# Optimisation aérodynamique par modèle réduit POD et méthode à région de confiance

Michel Bergmann, Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre Cedex, France

# Plan de l'exposé

Configuration et méthodes de résolutions numériques

Réduction de modèle

- Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)
- Choix des réalisations en optimisation
- Modes de non-équilibre
- Système dynamique

Formulation contrôle optimal POD ROM

- Fonction objectif
- Système optimal
- Résolution du système optimal

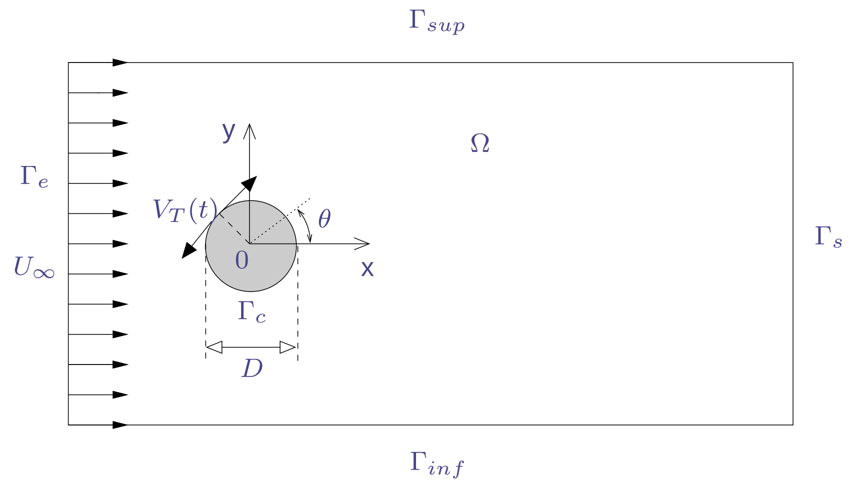
Résolution du problème d'optimisation en boucle fermée

- Présentation
- Méthode à région de confiance
- Résultats numériques

Conclusions et perspectives

# Configuration et méthodes de résolutions numériques

- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Oscillations du cylindre à une vitesse tangentielle $\gamma(t) = A\sin(2\pi S_t t)$

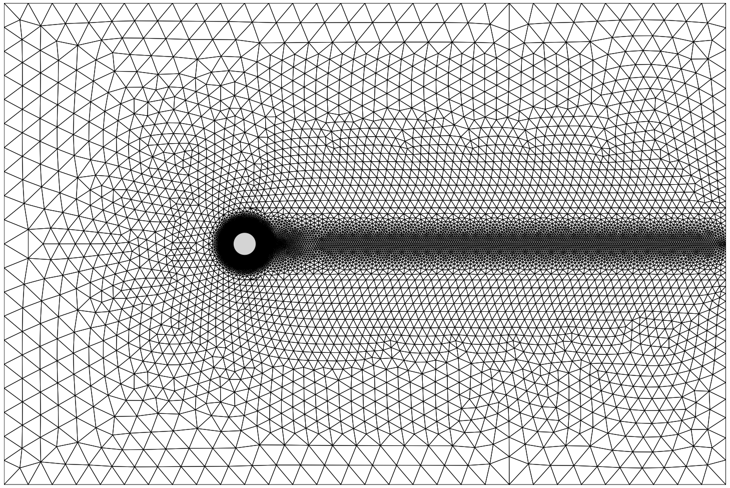


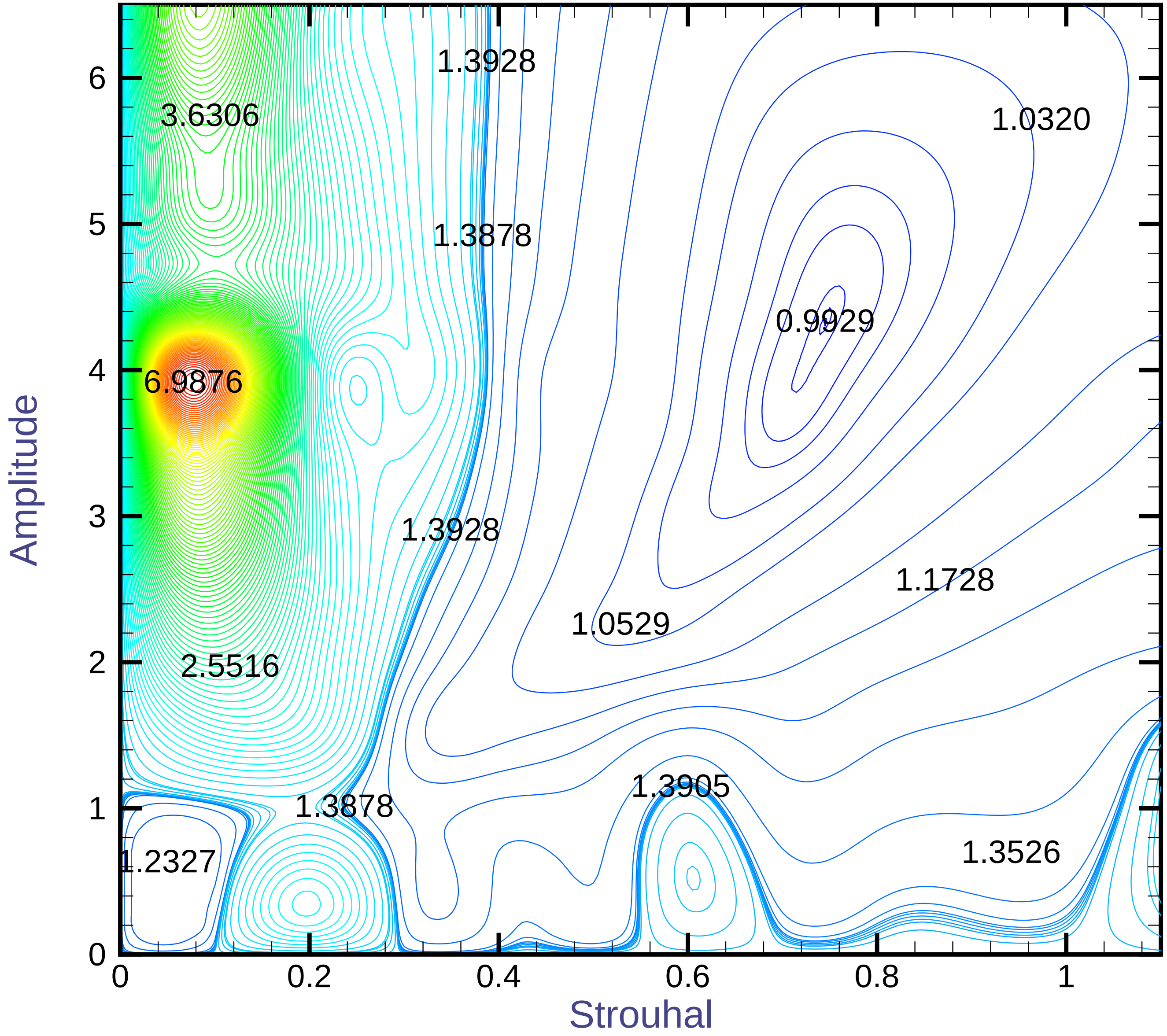

▷ Déterminer les paramètres $\boldsymbol{c} = (A,\, St)^T$ qui minimisent le coefficient de traînée moyen

- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis $(P_1, P_1)$ en espace

---

*Code de calcul développé par M.Braza et D. Ruiz (IMFT-ENSEEIHT).*






Coefficient de traînée moyen en fonction de l'amplitude et de la fréquence de forçage.

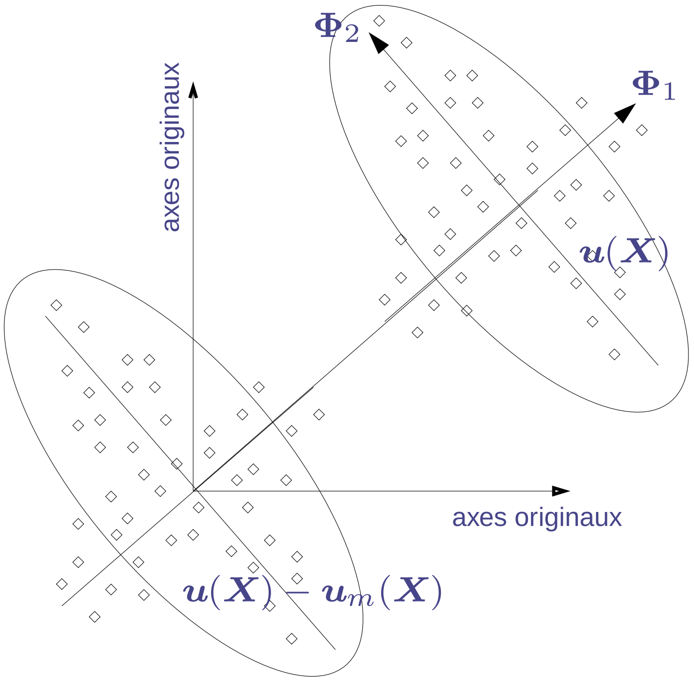
▶ Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

▶ Rechercher la réalisation $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$. ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$)

▶ $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ solution du problème :

$$\max_{\boldsymbol{\Phi}} \frac{\langle |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Phi})|^2 \rangle}{\|\boldsymbol{\Phi}\|^2}.$$

▶ Convergence optimale *en norme* $L^2$ (énergie) de $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$
$\Rightarrow$ réduction de dynamique envisageable.




Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

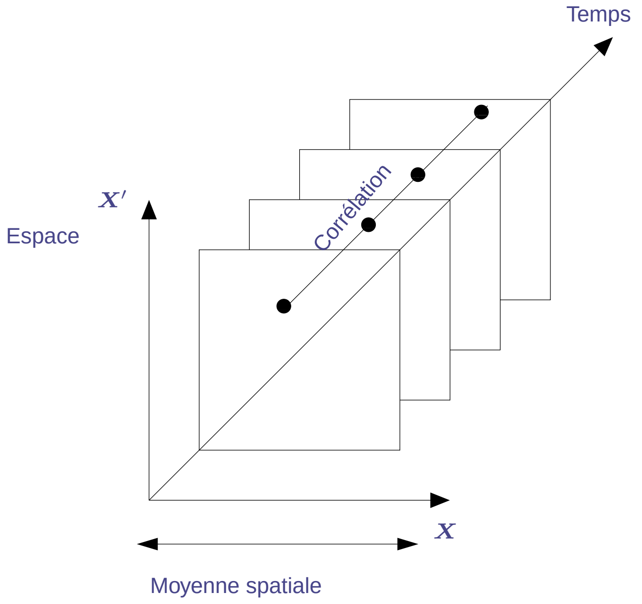
$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})\Phi_j^{(n)}(\boldsymbol{X'})\,d\boldsymbol{X'} = \lambda^{(n)}\Phi_i^{(n)}(\boldsymbol{X}) \qquad n = 1, .., N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X'})$ : *tenseur des corrélations spatio-temporelles.*

- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t,t')a^{(n)}(t')\,dt' = \lambda^{(n)}a^{(n)}(t)$$

$\hookrightarrow C(t,t')$ : *corrélations temporelles.*

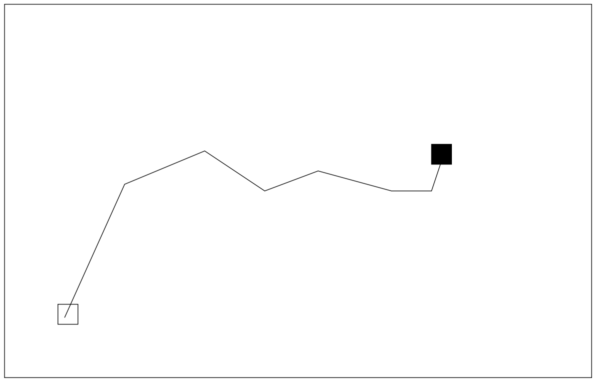



- $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ base de l'écoulement :

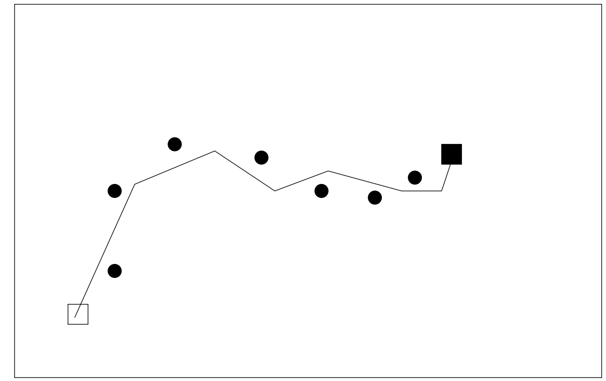
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t)\boldsymbol{\Phi}^{(n)}(\boldsymbol{x}).$$

Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N$^\circ$ 3, pp. 561–571.

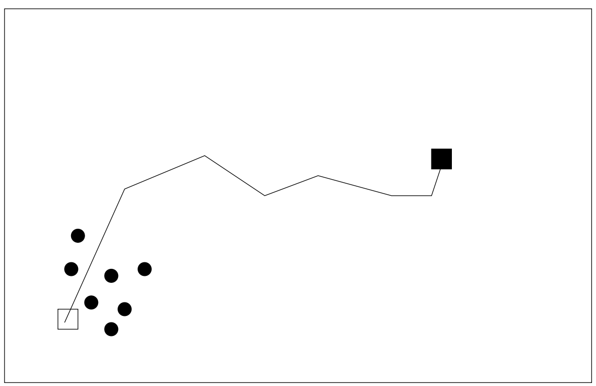
# **Réduction de modèle** *Choix des réalisations en optimisation*



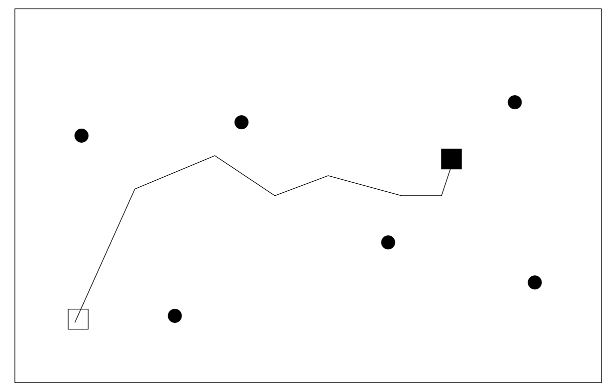
Configuration générale.



Echantillonnage idéal.



Echantillonnage inadapté.



Echantillonnage inadapté.

Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle. —— chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation, ● réalisation utilisée pour la base de données.

# **Réduction de modèle** *Modes de non-équilibre*

- Nécessité de directions non prises en compte dans la base POD initiale $\{\mathbf{\Phi}_i\}_{i=1,\dots,N_{gal}}$

- Construction de $N_{neq}$ modes particuliers

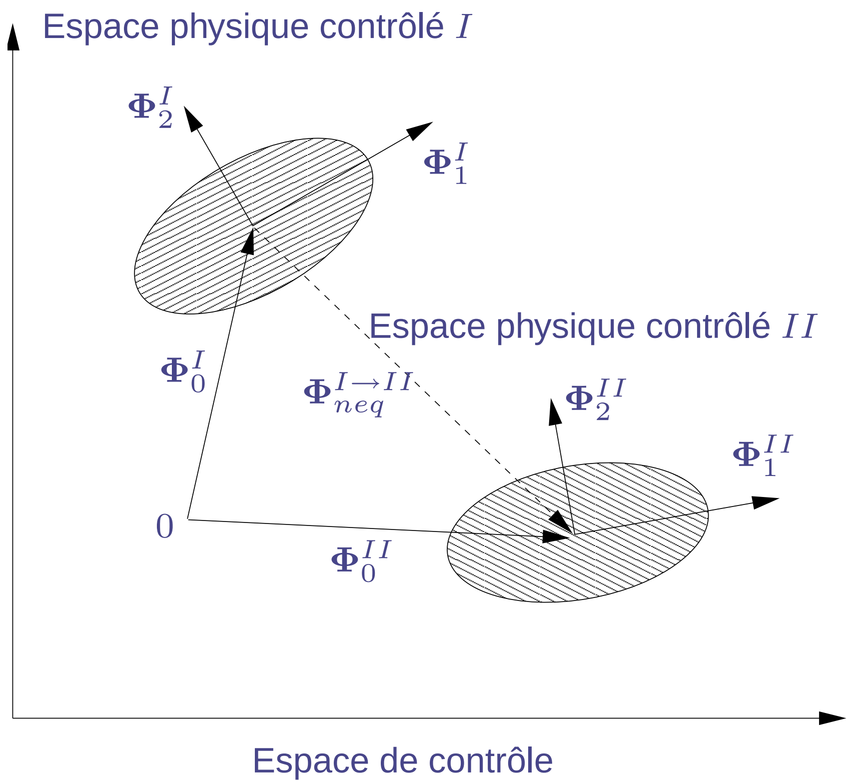
  - Vecteur translation entre le champ moyen $I$ et le champ moyen $II$ :

$$\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow II} = \mathbf{\Phi}_0^{II} - \mathbf{\Phi}_0^{I}.$$

  - Ajout à la base existante (Gram-Schmidt)

$$\mathbf{\Phi}_{N_{gal}+1}^{I} \equiv \widetilde{\mathbf{\Phi}}_0^{I\rightarrow II}.$$

  - Idem pour $\mathbf{\Phi}_0^{I\rightarrow III}$, etc...




Représentation schématique d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre.


Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. et Thiele, F. (2003) : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497** pp. 335–363.

- Projection de Galerkin de Navier-Stokes sur la base POD $\{\boldsymbol{\Phi}_i\}_{i=0,\dots,N_{gal}+N_{neq}}$ :

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, -\boldsymbol{\nabla}p + \frac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{u}\right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_i,\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = (p,\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Phi}_i) - \frac{1}{Re}\left((\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}_i)^T,\, \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\right) - [p\,\boldsymbol{\Phi}_i] + \frac{1}{Re}[(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Phi}_i].$$

avec $[\boldsymbol{a}] = \int_\Gamma \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Gamma$ et $(A,\,B) = \int_\Omega A : B\,d\Omega = \sum_{i,\,j}\int_\Omega A_{ij}B_{ji}\,d\Omega$.

- Décomposition de la vitesse sur $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\, t) = \gamma(\boldsymbol{c},\, t)\, \boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}\,.$$

- Système dynamique avec $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes retenus (équations d'état) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t} &= \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij}\, a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk}\, a_j(t) a_k(t) \\ &\quad + \mathcal{D}_i \frac{d\,\gamma(\boldsymbol{c},\, t)}{d\,t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij}\, a_j(t) \right) \gamma(\boldsymbol{c},\, t) + \mathcal{G}_i \gamma(\boldsymbol{c},\, t)^2. \\ a^{(i)}(0) &= (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\, 0),\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})). \end{aligned}\right.$$

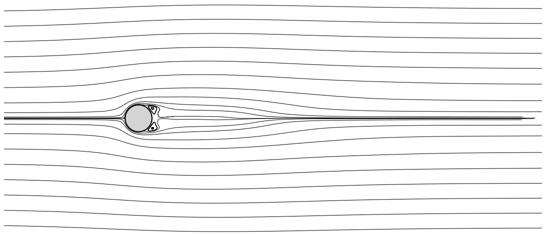
$\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent de $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}_c$ et $Re$.

## **Réduction de modèle** *Aspects physiques et dynamiques des modes POD*

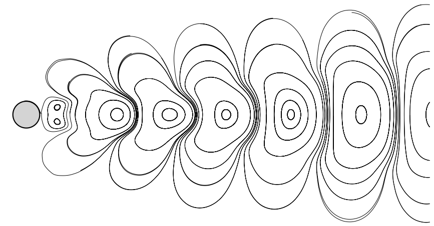
| Aspects physiques | Modes | Aspects dynamiques |
|---|---|---|
| **fonction de contrôle** | $\boldsymbol{u}_c$ | dynamique pré-déterminée |
| **mode écoulement moyen** | $\boldsymbol{u}_m,\ i = 0$ | $a_0 = Cste$ |
| **modes POD Galerkin**<br>correspondent à la physique de l'écoulement | $i = 1$ | **Système dynamique**<br>modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$) |
| | $i = 2$ | |
| | $\cdots$ | |
| | $i = N_{gal}$ | |
| **modes de non-équilibre**<br>correspondent à des directions privilégiées | $i = N_{gal} + 1$ | |
| | $\cdots$ | |
| | $i = N_{gal} + N_{neq}$ | |

Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.

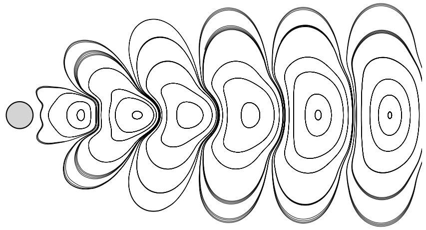
# **Réduction de modèle** *Modes POD Galerkin et modes de non-équilibre*



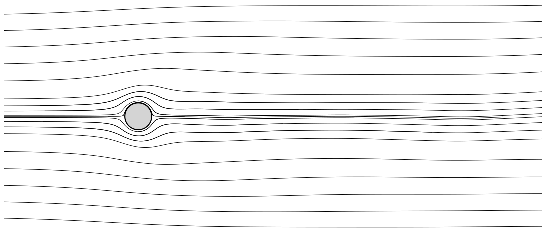
Éclt. contrôlé ($I$) moyen



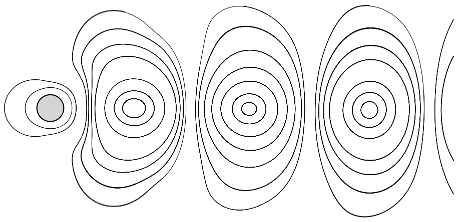
1er mode POD de $I$



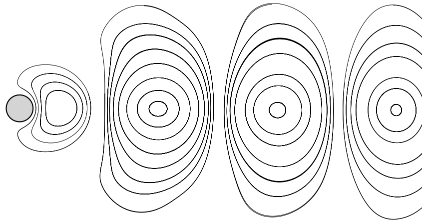
2nd mode POD de $I$



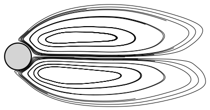
Éclt. contrôlé ($II$) moyen



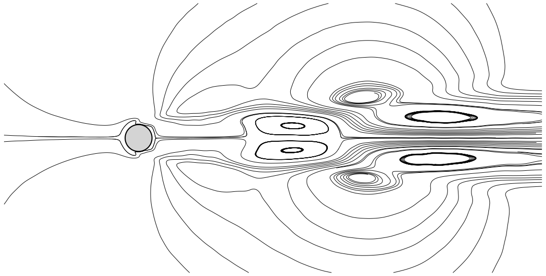
1er mode POD de $II$



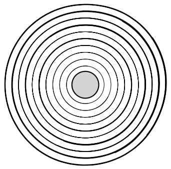
2nd mode POD de $II$



Mode shift de $I$ vers $II$



Mode shift de $I$ vers base



Fonction de contrôle

- Opérateur *de traînée*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R} \\ \boldsymbol{u} &\mapsto 2\int_{\Gamma_c}\left(u_3 n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial x}n_x - \frac{1}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial y}n_y\right)\, d\Gamma.\end{aligned}$$

- En variables réduites,
  - $\hookrightarrow$ Coefficient de traînée réel Navier-Stokes $C_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{U})$ avec $\boldsymbol{U} = (u,\, v,\, p)^T$
  - $\hookrightarrow$ Coefficient de traînée modélisé par POD $\widetilde{C}_D = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\boldsymbol{U}})$ avec $\widetilde{\boldsymbol{U}} = (\widetilde{u},\, \widetilde{v},\, \widetilde{p})^T$

- Problème : $\widetilde{p}$ n'est pas connu

$\hookrightarrow$ La base POD est étendue au champ de pression : $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi},\, \Phi^p)$

$\Rightarrow$ Corrélations avec pression $C(t,t') = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_\Omega U_i(\boldsymbol{x},t)U_i(\boldsymbol{x},t')\, d\boldsymbol{x}$

# Formulation contrôle optimal ROM POD *Fonction objectif*

- Décomposition

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\, t) = \gamma(\boldsymbol{c},\, t)\, \boldsymbol{U}_c(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t)\, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})}_{\text{modes de non-équilibre}} .$$

- Evolution du coefficient de traînée modélisé par POD

$$\widetilde{C}_D(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \quad \text{avec} \quad N_i = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\Phi}_i).$$

- Fonction objectif modélisée par POD (coefficient de traînée moyen)

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \, dt.$$

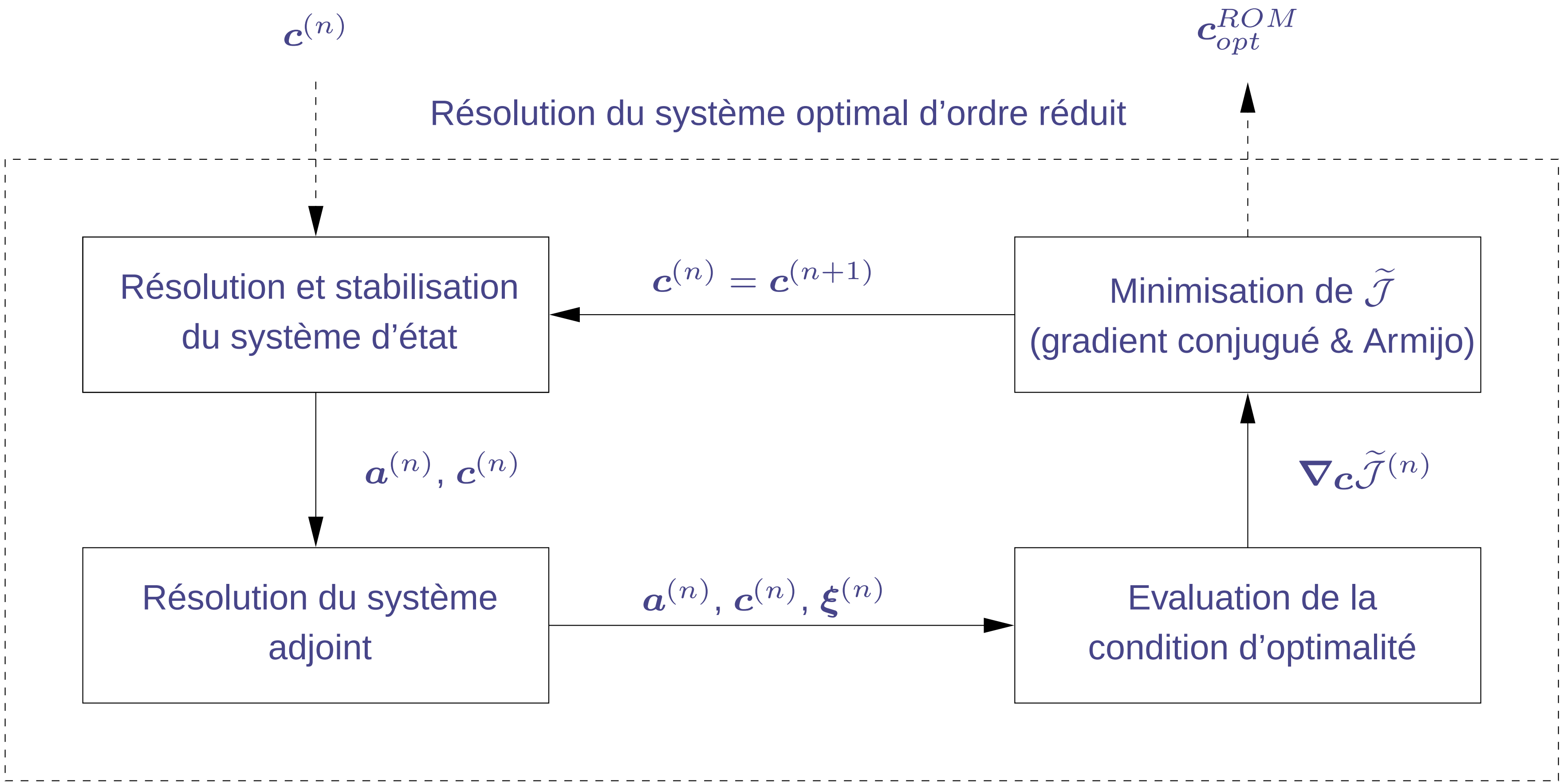
- Système dynamique adjoint :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\xi_i(t)}{dt} = -\displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left( \mathcal{B}_{ji} + \gamma(\boldsymbol{c},\, t)\,\mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}\right) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \dfrac{1}{T} N_i, \\ \\ \xi_i(T) = 0. \end{cases}$$

- Conditions d'optimalité

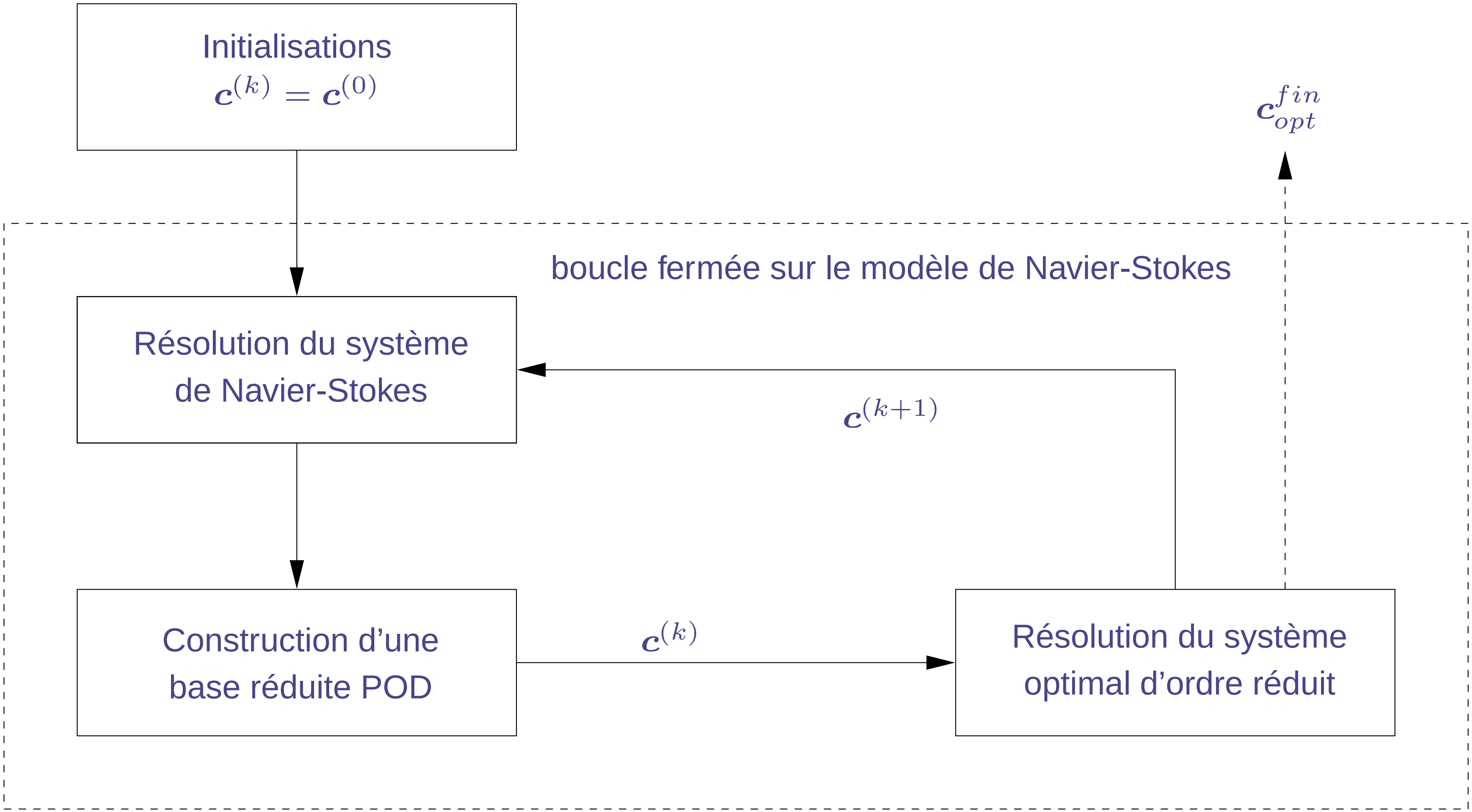
$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left( \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\, \gamma\, dt.$$

avec $\mathcal{L}_i = -\dfrac{d\xi_i}{dt}\mathcal{D}_i + \xi_i \left( \mathcal{E}_i + \displaystyle\sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\boldsymbol{c},\, t)\mathcal{G}_i \right)$




Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.

# Résolution du problème d'optimisation *Présentation*

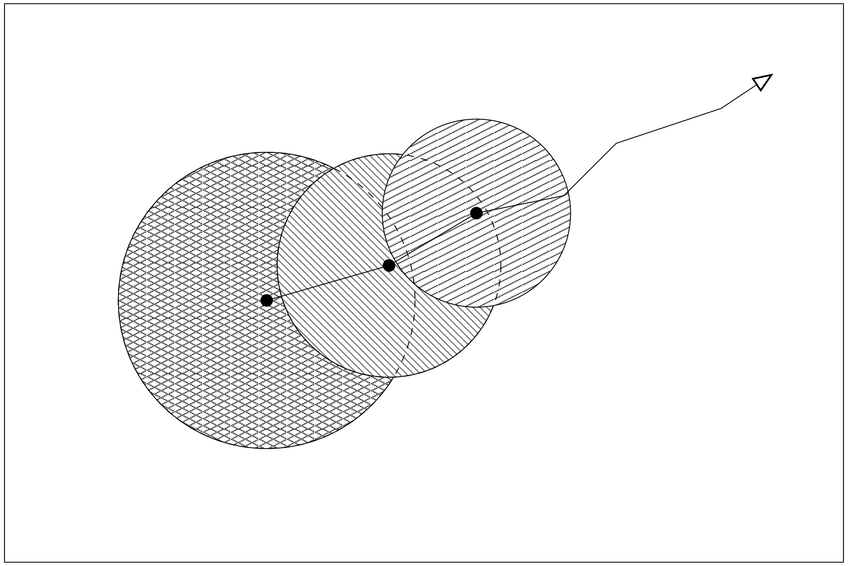



Représentation schématique de la méthode d'optimisation adaptative POD en boucle fermée.

Quand avoir recours au modèle détaillé ?

# **Résolution du problème d'optimisation** *Présentation*

$\longrightarrow$ Déterminer un domaine de validité du modèle réduit



- Domaine "infini" (pas de contraintes)
- Détermination empirique : méthode adaptative
- Détermination automatique : méthode à région de confiance (TRPOD)

Avantages TRPOD

- ▶ Pas d'empirisme
- ▶ Preuves de convergence de la solution sous certaines conditions

Conn, A.R., Gould, N.I.M. et Toint, P.L. (2000) : Trust-region methods. *SIAM, Philadelphia.*

Choix de constantes $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$, et $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 \leq \gamma_3$.
Choix d'un rayon de la région $\Delta_0$, et choix de $\boldsymbol{c}_0$. Détermination d'un jeu de réalisations $\mathcal{U}_0$ et évaluation de la fonction objectif réelle $\mathcal{J}(\boldsymbol{c}_0)$. Initialisation $k = 0$.

1. Calcul d'une base POD avec $\mathcal{U}_k$ et construction d'un modèle réduit contrôlé.

2. Construction de la fonction modèle POD, $\widetilde{\mathcal{J}}$, et résolution (approchée) du problème

$$\boldsymbol{s}_k = \arg \min_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\boldsymbol{s}\| \leq \Delta_k.$$

3. Détermination de $\mathcal{U}_{k+}$, et de la fonction objectif réelle, $\mathcal{J}(\boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}_k)$. Calcul de $\rho_k$ :

$$\rho_k = \frac{\mathcal{J}(\boldsymbol{c}_k) - \mathcal{J}(\boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}_k)}{\widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{c}_k) - \widetilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}_k)}.$$

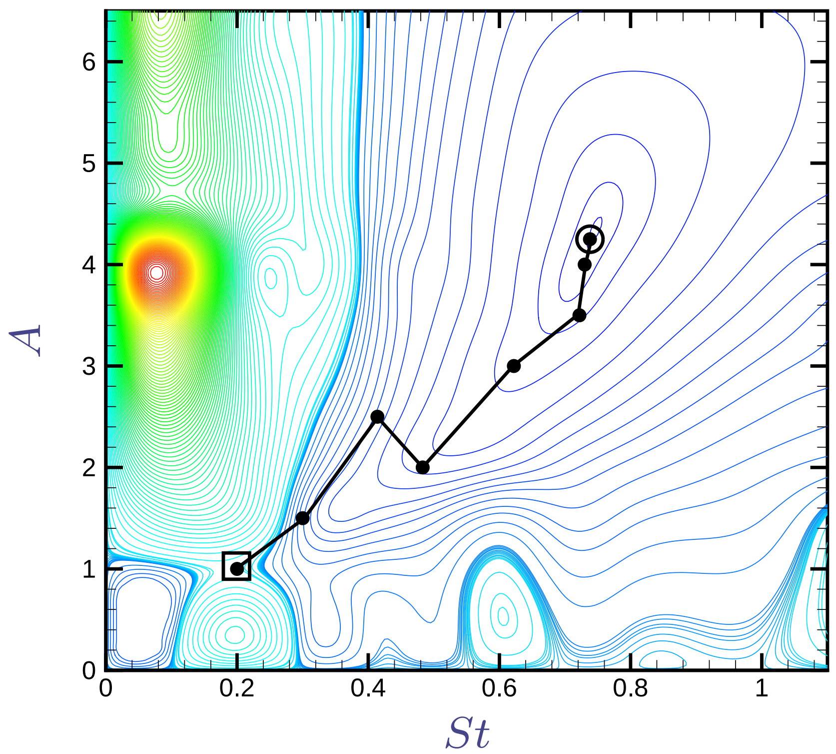
4. Actualisation du rayon de la région de confiance :

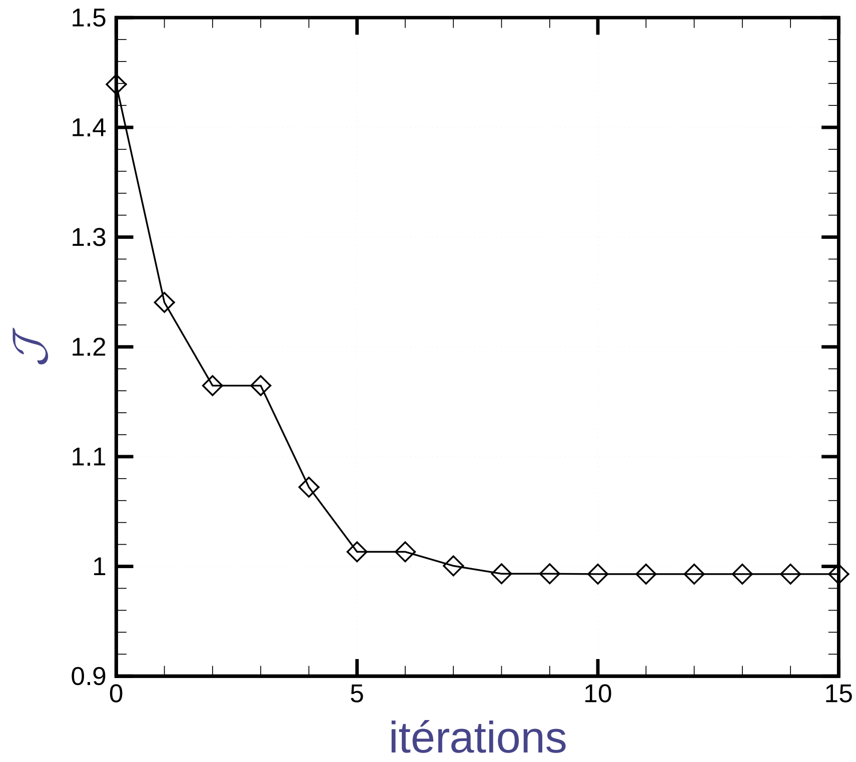
   (a) Si $\rho_k \geq \eta_2$, SUCCÈS : $\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}_k, \mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_{k+}$, et $\Delta_k = \gamma_3 \Delta_k$.
   Si convergence, stop. Sinon $k = k + 1$ et retour à l'étape $1$.

   (b) Si $\eta_1 \leq \rho_k \leq \eta_2$, SUCCÈS : $\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{s}_k, \mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_{k+}$ et $\Delta_k = \gamma_2 \Delta_k$.
   Si convergence, stop. Sinon $k = k + 1$ et retour à l'étape $1$.

   (c) Si $\rho_k < \eta_1$, ÉCHEC : $\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k, \mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_k$ et $\Delta_k = \gamma_1 \Delta_k$.
   $k = k + 1$ et retour à l'étape $2$.

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 0,2$



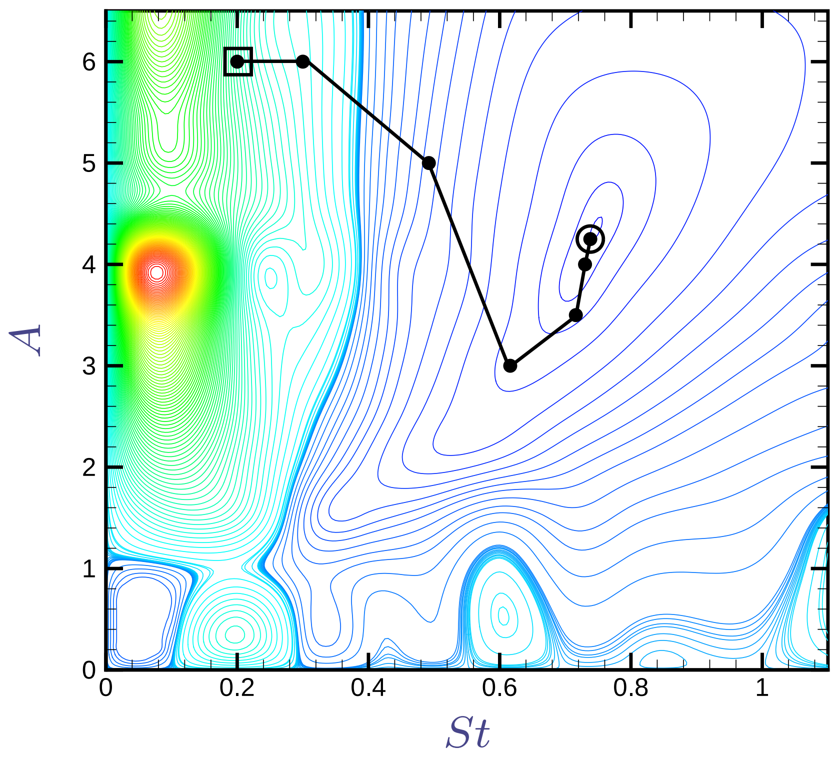



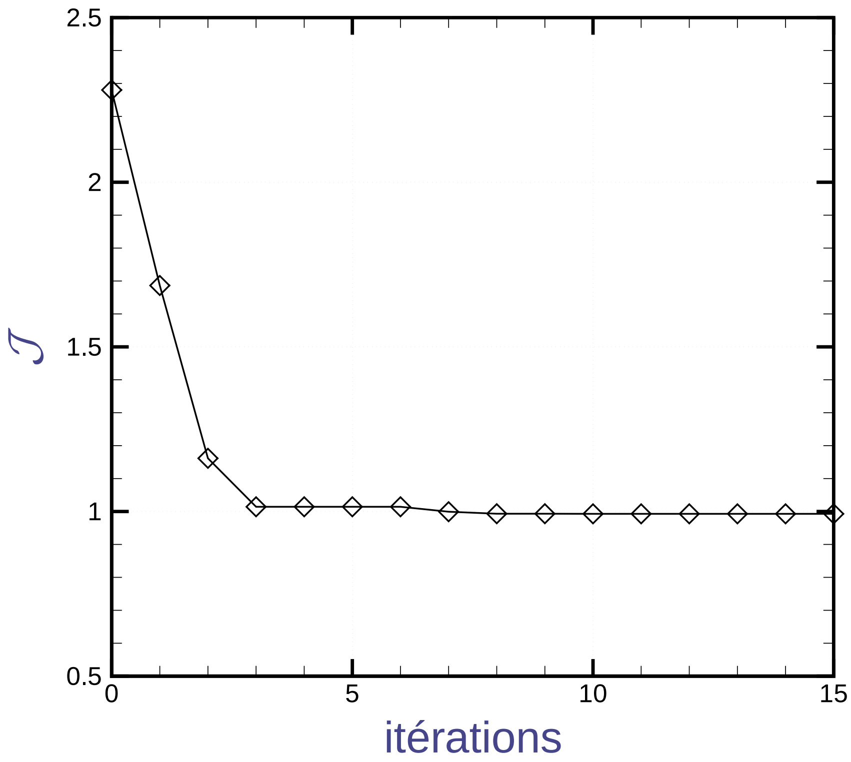

Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,99$

Obtenus en uniquement $8$ résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 0,2$



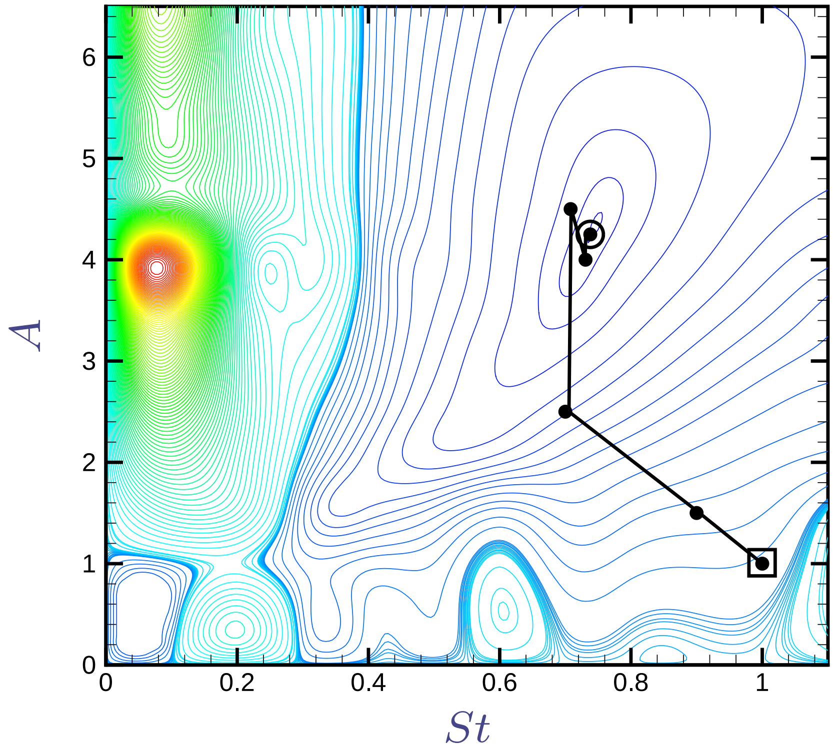



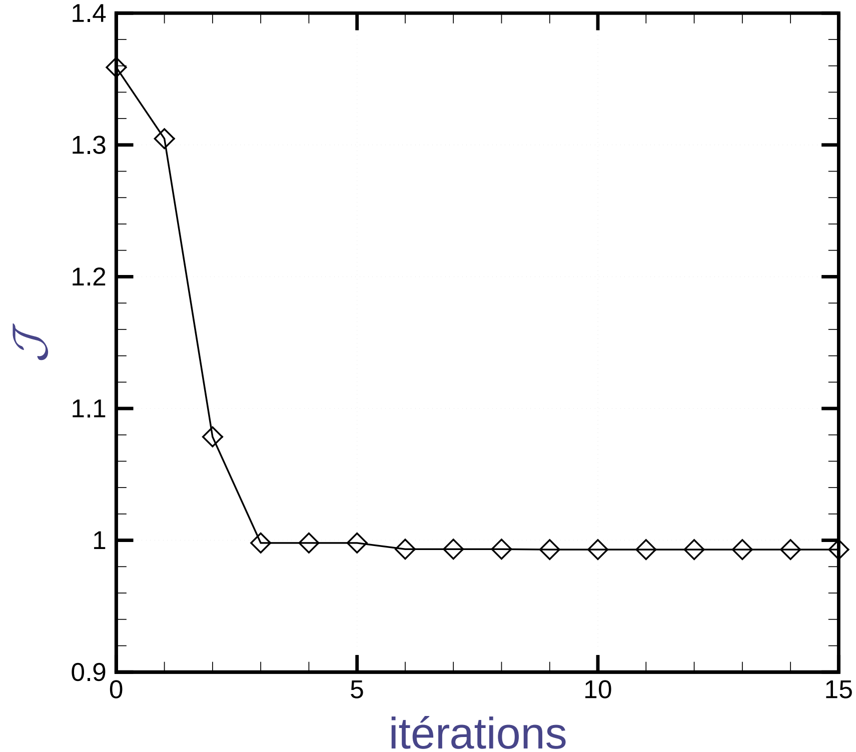

Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,99$

Obtenus en uniquement $6$ résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 1,0$



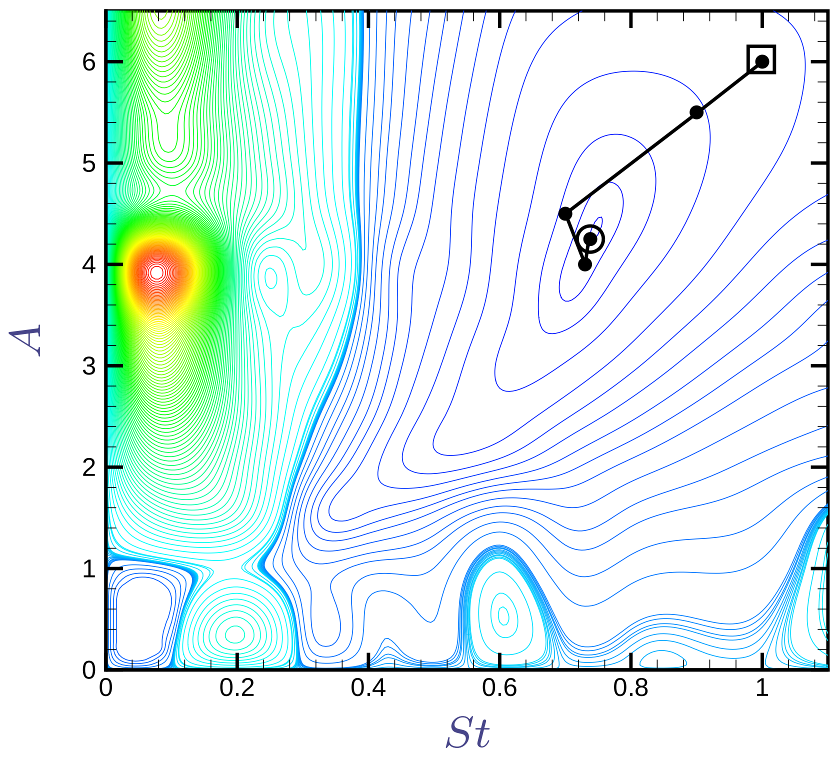



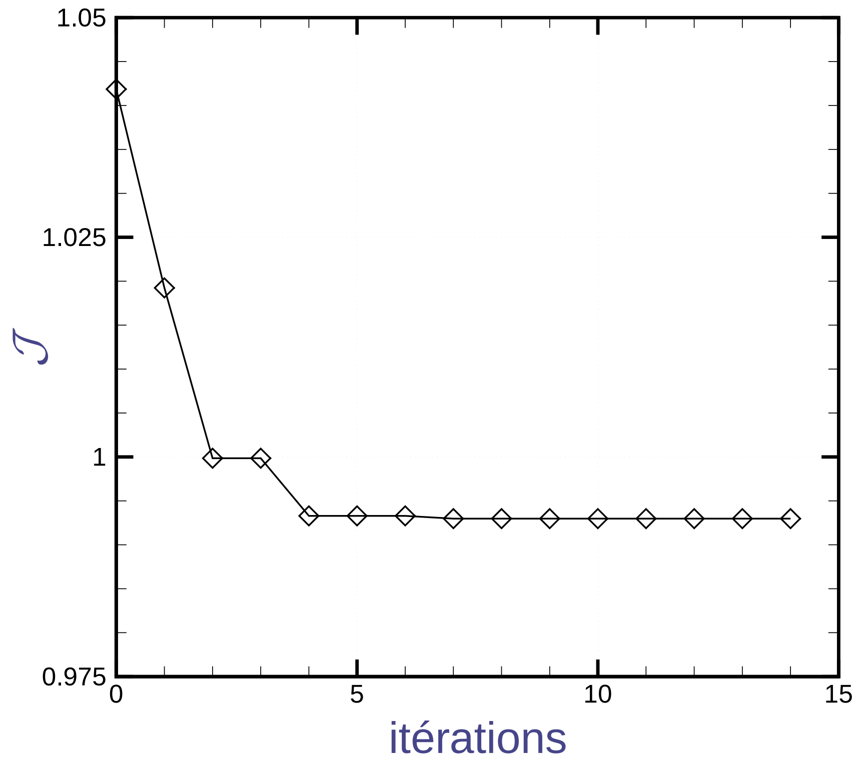

Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,99$

Obtenus en uniquement $5$ résolutions de Navier-Stokes

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 1,0$



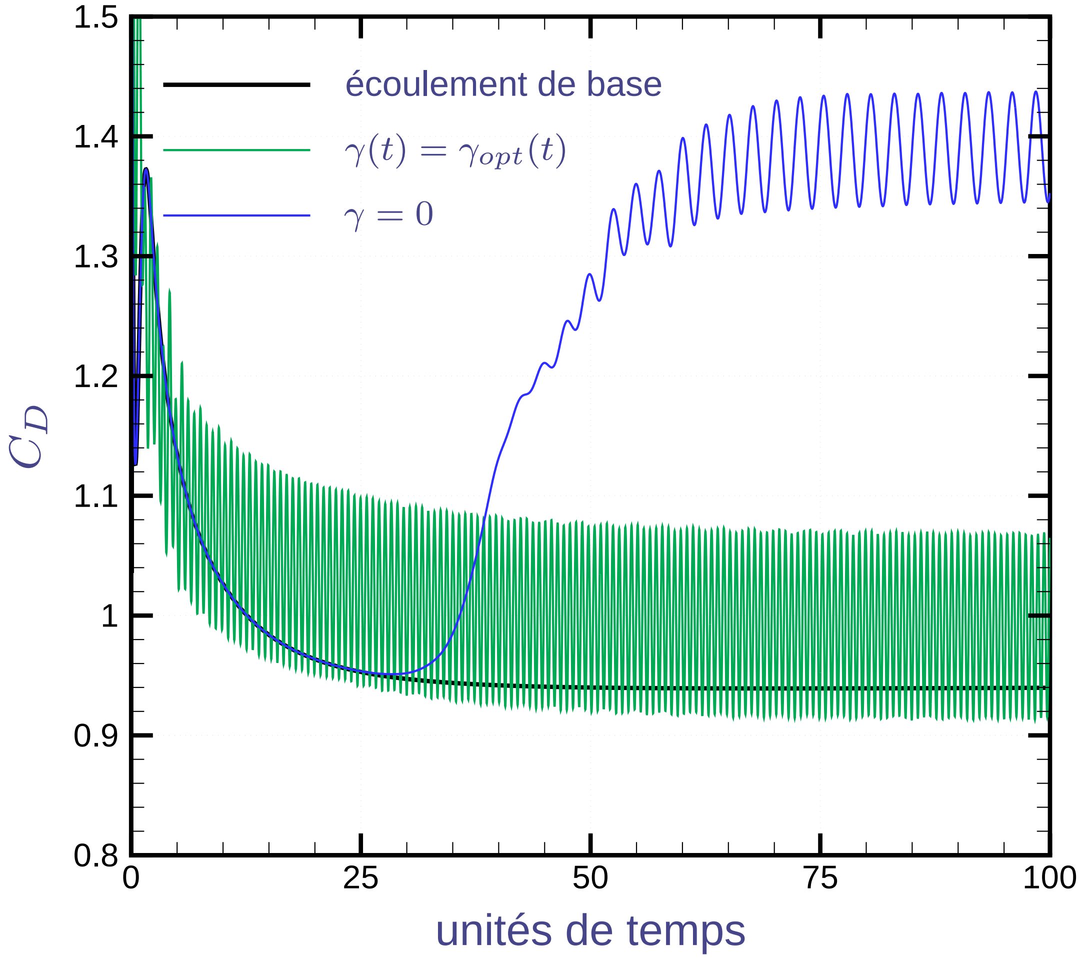




Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St = 0,74$

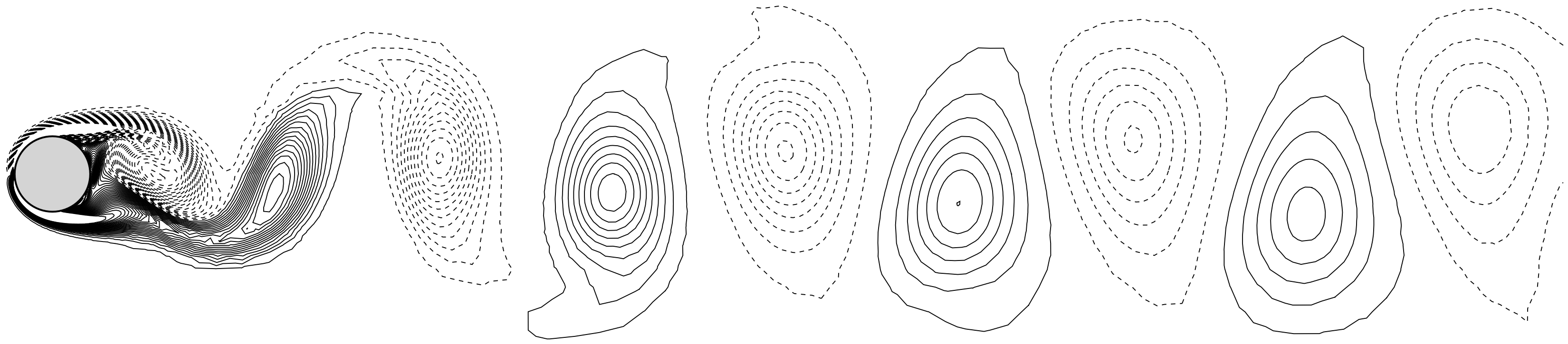
Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,99$

Obtenus en uniquement $4$ résolutions de Navier-Stokes

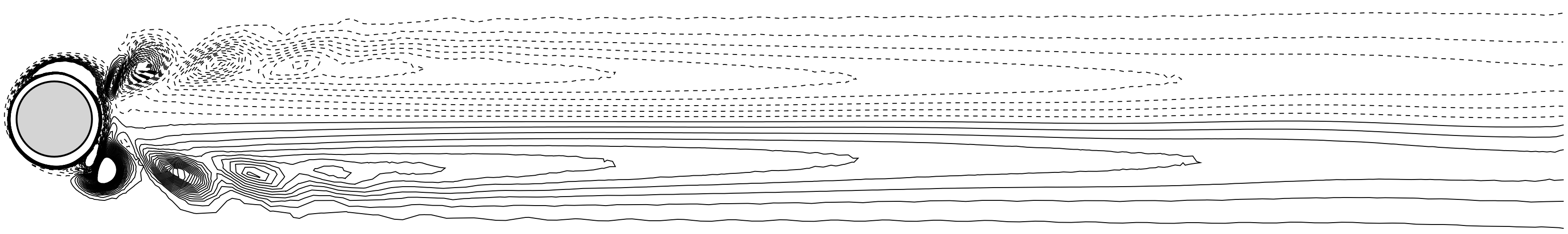
- Loi de contrôle optimale : $\gamma_{opt}(t) = A\sin(2\pi S_t t)$ avec $A = 4,25$ et $St = 0,74$




- Diminution relative du coefficient de traînée de $30\%$ ($\mathcal{J}_0 = 1,4 \;\Rightarrow\; \mathcal{J}_{opt} = 0,99$)



Écoulement non contrôlé, $\gamma = 0$



Écoulement contrôlé, $\gamma = \gamma_{opt}$

# Conclusions et perspectives

- ▶ Paramètres de contrôle obtenus $\longrightarrow$ paramètres de contrôle optimaux
- ▶ Réduction relative du coefficient de traînée moyen égale à $30\%$
- ▶ Coûts de calcul extrêmement réduits
- Temps de calcul : $100$ fois inférieur par POD ROM que par NSE ! (idem équations adjointes et condition d'optimalité)
- Stockage mémoire : $600$ fois moins de variables par POD ROM que par NSE !

$\hookrightarrow$ Contrôle "optimal" écoulements 3D envisageable !

- ▶ Extension à des géométries complexes 3D (ailes d'avion)
- ▶ Précautions sur le choix des réalisations
  - $\Rightarrow$ Méthode *Centroidal Voronoï Tessallation* (CVT) proposée par Gunzburger
  - $\Rightarrow$ Propriétés de stabilité (Rempfer, Noack)
- ▶ Amélioration de la représentativité POD ROM par *balanced POD* (Rowley, Willcox)
- ▶ Contrôle optimal Navier-Stokes...