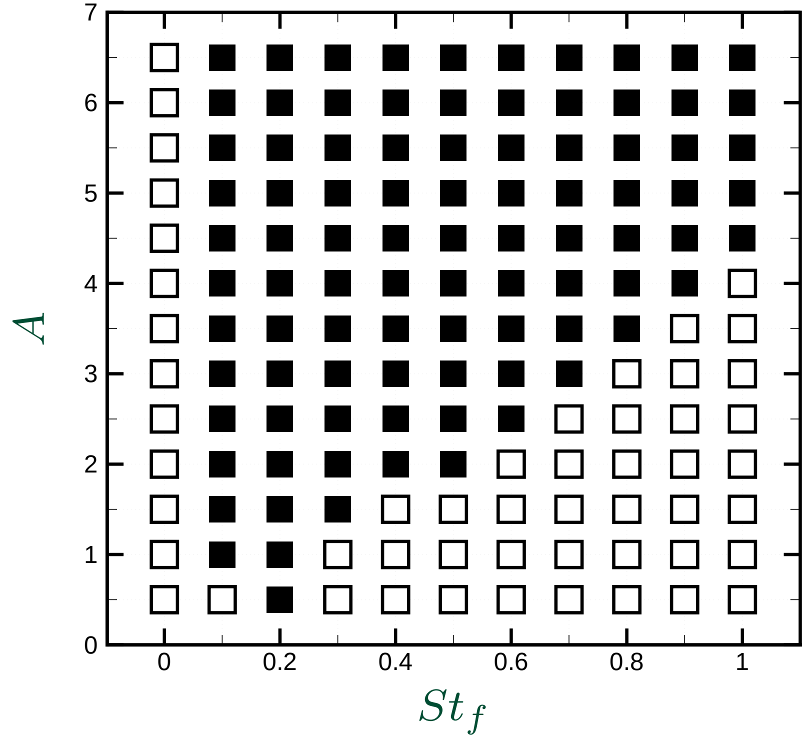


Fig. : *Écoulements* lock-on ■ *et* no lock-on □ *en fonction de l'amplitude A et du nombre de Strouhal St_f de forçage.*

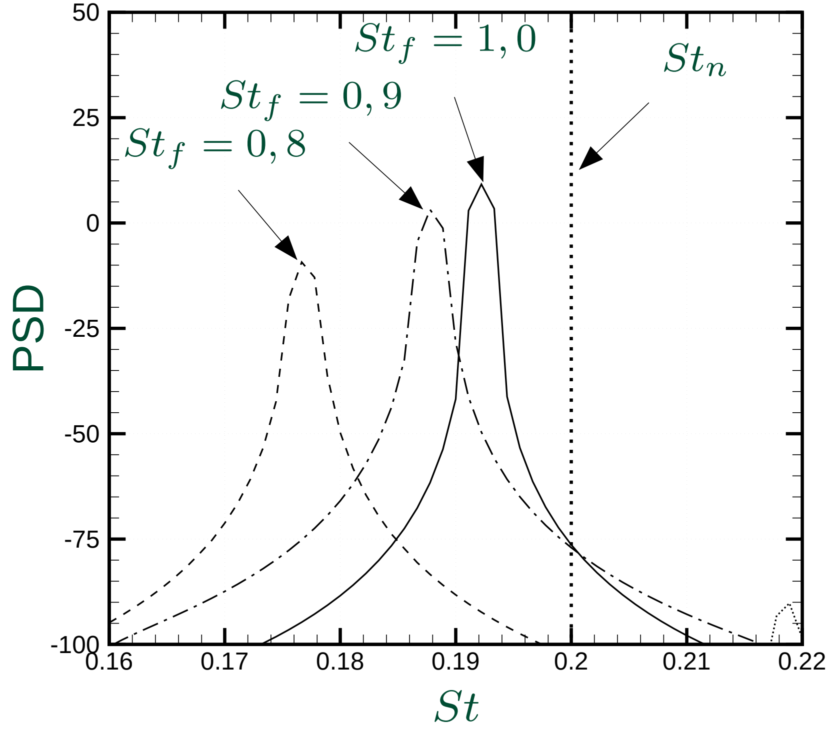


Fig. : *Evolution des spectres de puissance du coefficient de portance pour $A = 3$ après la zone de* lock-on.

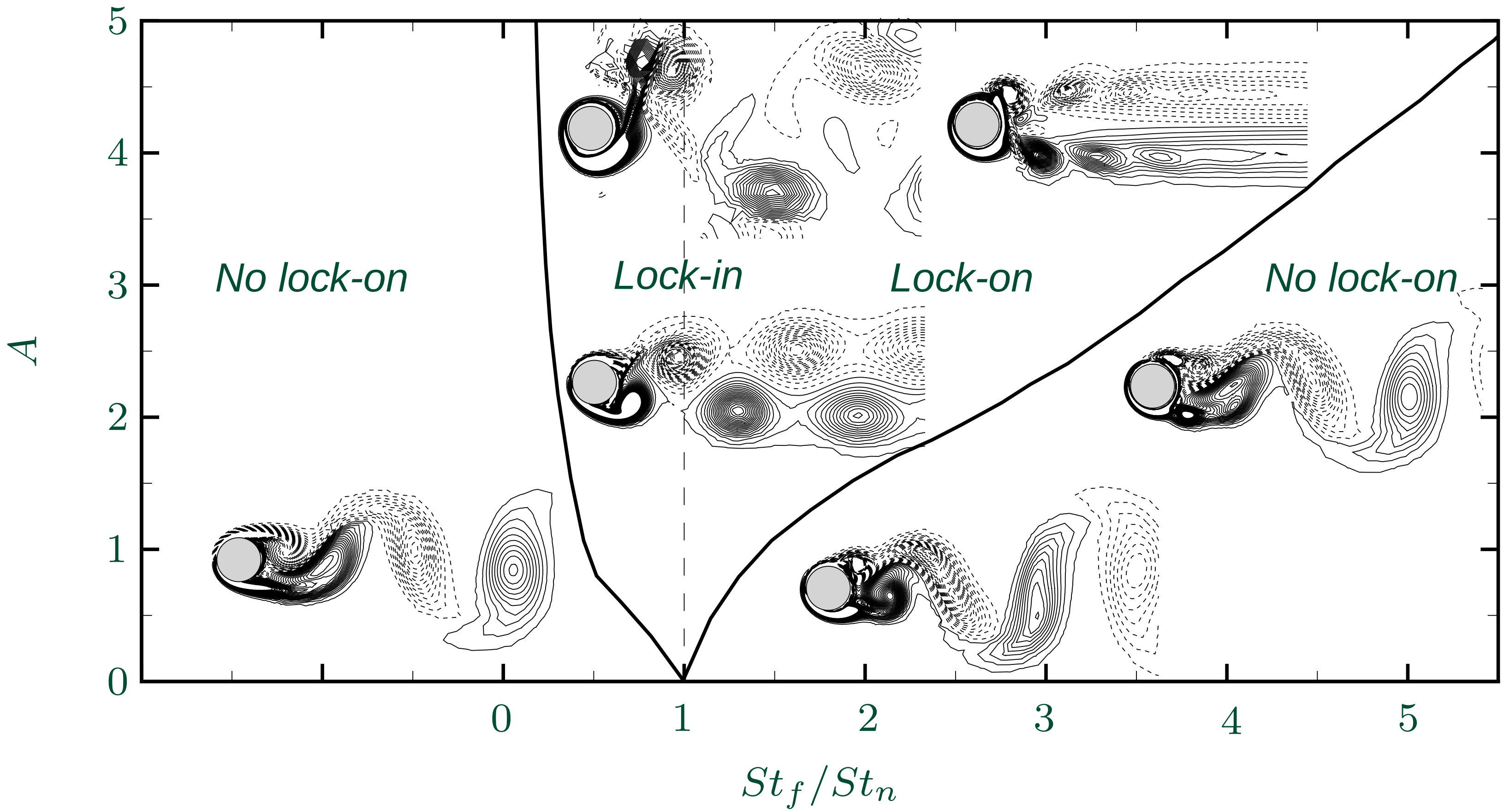


Fig. : *Bande fondamentale* lock-on *et iso-contours de vorticité ω_z dans le sillage proche.*

▸ Écoulements hors *lock-on* "semblables"

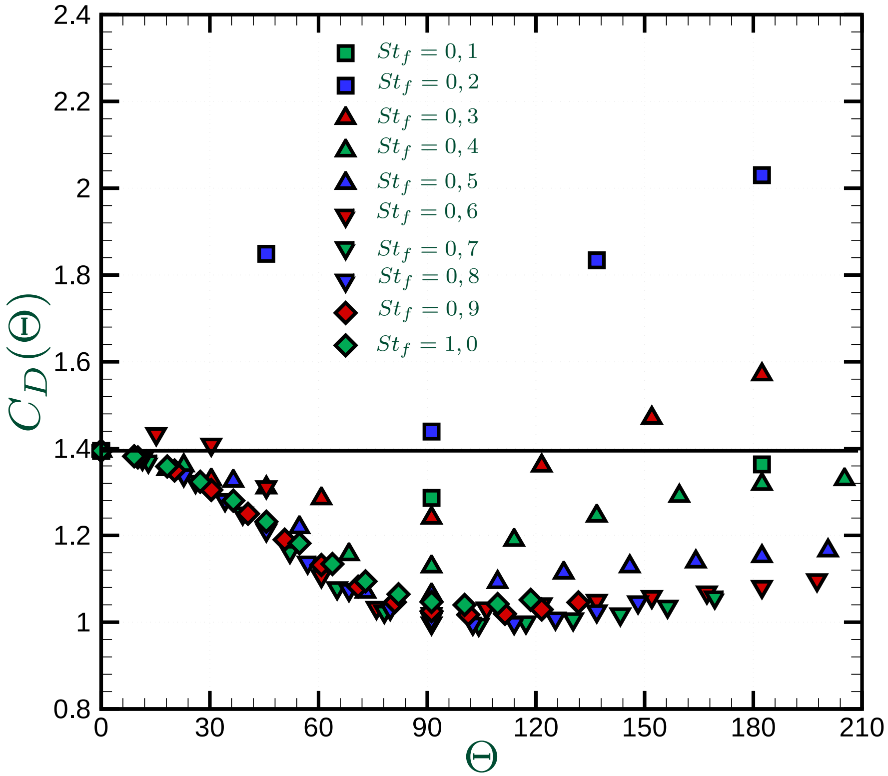


Fig. : *Coefficient de traînée moyen en fonction de l'angle maximal de rotation.*

Notation

▶ Angle maximal de rotation :

$$\Theta = \max_t \{\theta(t)\} = \frac{A}{\pi St_f}$$

Observations

▶ Réduction de traînée maximale $\Theta_{max} = 95°$

↪ Coefficient de traînée minimal $C_D = 0,993$

N.B. : Sans contrôle, $C_D \simeq 1,4$

Existence d'une valeur optimale Θ_{max} pour l'angle maximal de rotation.

I - Etude paramétrique *Angle maximal de rotation*

Notations :

$$C_{D\,min}(St_f) = \min_{A \in \mathbb{R}} C_D(\Theta,\, St_f)$$

$$C_{D\,\Theta_{max}}(St_f) = C_D(\Theta_{max},\, St_f)$$

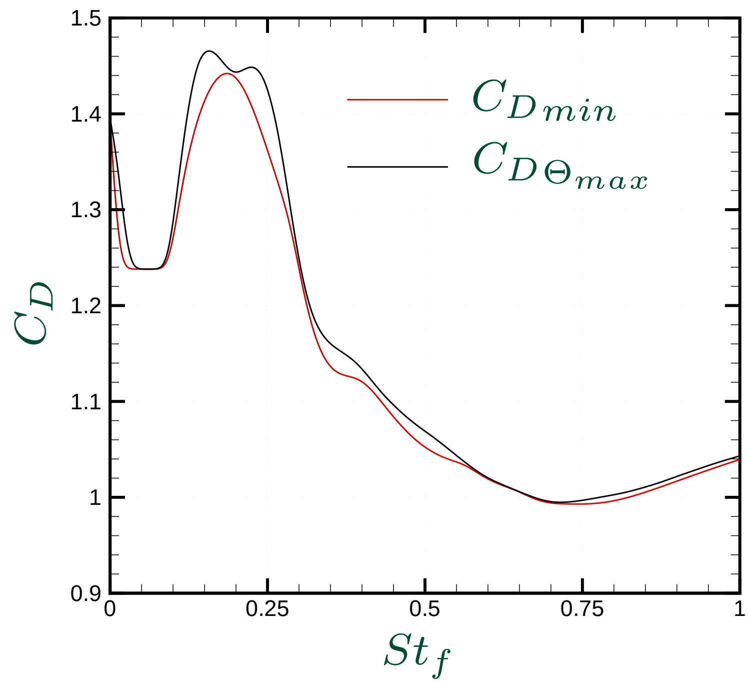


Fig. : *Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Strouhal.*

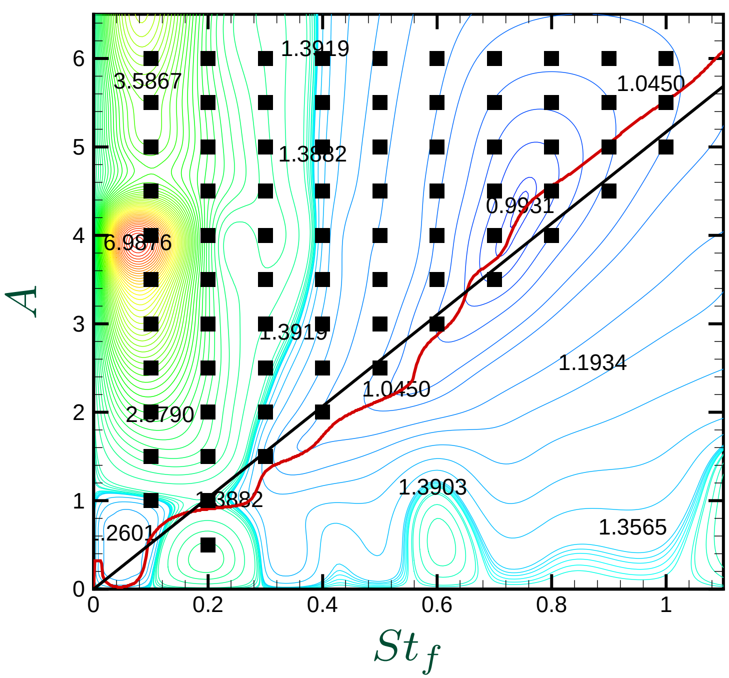


Fig. : *Dépendance des paramètres optimaux dans l'espace de contrôle*

▶ Bonne concordance entre $C_{D\,min}$ et $C_{D\,\Theta_{max}}$.

A et St_f "optimaux" semblent dépendants : $A/St_f = 5,2$ ($\Theta_{max} = 95°$)

$\Rightarrow$ Correspond à la limite région "lock-on".

Méthode mathématique permettant de déterminer sans empirisme une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

- Equations d'état $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$;

  (Navier-Stokes + C.I. + C.L.)

- Variables de contrôle c ;

  (Soufflage/aspiration, paramètres de forme, ...)

- Fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$.

  (Traînée, portance, ...)

Déterminer les variables de contrôle c et les variables d'état ϕ telles que la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$ soit minimale ou maximale sous les contraintes $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$.

II - Théorie du contrôle optimal *Multiplicateurs de Lagrange*

Optimisation avec contraintes $\Rightarrow$ optimisation sans contraintes

- Introduction de multiplicateurs de Lagrange ξ (pour chaque contrainte active).
- Fonctionnelle de Lagrange : $\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - < \mathcal{F}(\phi, c), \xi >$.
- Problème : rendre $\mathcal{L}$ "stationnaire" $\Rightarrow$ déterminer $\delta\mathcal{L} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$.
- Hypothèse : ϕ, c et ξ indépendantes : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi = 0$: équations d'état $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi = 0$: équations adjointes $\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}\right)^{*}\xi = \left(\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^{*}$.

$\hookrightarrow$ *Solution de* $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c = 0$: conditions d'optimalité $\left(\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^{*} = \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}\right)^{*}\xi$.

$\Rightarrow$ Assure un extremum local (minimum)

$\Rightarrow$ Méthode de résolution coûteuse en temps CPU

et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !

"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000

▶ Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

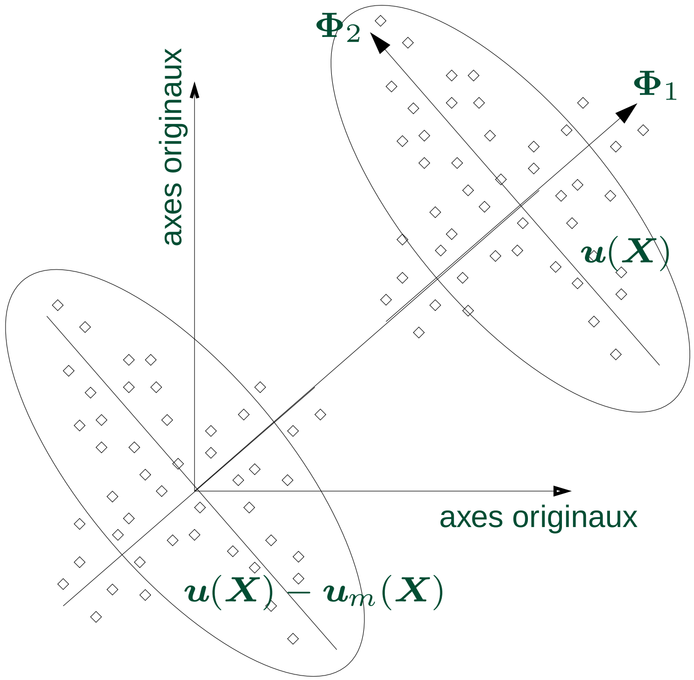
▶ Rechercher la réalisation $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$. ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$)

▶ $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ solution du problème :

$$\max_{\boldsymbol{\Phi}} \langle |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Phi})|^2 \rangle, \quad \|\boldsymbol{\Phi}\|^2 = 1.$$

▶ Convergence optimale *en norme* L^2 (énergie) de $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$

$\Rightarrow$ réduction de dynamique envisageable.



Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

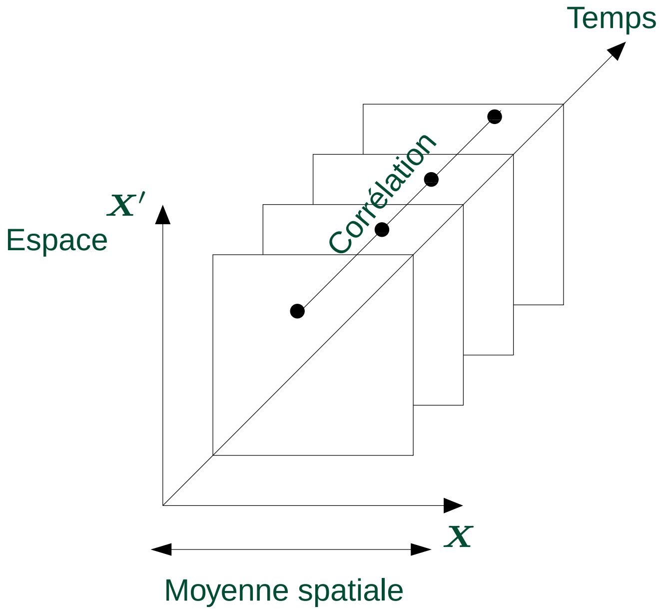
$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})\Phi_n^{(j)}(\boldsymbol{X'})\,d\boldsymbol{X'} = \lambda_n \Phi_n^{(i)}(\boldsymbol{X}) \qquad n = 1,..,N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})$: *tenseur des corrélations spatio-temporelles.*

- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_{T} C(t,t')a_n(t')\,dt' = \lambda_n a_n(t)$$

$\hookrightarrow C(t,t')$: *corrélations temporelles.*



- $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ base de l'écoulement :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t)\boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{x}).$$

Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N$^{\circ}$ 3, pp. 561–571.

▶ Contenu énergétique relatif : $RIC(M) = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \Big/ \sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k$

Objectif : réaliser une troncature dans la base POD en conservant 99% de l'énergie relative

▶ Cas test : $A = 2$ et $St_f = 0,5 \Rightarrow N_{POD} = 361$ réalisations sur $T = 18$

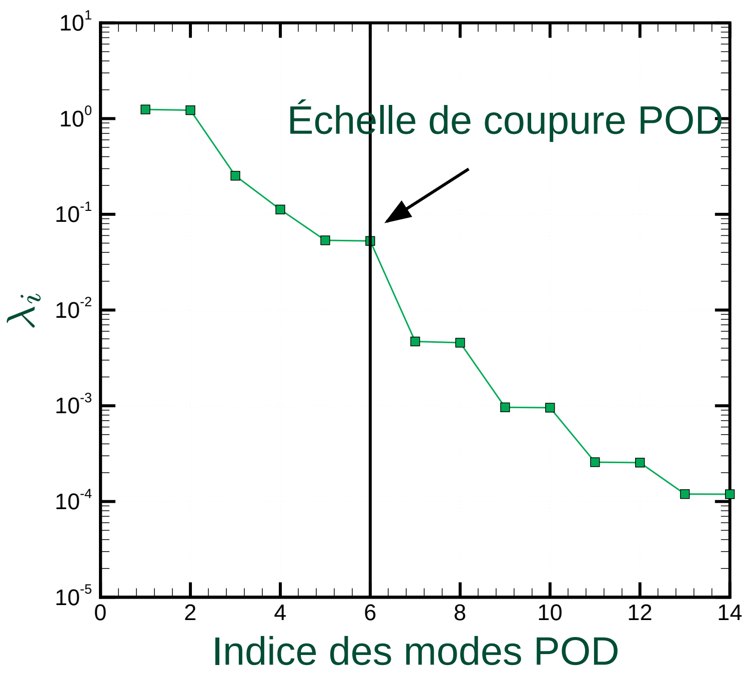


Fig. : *Spectre énergétique et échelle de coupure POD.*

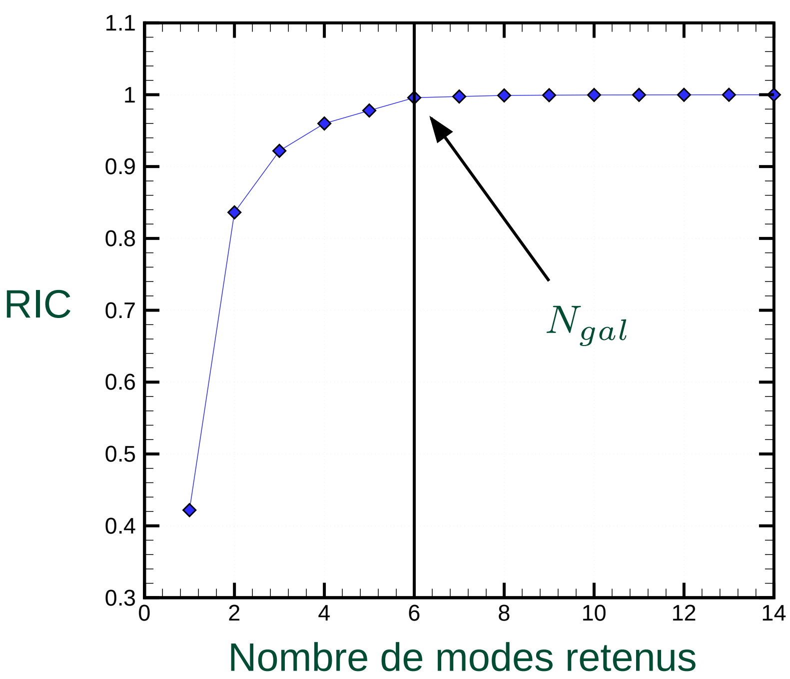


Fig. : *Énergie cinétique relative en fonction du nombre M de modes POD retenus.*

$$N_{gal} = \arg\min_{M} RIC(M) \text{ t.q. } RIC(N_{gal}) > 99\% \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{gal} = 6}\,!$$

II - Réduction de modèle *Modes POD du sillage d'un cylindre*

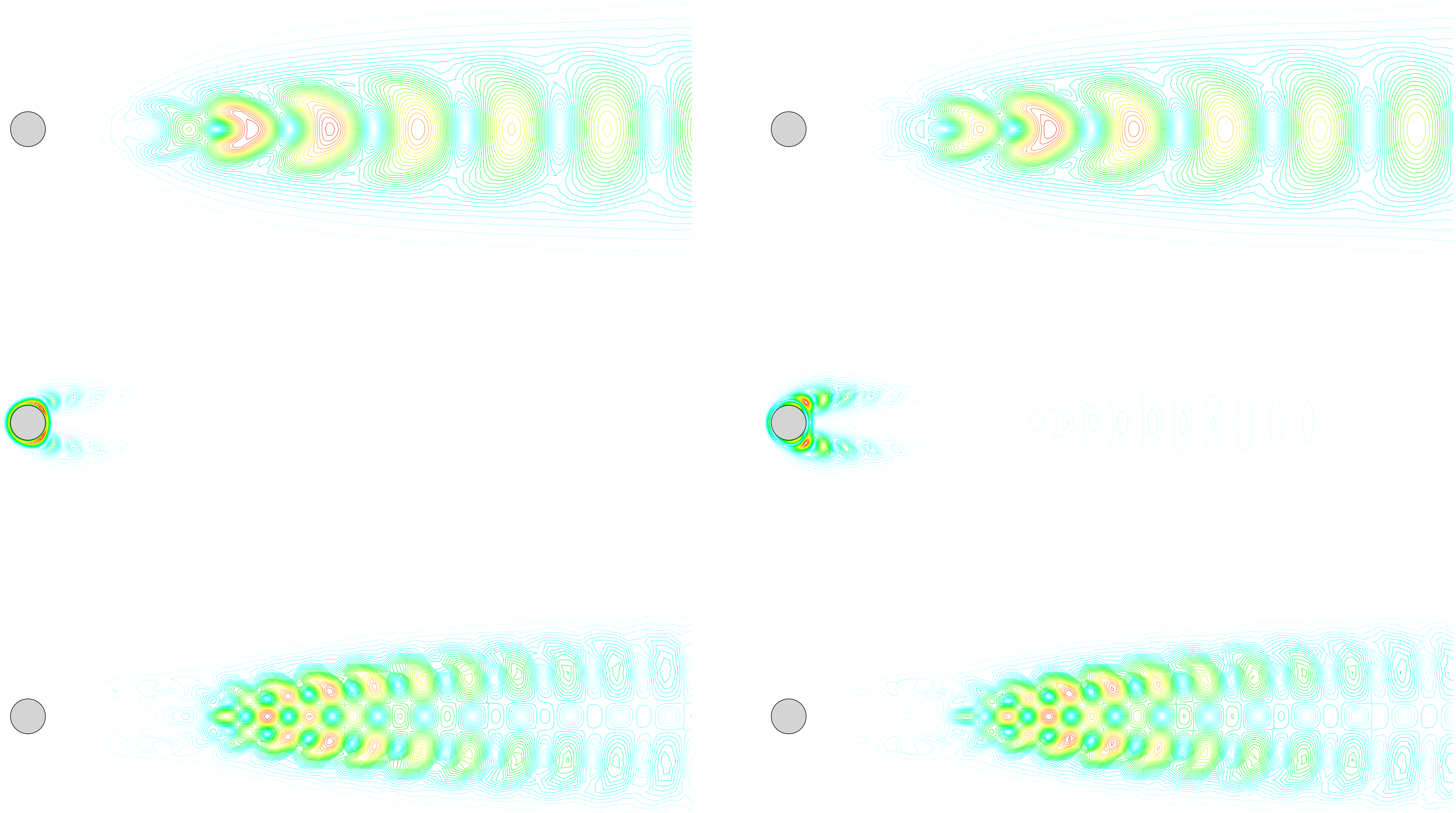


Fig. : *Représentation des 6 premiers modes POD de fluctuations autour du champ moyen* $\gamma(t) = A\sin(2\pi St_f t)$ *avec* $A = 2$ *et* $St_f = 0,5$.

II - Réduction de modèle *Sillage d'un cylindre*

- Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}_i,\ -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}\right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) &= (p,\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Phi}_i) - \frac{1}{Re}\left((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}_i)^T,\ \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}\right) \\ &\quad - [p\,\boldsymbol{\Phi}_i] + \frac{1}{Re}[(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u})\boldsymbol{\Phi}_i].\end{aligned}$$

avec $[\boldsymbol{a}] = \int_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{x}$ et $(\overline{\overline{A}},\ \overline{\overline{B}}) = \int_\Omega \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}}\, d\Omega = \sum_{i,\,j} \int_\Omega A_{ij} B_{ji}\, d\boldsymbol{x}$.

- Termes de pression "indésirables" : $\Rightarrow$ élimination

- Décomposition du champ de vitesse sur N_{POD} modes :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}) + \gamma(t)\,\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{x}).$$

- Système dynamique réduit avec N_{gal} $(\ll N_{POD})$ modes retenus :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t} =& \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij}\,a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}}\sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk}\,a_j(t)a_k(t) \\ &+ \mathcal{D}_i\,\frac{d\,\gamma}{d\,t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij}\,a_j(t)\right)\gamma + \mathcal{G}_i\gamma^2 \\ a_i(0) =& (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\,0),\ \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})). \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent uniquement de $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_c$ et Re.

II - Réduction de modèle *Intégration et stabilisation du modèle réduit*

Cas test : $\gamma = A\sin(2\pi St_f t)$, $A = 2$ et $St_f = 0,5$.

Erreurs de reconstruction POD ROM $\Rightarrow$ amplification temporelle des modes

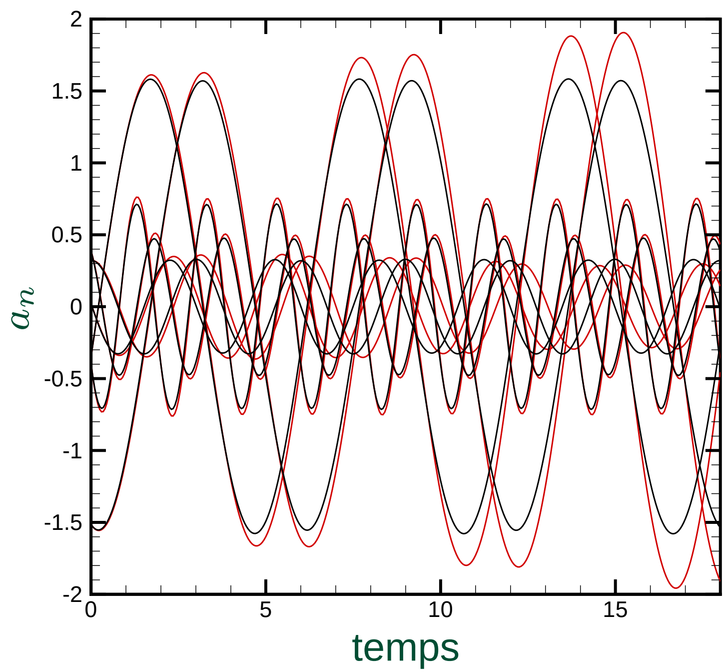


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

▶ Causes :

- Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
- Essentiel de dissipation dans les petites structures

▶ Solution :

- Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

——— projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
——— prédiction avant stabilisation (POD ROM)

Cas test : $\gamma = A\sin(2\pi St_f t)$, $A = 2$ et $St_f = 0,5$.

Erreurs de reconstruction POD ROM $\Rightarrow$ amplification temporelle des modes

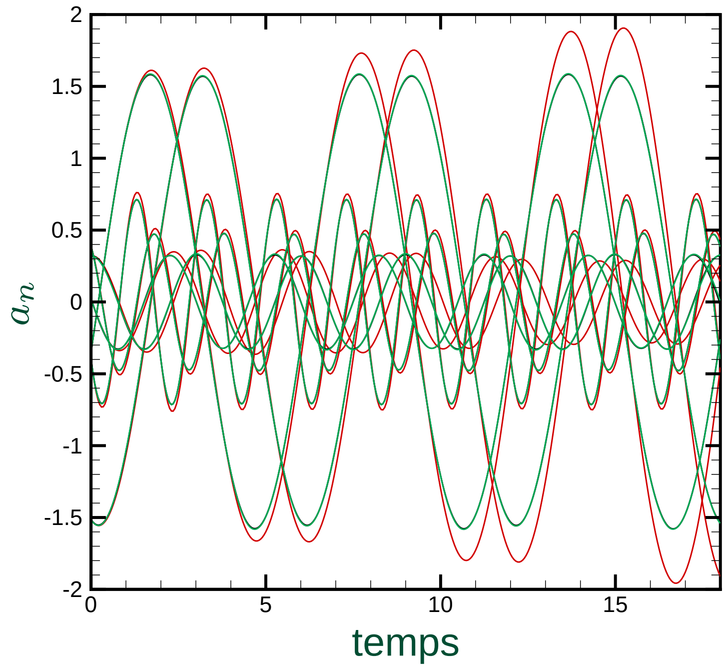


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

- **Causes :**
  - Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
  - Essentiel de dissipation dans les petites structures
- **Solution :**
  - Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

—— projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
—— prédiction avant stabilisation (POD ROM)
—— prédiction après stabilisation (POD ROM).

II - Réduction de modèle *Stabilisation du modèle réduit - Energie*

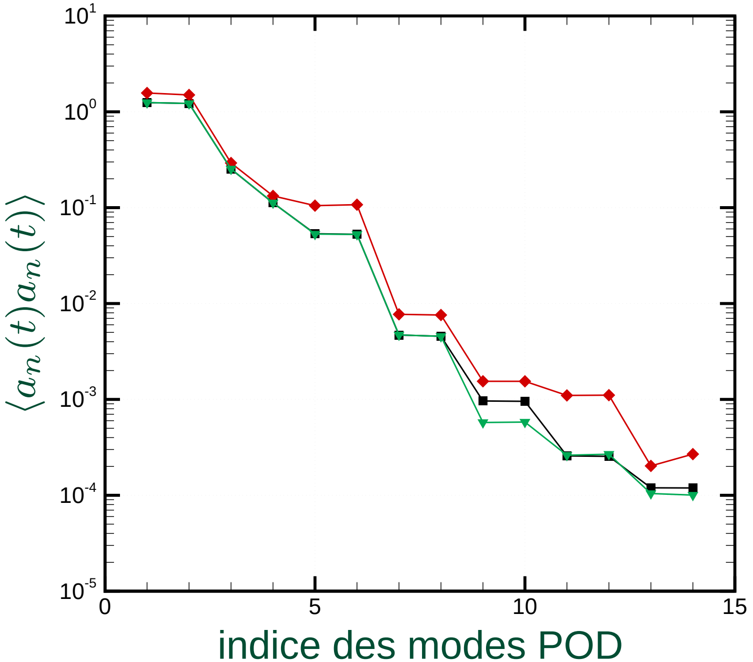


Fig. : *Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement par DNS et par POD ROM.*

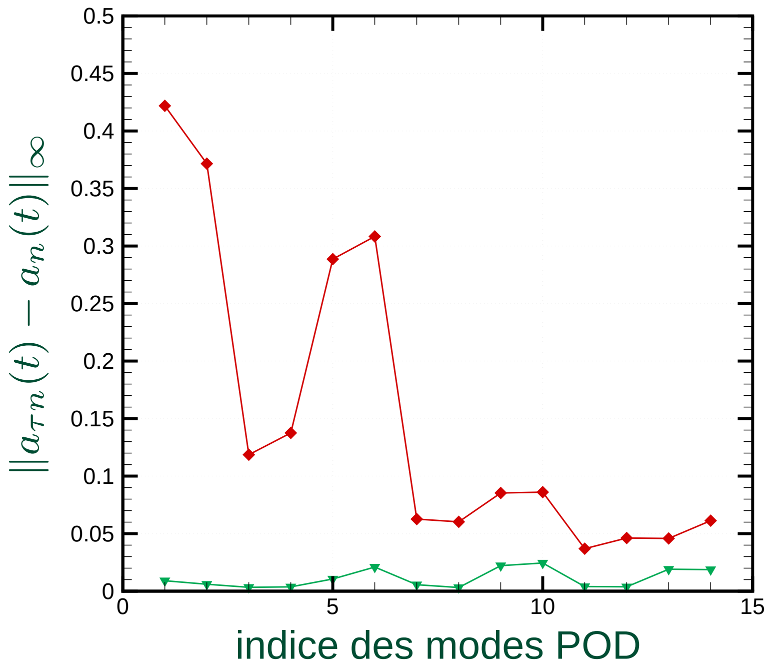
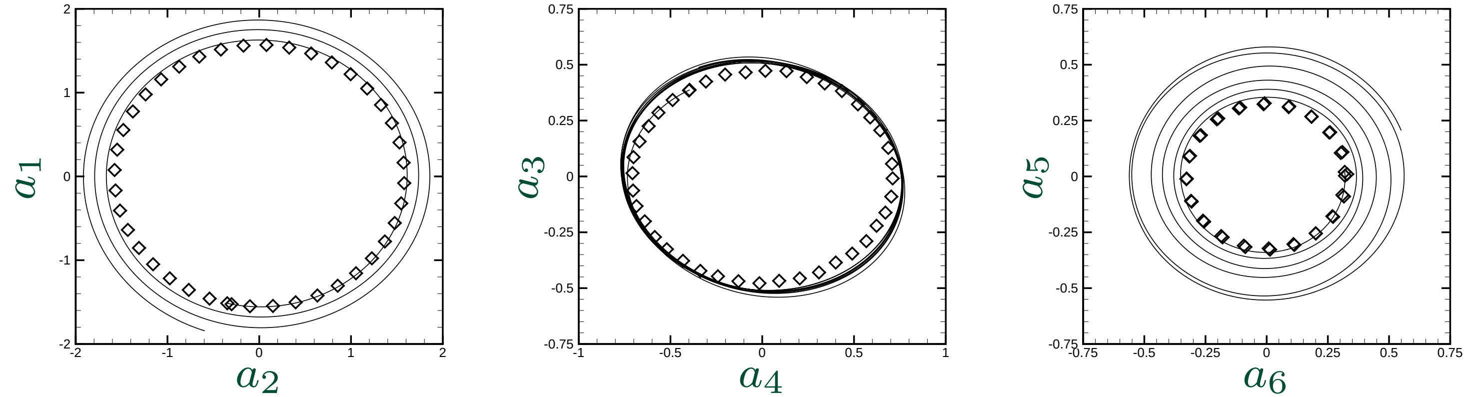


Fig. : *Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD avant et après stabilisation.*

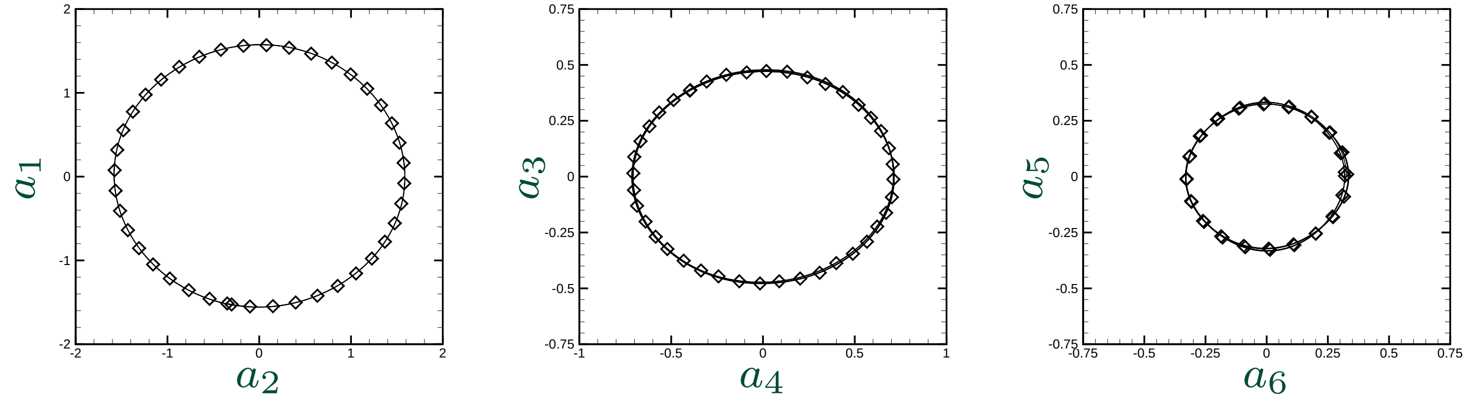
▶ Bonne concordance entre spectres POD ROM et DNS

▶ Réduction de l'erreur de reconstruction entre les modes prédits (POD ROM) et projetés (DNS)

$\Rightarrow$ Validation du modèle réduit POD



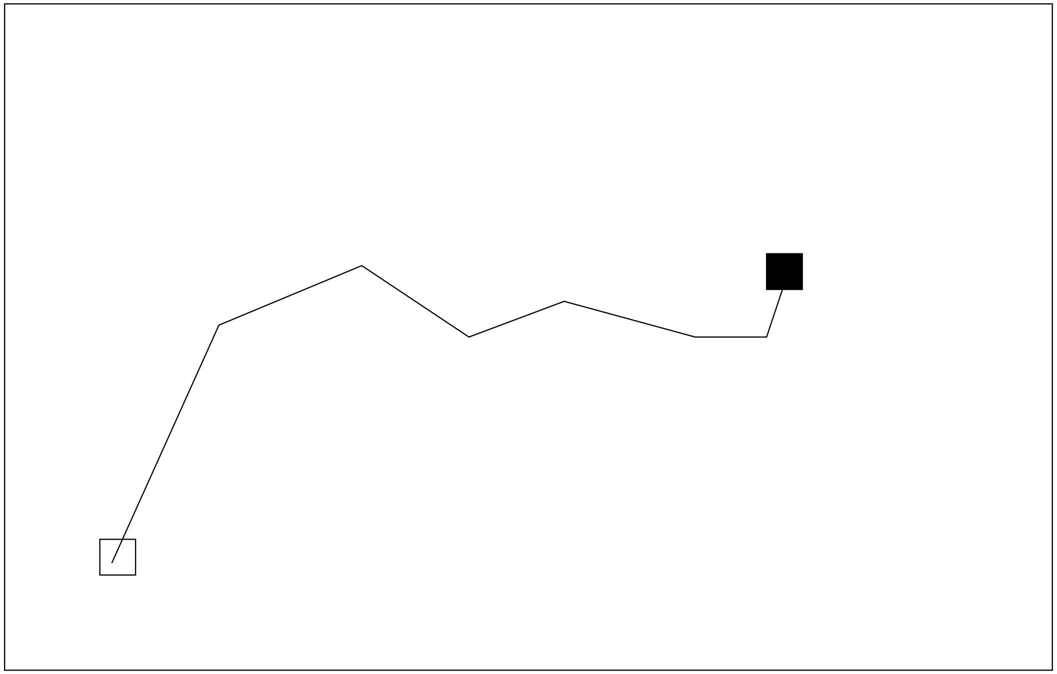
Sans ajout de viscosités artificielles.



Avec ajout de viscosités artificielles.

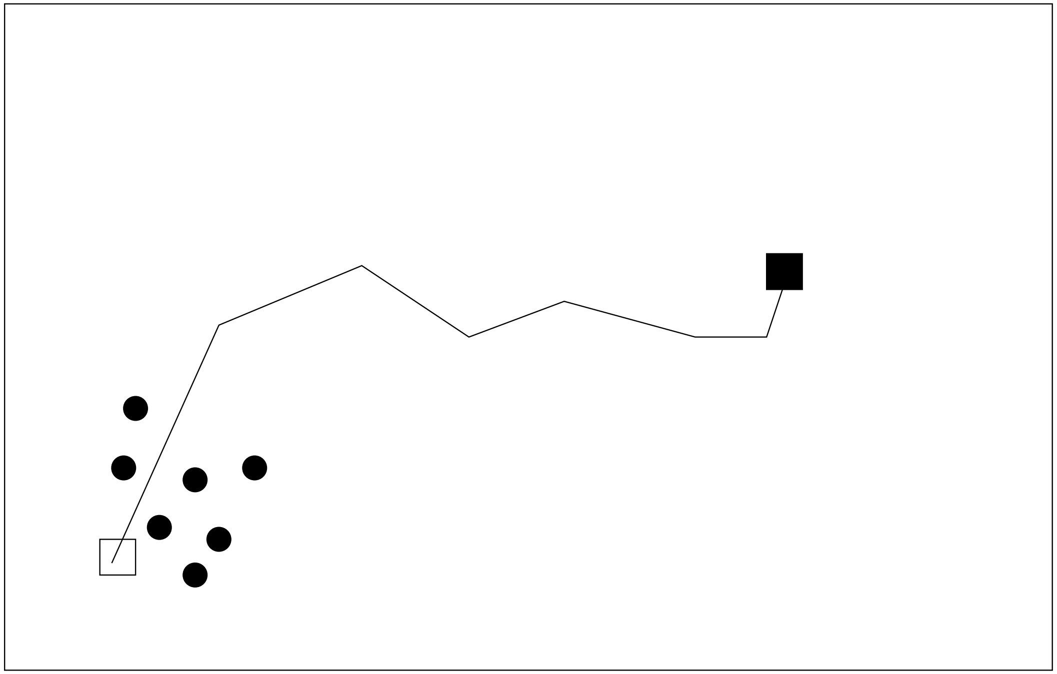
Fig. : *Portraits de phase des* 6 *premiers coefficients temporels* a_n *sur 18 unités de temps.*
$\Diamond$ *modes DNS ;* —— *modes POD.*

Le modèle réduit POD représente correctement *une unique* dynamique



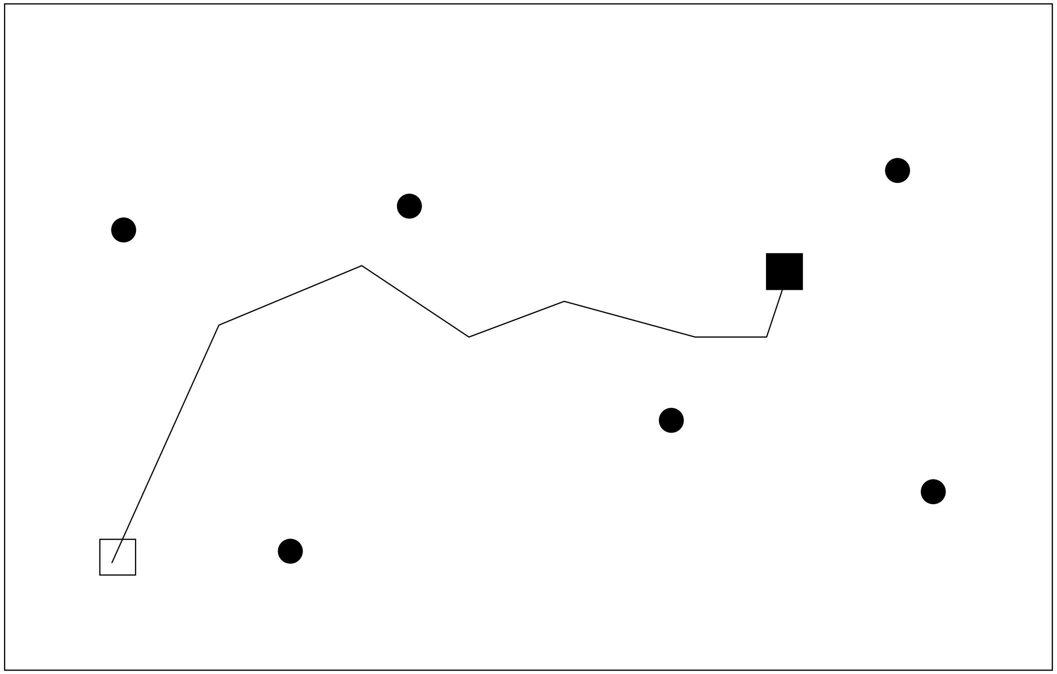
Configuration générale.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation.*



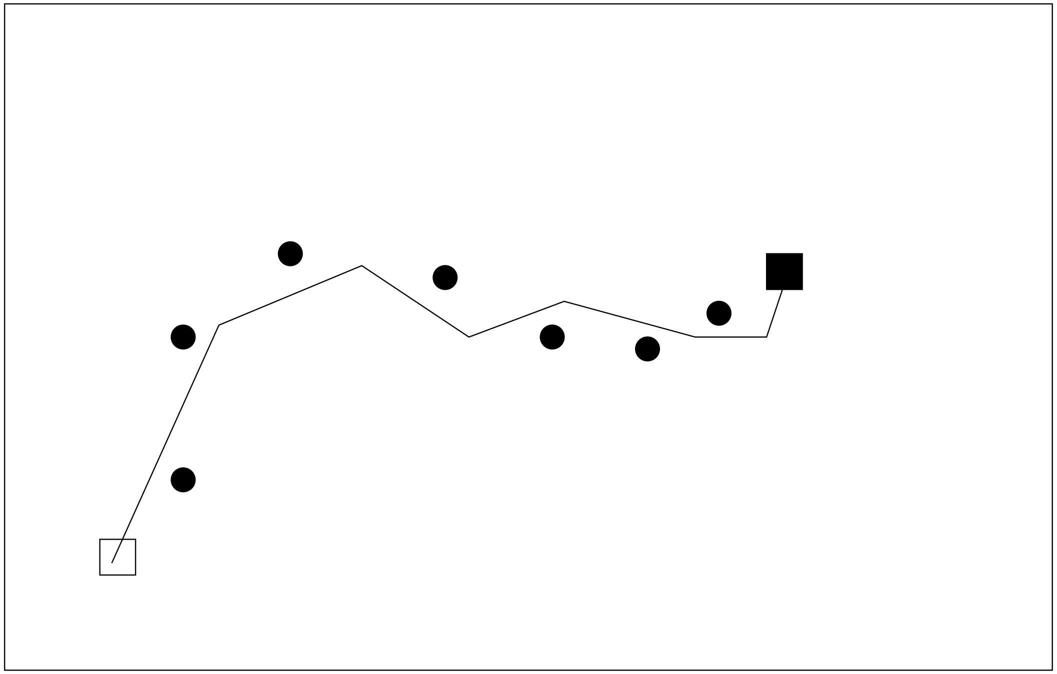
Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*



Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

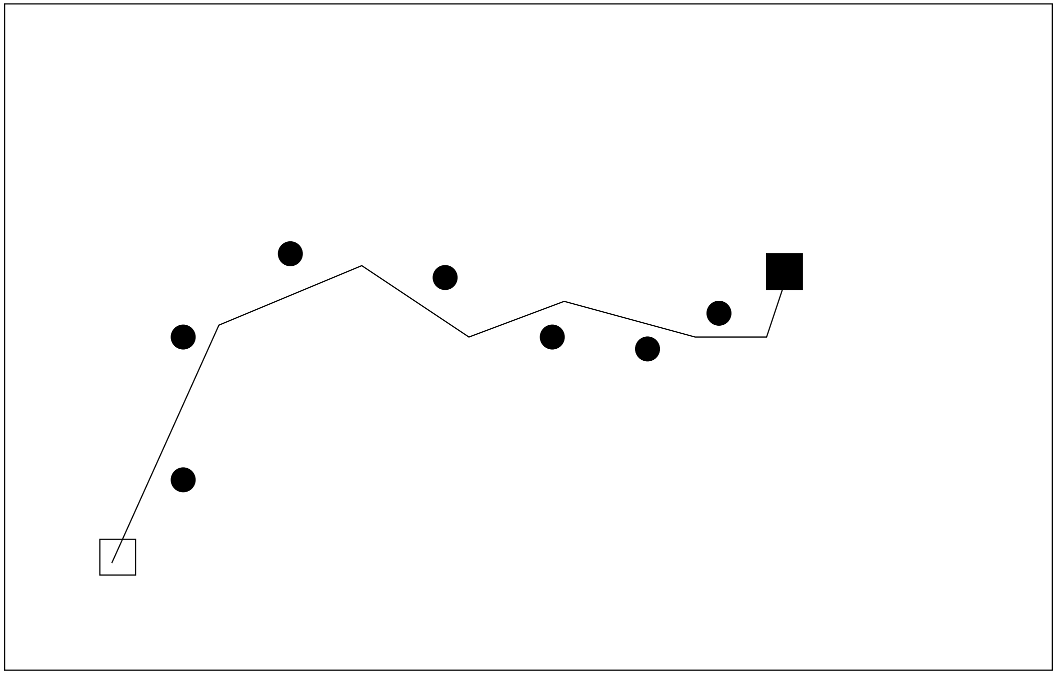


Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*

——— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*

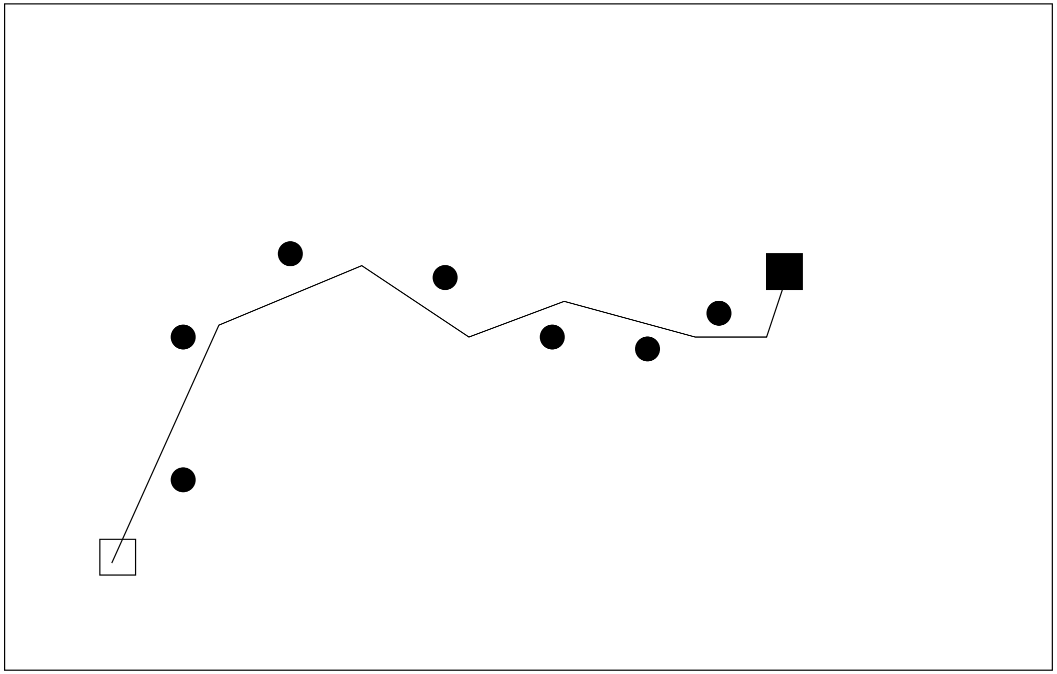
● *réalisation utilisée pour la base de données.*



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation
  Optimisation sans réactualisation de la base POD
  [Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, **17** (9), 2005]



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
—— *chemin d'optimisation, conditions initiale* □ *et terminale* ■ *du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation
  Optimisation sans réactualisation de la base POD
  [Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, **17** (9), 2005]
- La base ne représente qu'une dynamique contrôlée particulière
  III - Optimisation avec réactualisation de la base POD

III - Base POD réactualisée *Modes de non-équilibre*

▶ Nécessité de directions non prises en compte dans la base POD initiale $\{\mathbf{\Phi}_i\}_{i=1,\ldots,N_{gal}}$

▶ Construction de N_{neq} modes particuliers

- Vecteur translation entre le champ moyen I et le champ moyen II :

$$\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow II} = \mathbf{\Phi}_0^{II} - \mathbf{\Phi}_0^{I}.$$

- Ajout à la base existante (Gram-Schmidt)

$$\mathbf{\Phi}_{N_{gal}+1}^{I} \equiv \widetilde{\mathbf{\Phi}}_0^{I\rightarrow II}.$$

- Idem pour $\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow III}$, etc...

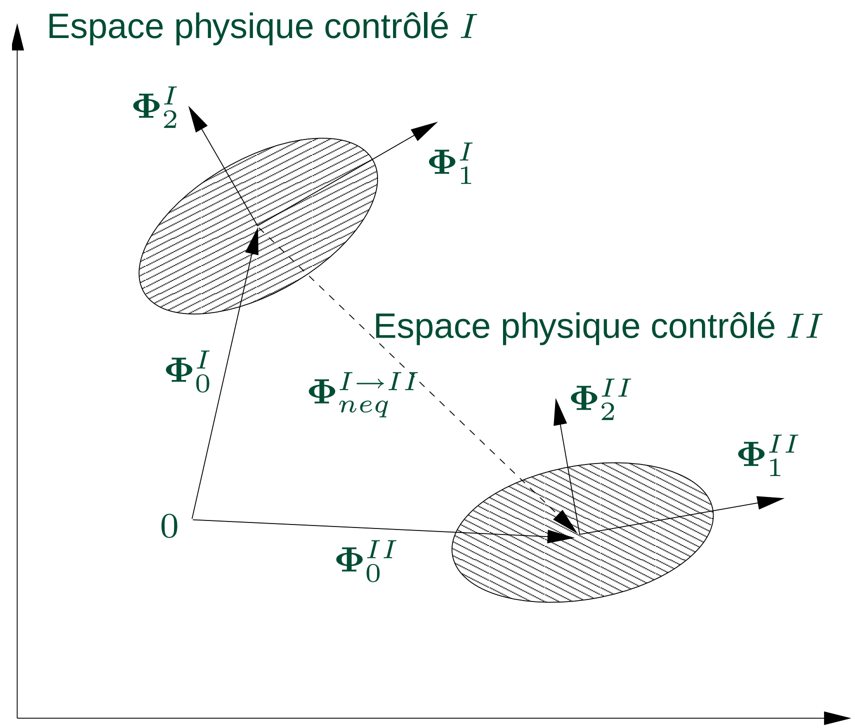


Fig. : *Représentation schématique d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre.*

Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. et Thiele, F. (2003) : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497** pp. 335–363.

III - Base POD réactualisée *Système dynamique d'ordre réduit*

- Décomposition de la vitesse sur $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\, t) = \underbrace{a_0(t)\, \boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{x})}_{\text{champ moyen}} + \gamma(\boldsymbol{c},\, t)\, \boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}.$$

- Système dynamique avec $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes retenus (équations d'état) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\, a_i(t)}{d\, t} = & \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij}\, a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk}\, a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d\, \gamma(\boldsymbol{c},\, t)}{d\, t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij}\, a_j(t) \right) \gamma(\boldsymbol{c},\, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\boldsymbol{c},\, t). \\ a_i(0) = & \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\, 0),\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})\right). \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent de $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}_c$ et Re.

III - Base POD réactualisée *Aspects physiques et dynamiques des modes POD*

Aspects physiques	Modes	Aspects dynamiques
fonction de contrôle	$\boldsymbol{u}_c$	dynamique pré-déterminée
mode écoulement moyen	$\boldsymbol{u}_m,\, i = 0$	$a_0 = Cste$
modes POD Galerkin correspondent à la physique de l'écoulement	$i = 1$	**Système dynamique** modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$)
	$i = 2$	
	$\cdots$	
	$i = N_{gal}$	
modes de non-équilibre correspondent à des directions privilégiées	$i = N_{gal} + 1$	
	$\cdots$	
	$i = N_{gal} + N_{neq}$	

Tab. : *Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.*

III - Base POD réactualisée *Modes POD Galerkin et modes de non-équilibre*

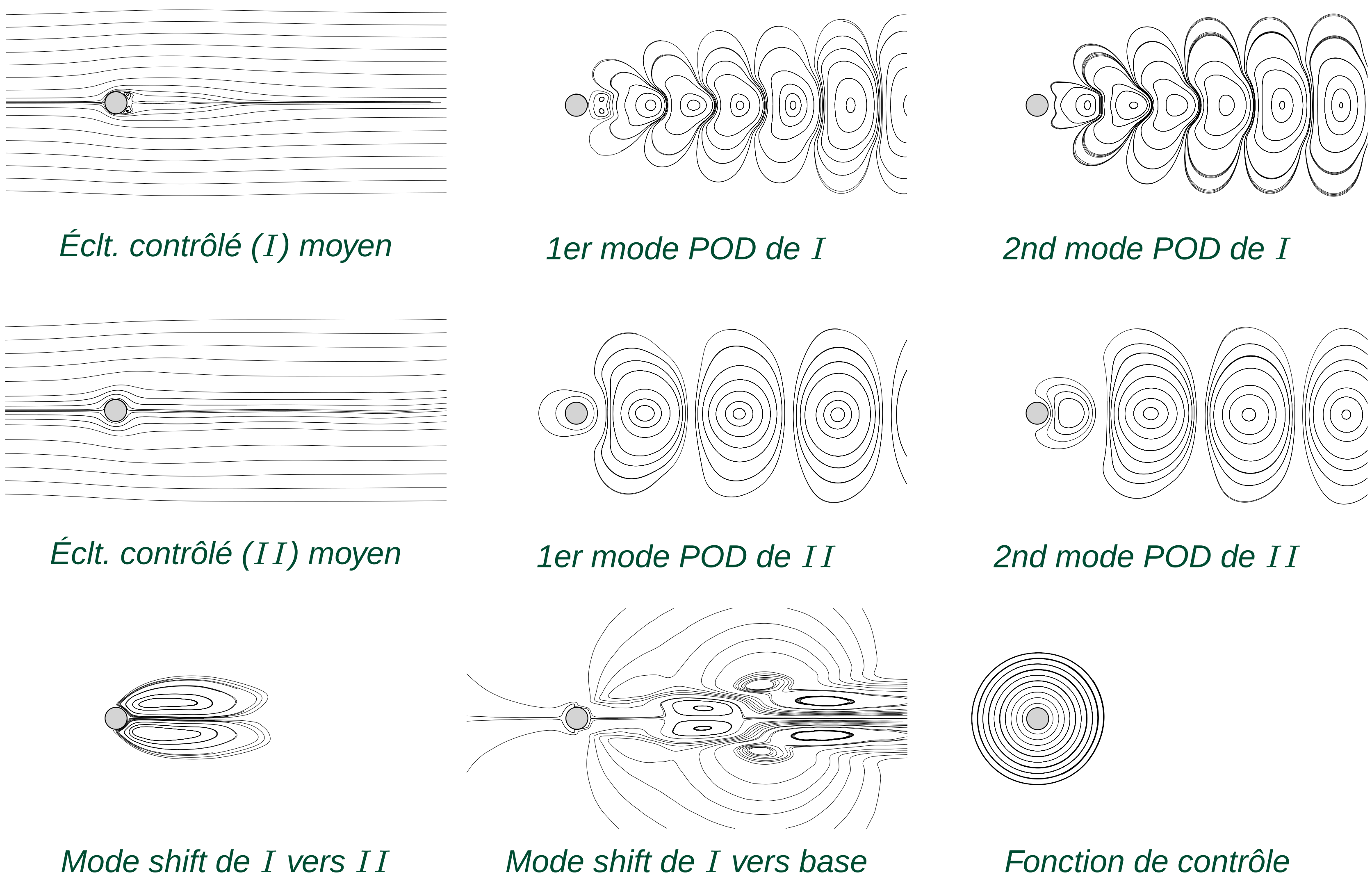


Fig. : *Représentation de modes Galerkin, de la fonction de contrôle $\boldsymbol{u}_c$, et de modes de non-équilibre présents dans la base POD*

III - Base POD réactualisée *Formulation contrôle optimal POD ROM*

▶ Opérateur *de traînée*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R} \\ \boldsymbol{u} &\mapsto 2\int_{\Gamma_c} \left(u_3 n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial y} n_y \right) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

▶ En variables réduites,

$\hookrightarrow$ Coefficient de traînée réel Navier-Stokes $C_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{U})$ avec $\boldsymbol{U} = (u,\, v,\, p)^T$

$\hookrightarrow$ Coefficient de traînée modélisé par POD $\widetilde{C}_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\boldsymbol{U}})$ avec $\widetilde{\boldsymbol{U}} = (\widetilde{u},\, \widetilde{v},\, \widetilde{p})^T$

▶ Problème : $\widetilde{p}$ n'est pas connu

$\hookrightarrow$ La base POD est étendue au champ de pression : $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi},\, \Phi^p)^T$

$\Rightarrow$ Corrélations avec pression $C(t,t') = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\Omega} U_i(\boldsymbol{x},t) U_i(\boldsymbol{x},t') \, d\boldsymbol{x}$

- Décomposition

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\,t) = \gamma(\boldsymbol{c},\,t)\,\boldsymbol{U}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}\,.$$

- Evolution du coefficient de traînée modélisé par POD

$$\widetilde{C}_D(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \quad \text{avec} \quad N_i = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\Phi}_i).$$

- Fonction objectif modélisée par POD (coefficient de traînée moyen)

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \, dt.$$

▶ Système dynamique adjoint :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\xi_i(t)}{dt} = -\displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(\boldsymbol{c},\,t)\,\mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}\right) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \dfrac{1}{T} N_i, \\ \\ \xi_i(T) = 0. \end{cases}$$

▶ Conditions d'optimalité

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\, \gamma\, dt.$$

avec $\mathcal{L}_i = -\dfrac{d\xi_i}{dt}\mathcal{D}_i + \xi_i \left(\mathcal{E}_i + \displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\boldsymbol{c},\,t)\mathcal{G}_i \right)$

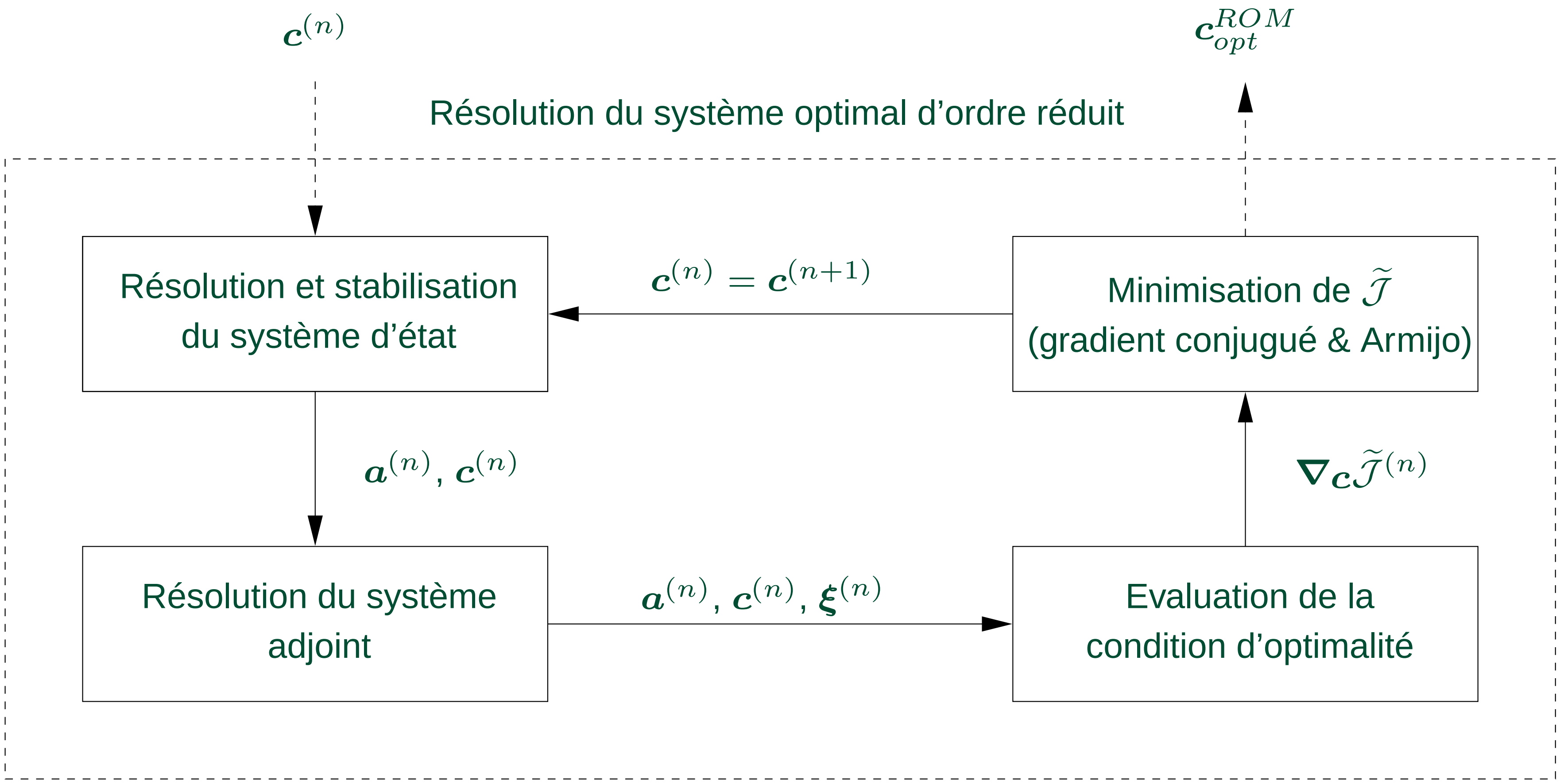


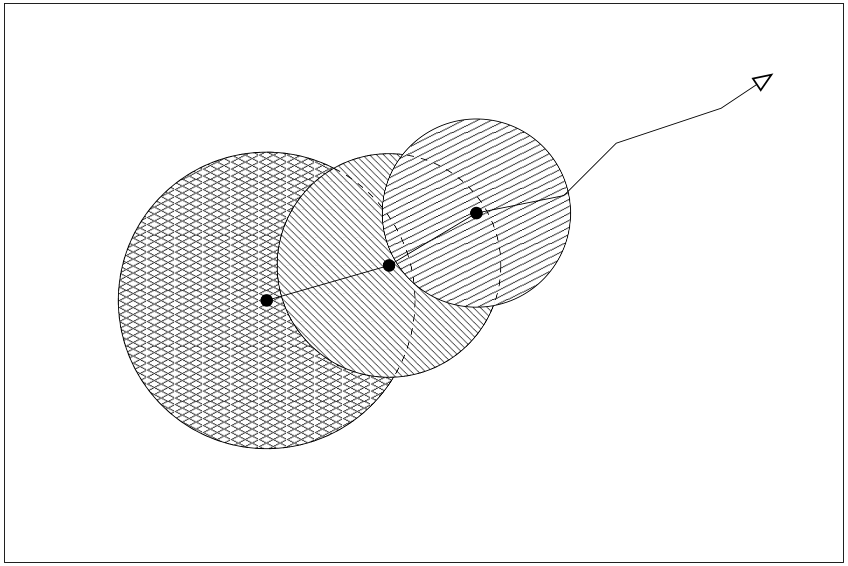
Fig. : *Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.*

III - Base POD réactualisée *Résolution du problème d'optimisation*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes pour "rafraîchir" la base POD ?

$\longrightarrow$ Déterminer un domaine de validité du modèle réduit

- Domaine "infini" (pas de contraintes)
- Détermination empirique : méthode adaptative
- Détermination automatique : méthode à région de confiance (TRPOD)



Avantages TRPOD

- ▶ Pas d'empirisme
- ▶ Preuves de convergence de la solution sous certaines conditions
- ▶ Coûts de calcul identiques à méthode adaptative

Conn, A.R., Gould, N.I.M. et Toint, P.L. (2000) : Trust-region methods. *SIAM, Philadelphia.*

Initialisation : $\boldsymbol{c}_0$, résolution du modèle de Navier-Stokes. $k = 0$.

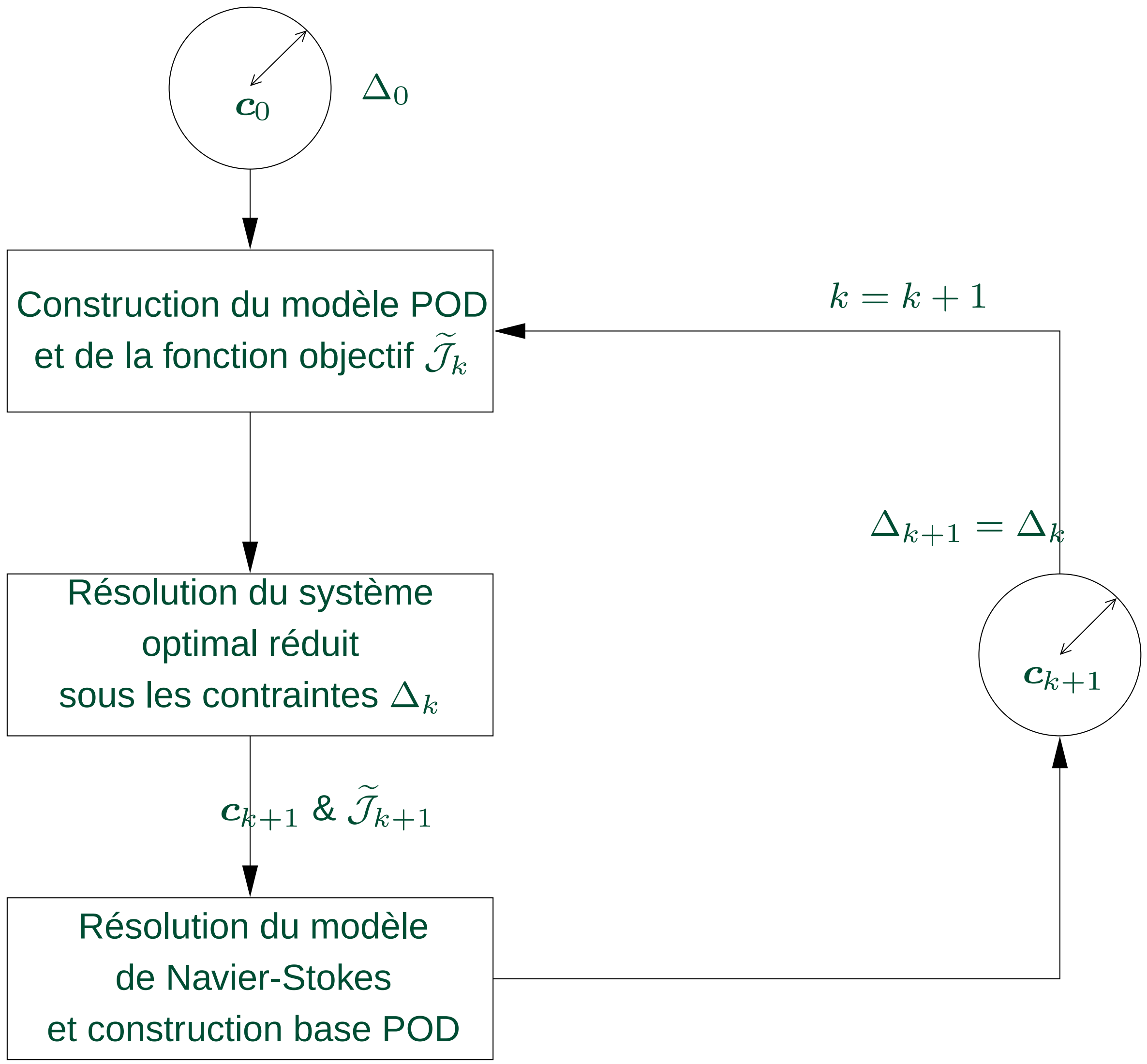
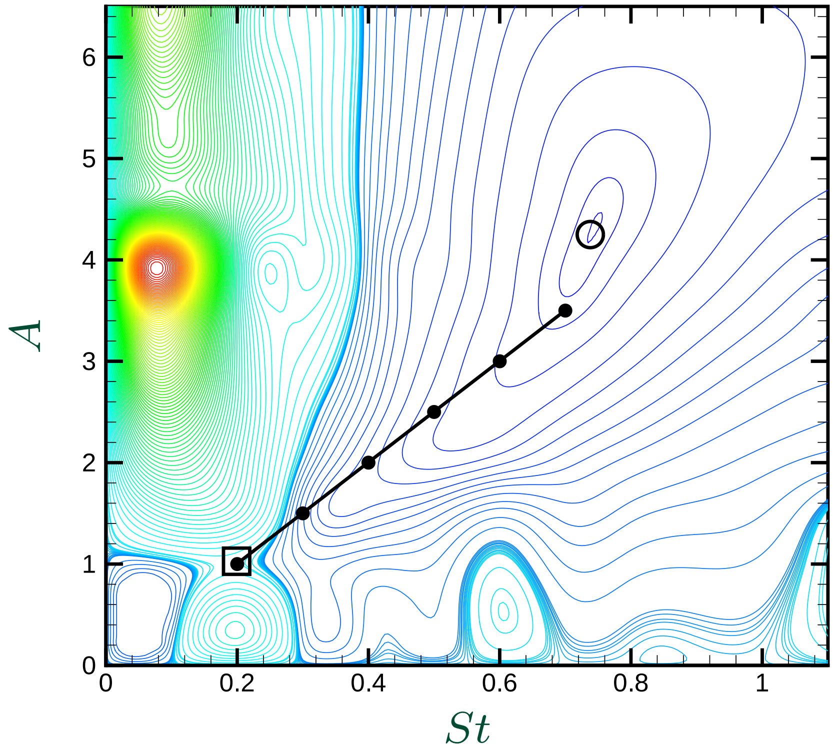
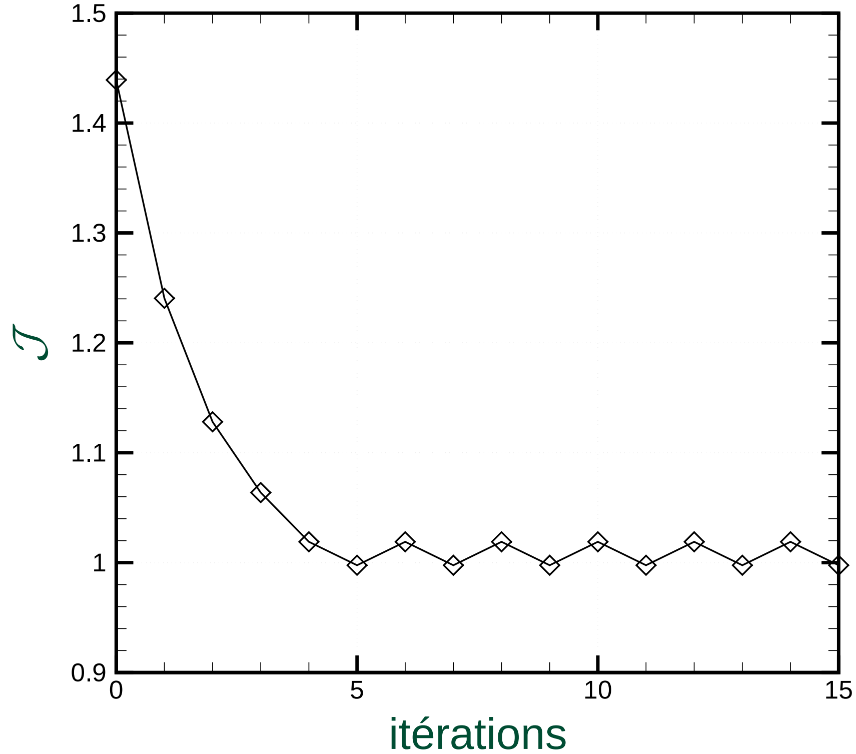


Fig. : *Schématisation de la méthode adaptative.*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 0,2$





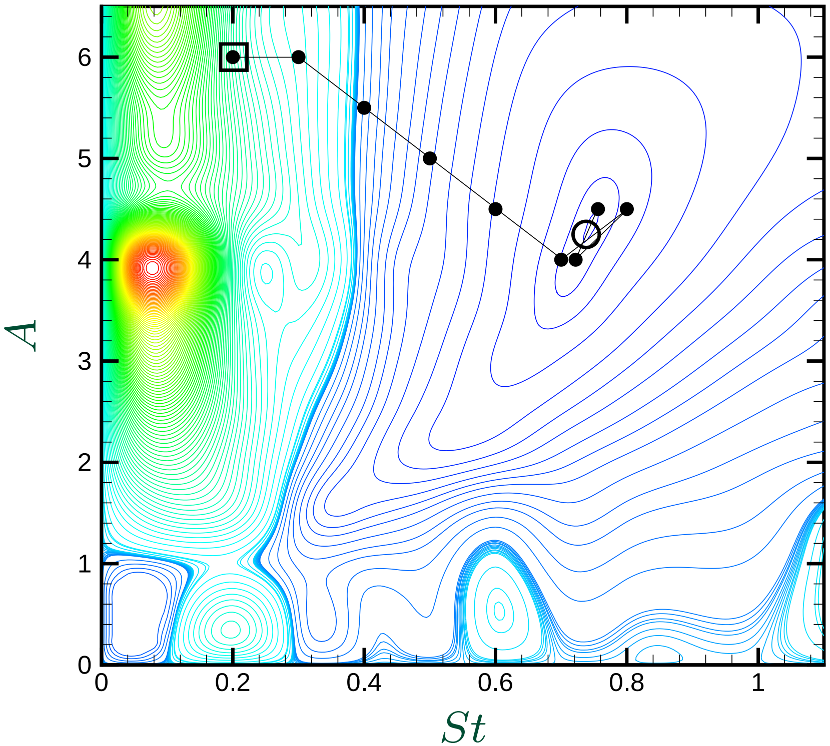
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 3,25$ et $St = 0,65$

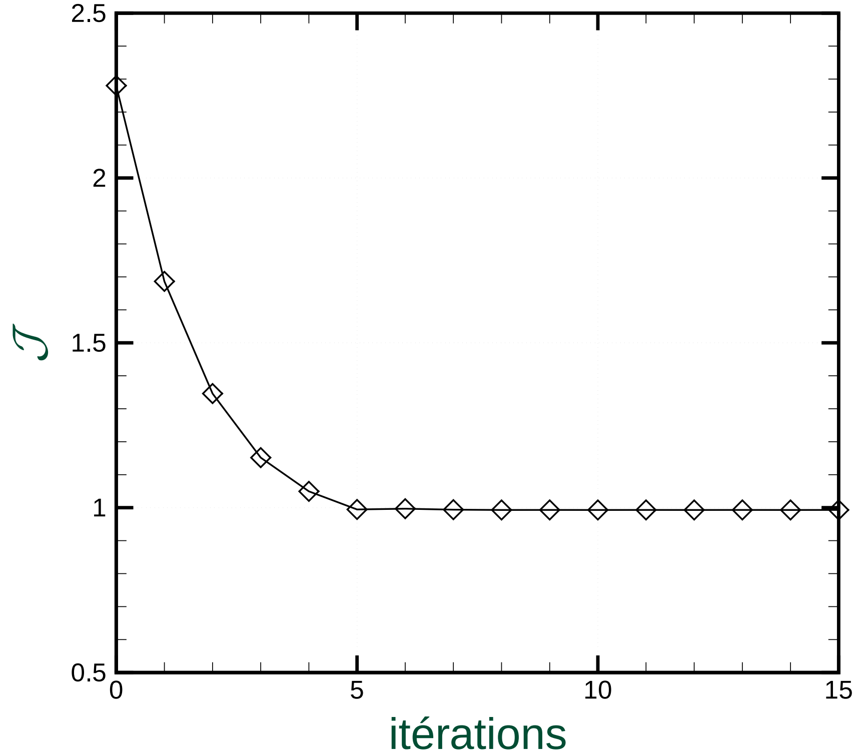
Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 1,01$

Pas de convergence...

III - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 0,2$



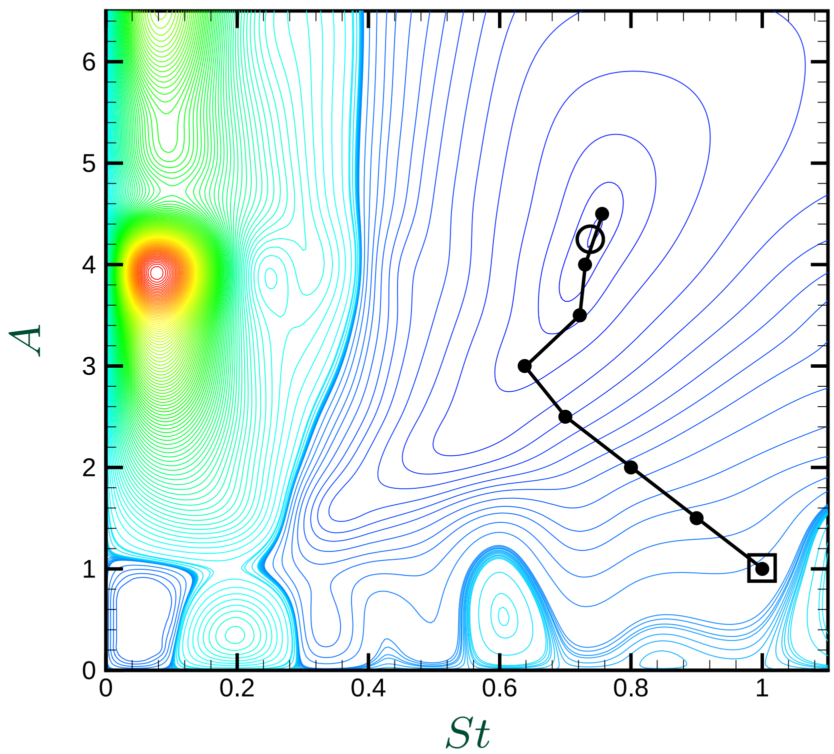


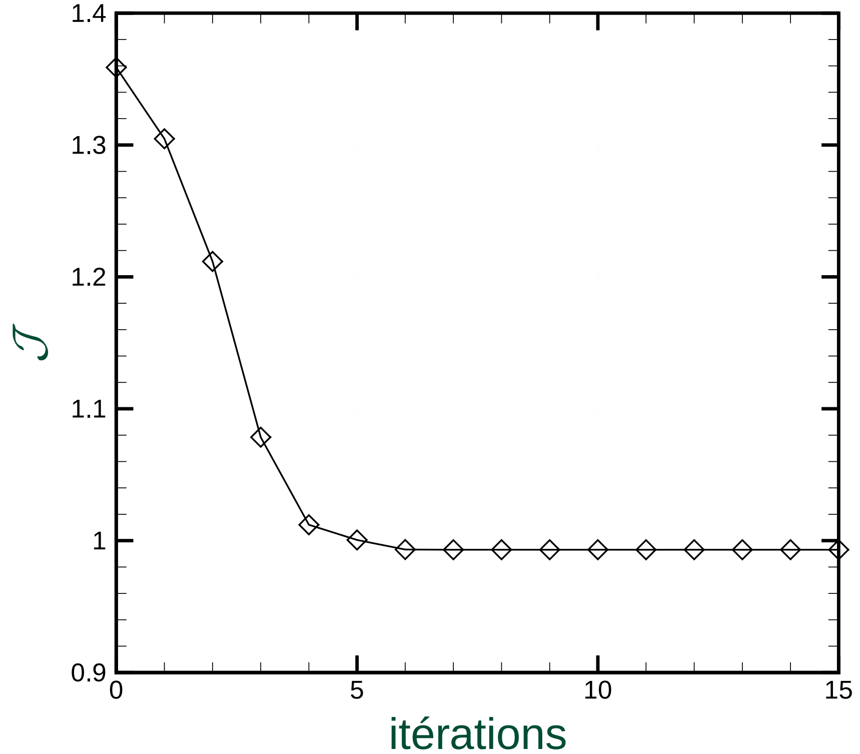
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 1,0$



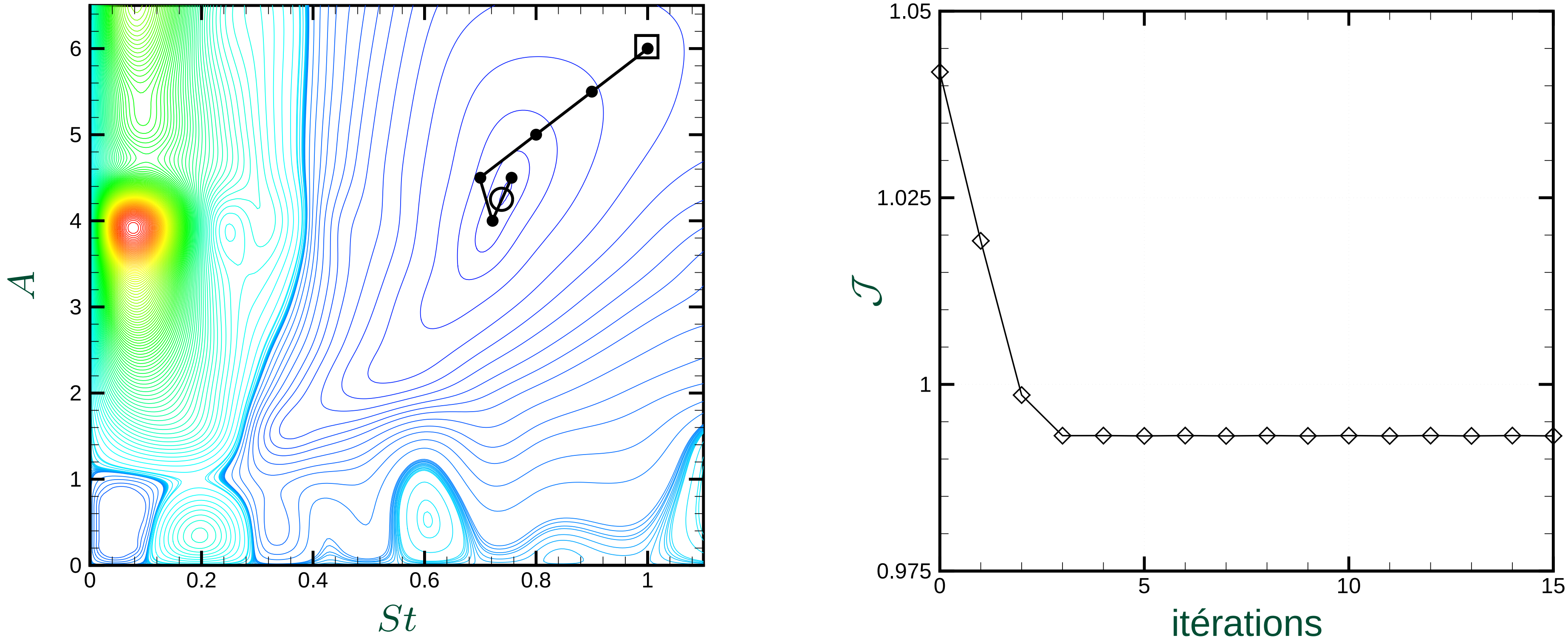


Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 1,0$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

Initialisation : $\boldsymbol{c}_0$, résolution du modèle de Navier-Stokes, $\mathcal{J}_0$. $k = 0$.

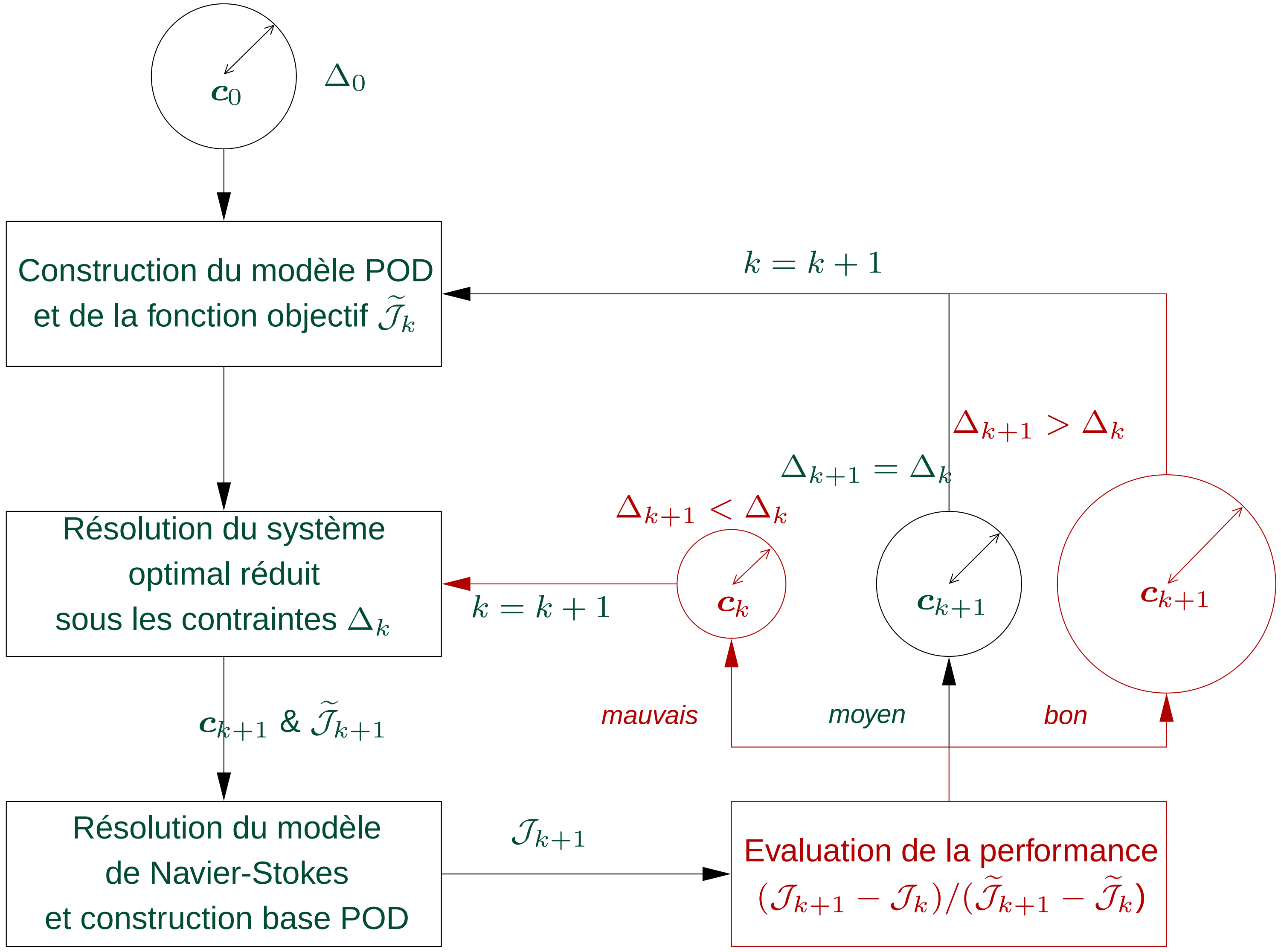
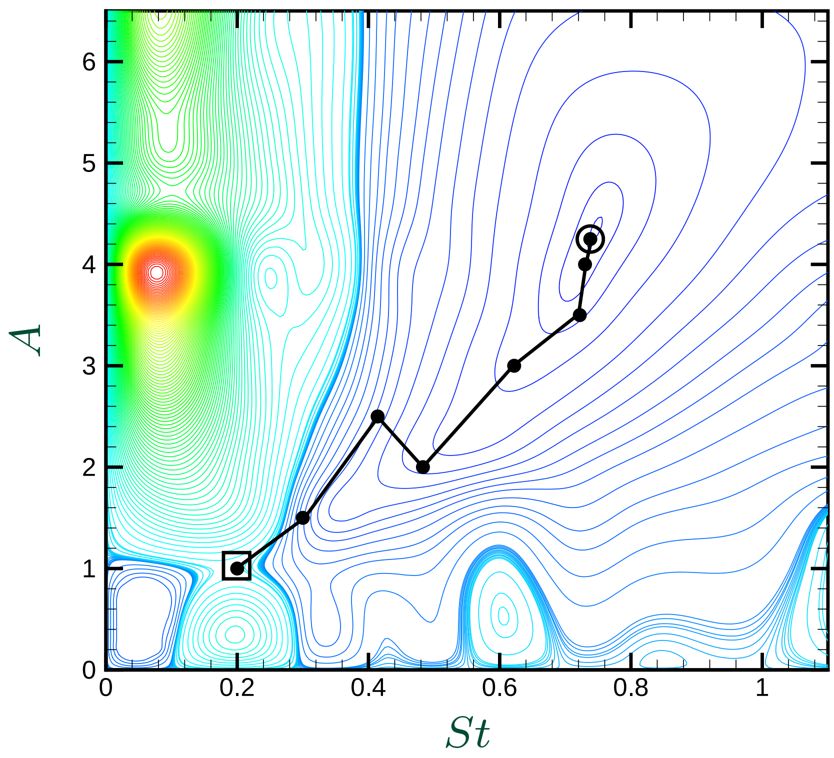
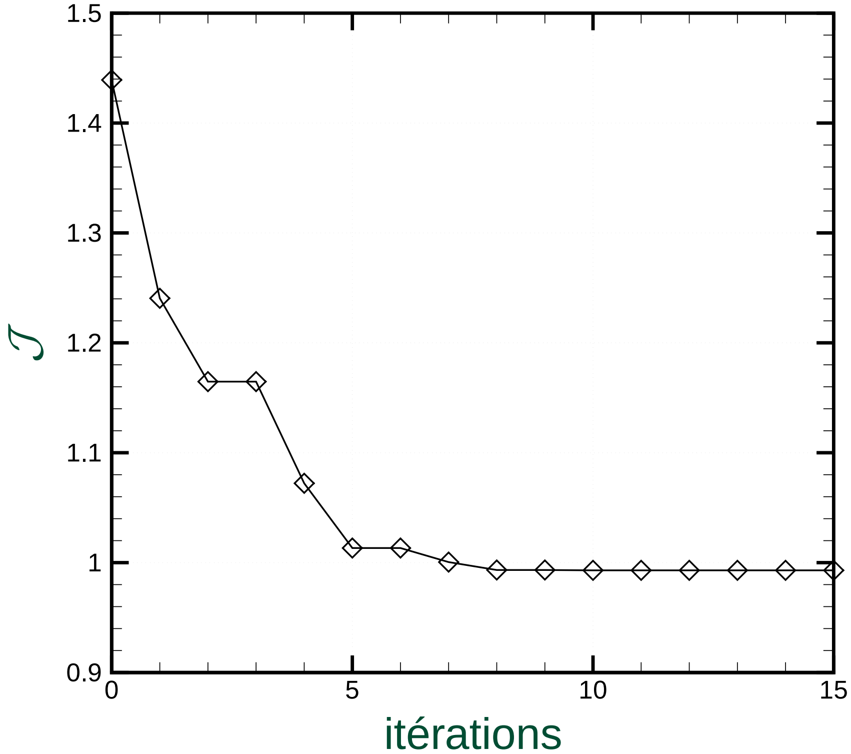


Fig. : *Schématisation de la méthode à région de confiance.*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 0,2$



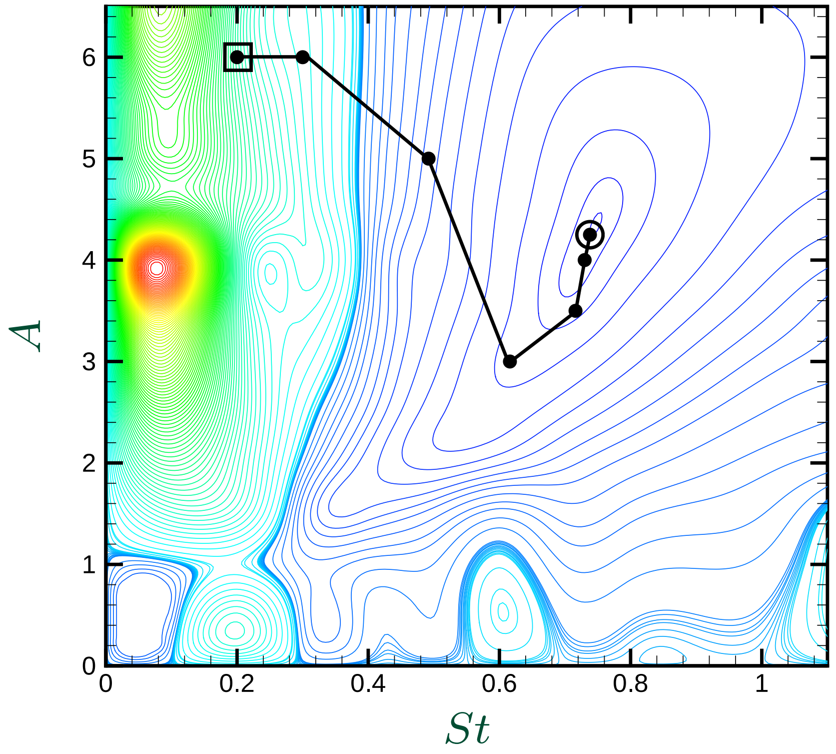


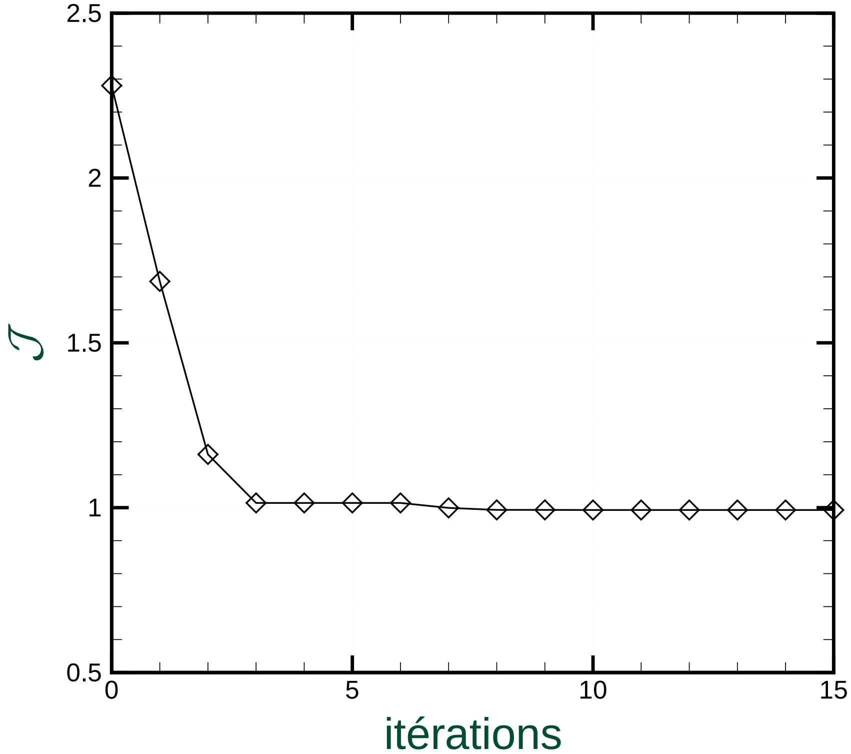
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 8 résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 0,2$



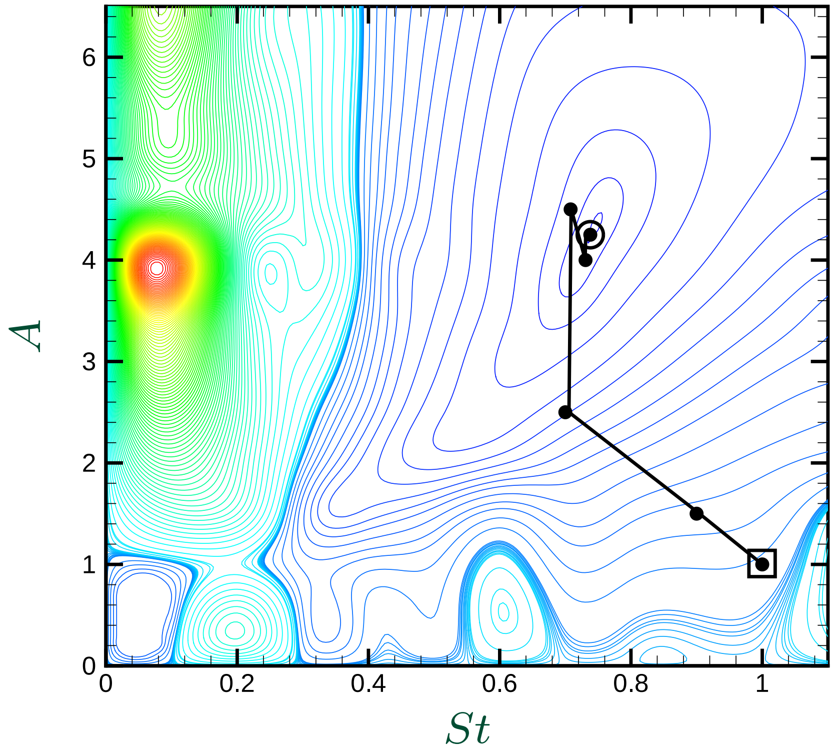


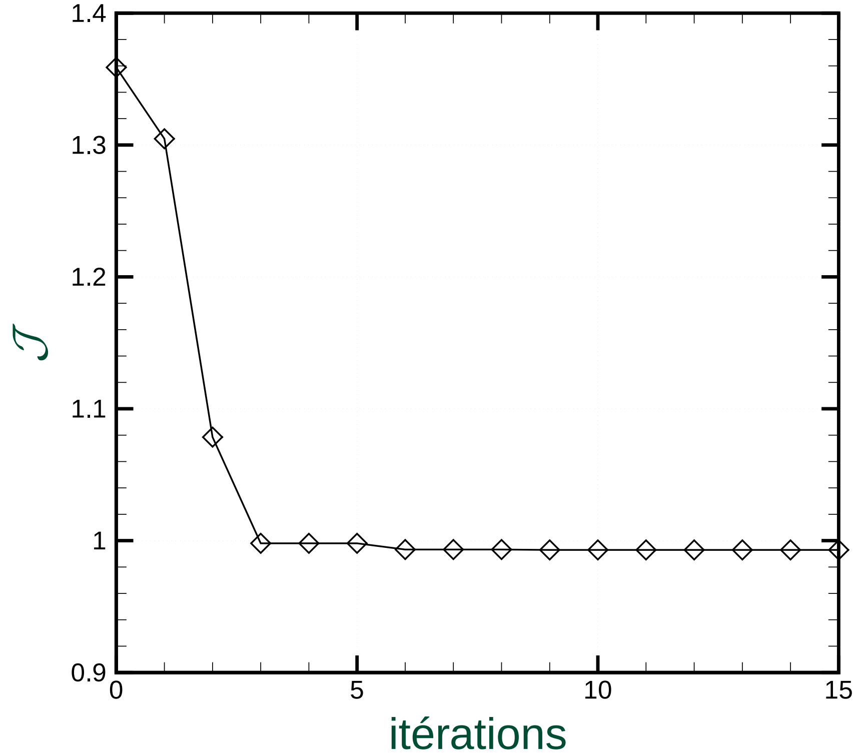
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 6 résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 1,0$



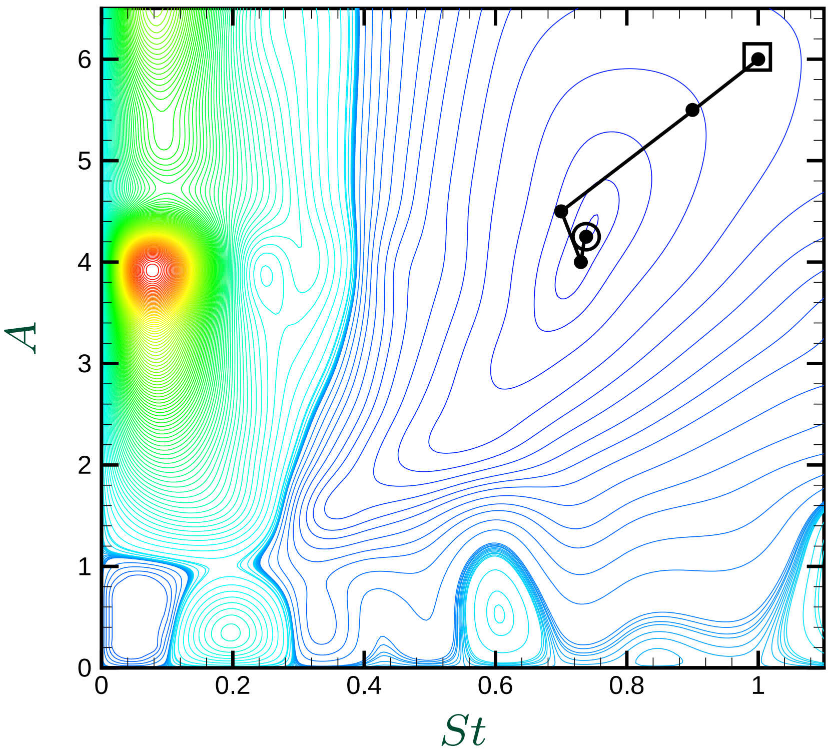


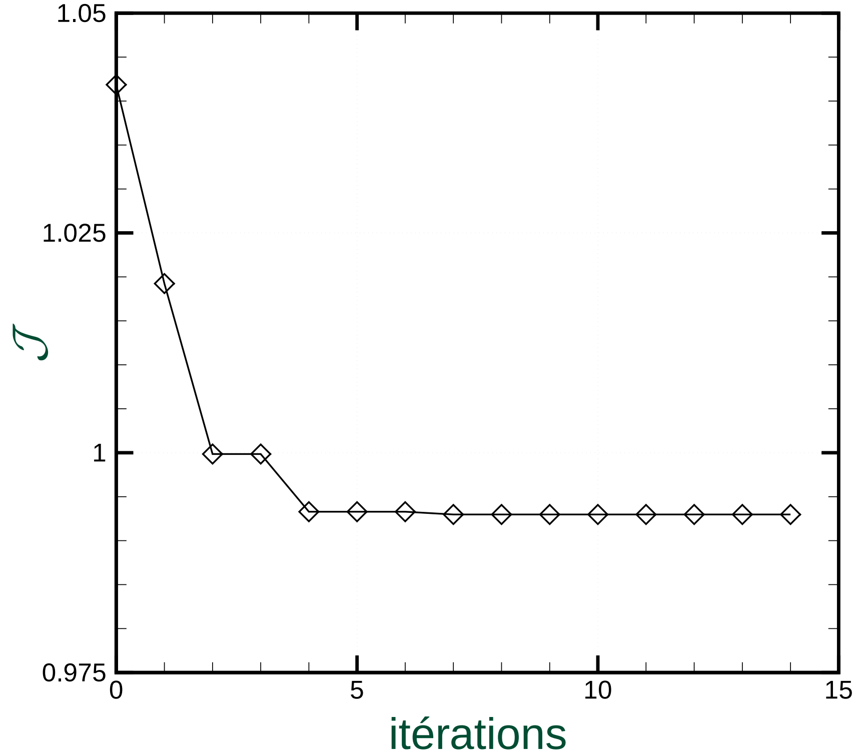
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

obtenus en uniquement 5 résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 1,0$



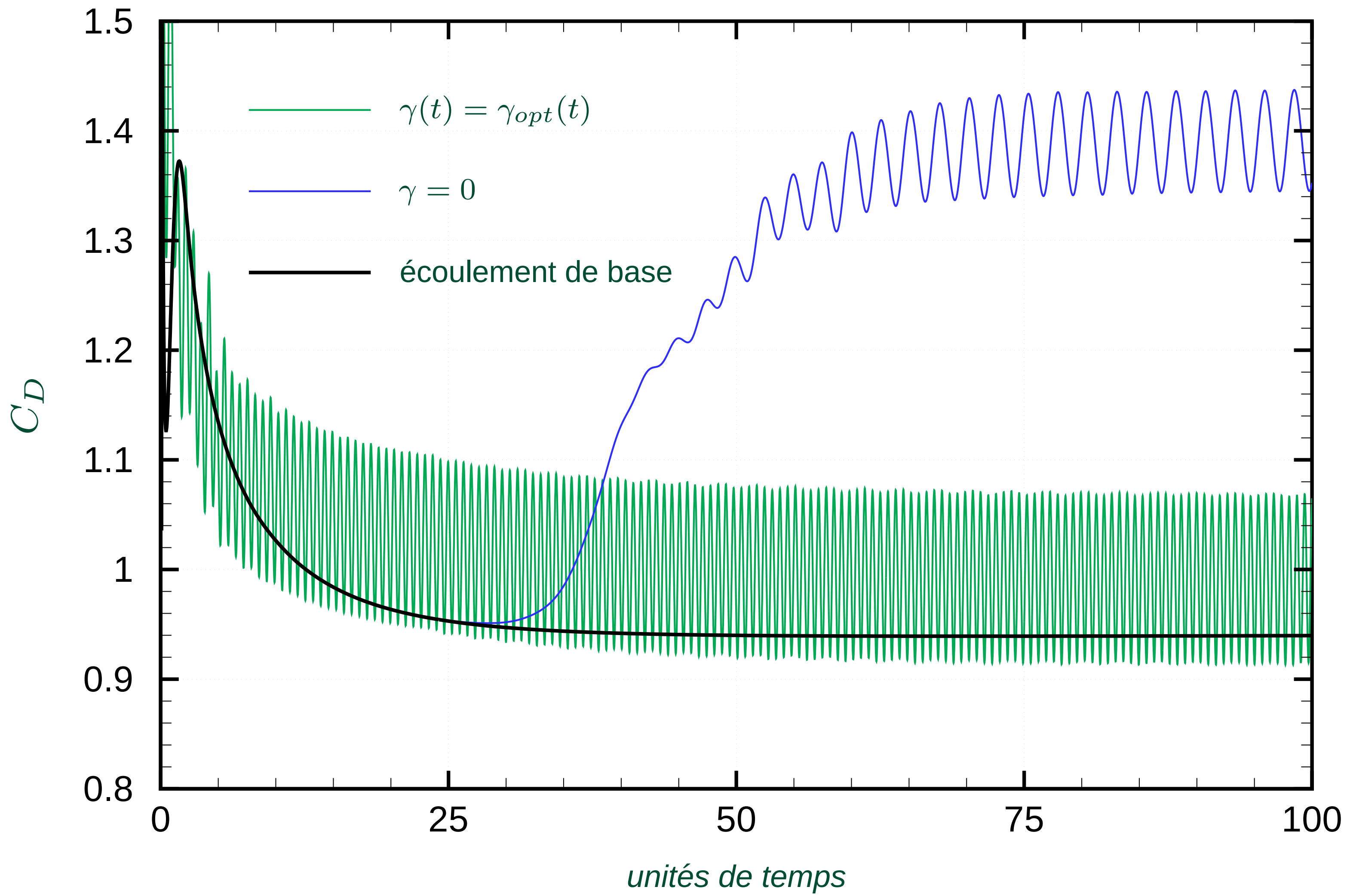


Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$,

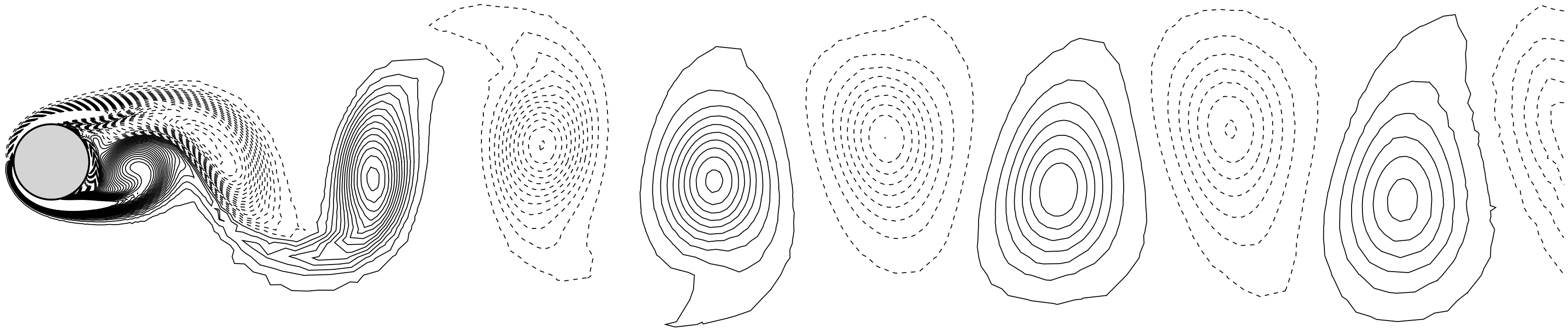
obtenus en uniquement 4 résolutions de Navier-Stokes

▶ Loi de contrôle optimale : $\gamma_{opt}(t) = A \sin(2\pi St_f t)$ avec $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

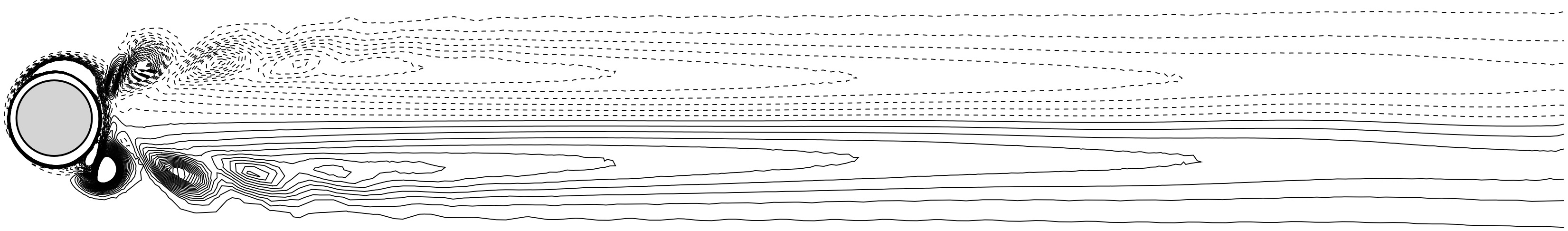


▶ Diminution relative du coefficient de traînée de 30% ($\mathcal{J}_0 = 1,4 \;\Rightarrow\; \mathcal{J}_{opt} = 0,99$)

III - Base POD réactualisée *Résultats numériques*



Écoulement non contrôlé, $\gamma = 0$.



Écoulement contrôlé, $\gamma = \gamma_{opt}$.

Fig. : *Isocontours de vorticité* ω_z.

Écoulement contrôlé : Sillage proche fortement instationnaire, sillage lointain (après 5 diamètres) stationnaire et symétrique $\longrightarrow$ écoulement de base stationnaire instable

Conclusions

Etude paramétrique

▶ Paramètres de contrôle "optimaux" : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

▶ $(A,\ St_f)$ liés : $\Theta = \dfrac{A}{\pi St_f} = 95°$

Optimisation avec réactualisation de la base POD (*TRPOD*)

▶ Loi de contrôle *optimale* harmonique : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

$\hookrightarrow$ 30% de réduction relative de traînée

▶ Réduction des coûts de calculs - comparaison control optimal POD/NSE

$\hookrightarrow$ En temps : 4 fois, en mémoire $1\,600$ fois

TRPOD : technique appropriée et efficace pour le contrôle d'écoulements
avec preuves de convergence !

Perspectives

- Extension à des géométries complexes 3D en régime turbulent
  $\Rightarrow$ Ailes d'avion, automobiles
- Précautions sur le choix des réalisations
  $\Rightarrow$ Méthode *Centroidal Voronoï Tessellation* (CVT) proposée par Gunzburger
  $\Rightarrow$ Propriétés de stabilité (Rempfer, Noack)
- Amélioration de la représentativité POD ROM par *balanced POD* (Rowley, Willcox)
- Comparaisons avec expériences : même loi optimale ?
- Contrôle optimal Navier-Stokes : comparaisons coûts de calcul
- Prendre en compte le coût lié au contrôle : puissance gagnée/puissance dépensée
  - ▶ Contrôle partiel (3 paramètres de contrôle)
    $\Rightarrow$ Effet propulsif, signe écoulement moyen inversé,
    (premiers résultats encourageants)

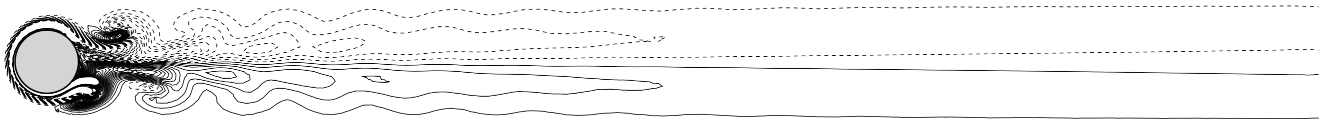


Fig. : *Contrôle sur la partie amont :* $-120^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$
[Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, à paraître]