

# Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire.

Michel Bergmann

Laurent Cordier & Jean-Pierre Brancher

`Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr`

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre Cedex, France



# Plan de l'exposé

Introduction

I - Etude paramétrique & influence des paramètres de contrôle

II - Méthodes mathématiques

La théorie du contrôle optimal

Réduction de modèle par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

III - Optimisation *sans* réactualisation de la base POD

IV - Optimisation *avec* réactualisation de la base POD

Méthode adaptative

Méthode à région de confiance

Conclusions et perspectives



Optimisation de l'aérodynamique interne et externe d'un avion par *contrôle des écoulements* : un enjeu majeur pour le développement du transport aéronautique

## ● Optimisation aérodynamique

- Augmentation de l'autonomie en vol
- Diminution de la masse au décollage
  - ↔ Réduction des coûts opérationnels
- Réduction de l'émission de gaz polluant
- Réduction de la nuisance sonore
- Gain de manœuvrabilité

## ● Exemple chiffré

- Réduction 1% consommation mondiale de fuel pour le transport aéronautique
  - ↔ gain de dépense de 1,25 millions de dollars par jour en coût opérationnel (valeur en 2002)

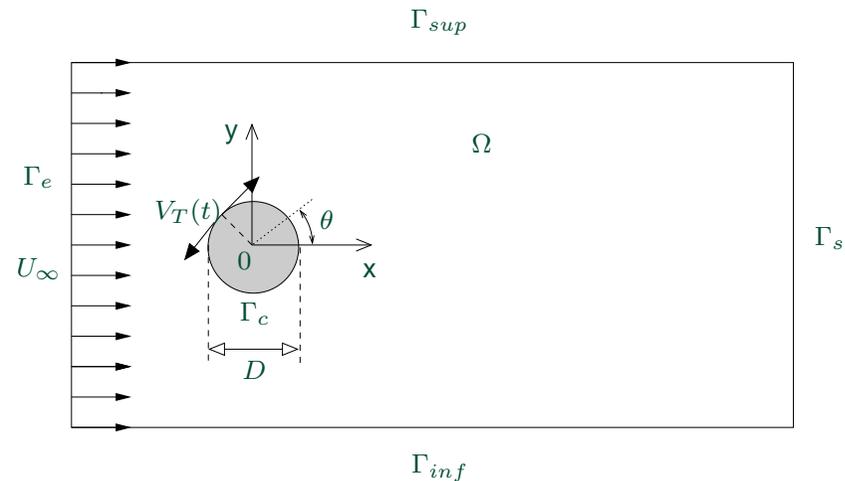


# Introduction Configuration et méthodes de résolutions numériques

- Écoulement 2D autour d'un cylindre circulaire à  $Re = 200$
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Oscillations du cylindre à une vitesse tangentielle

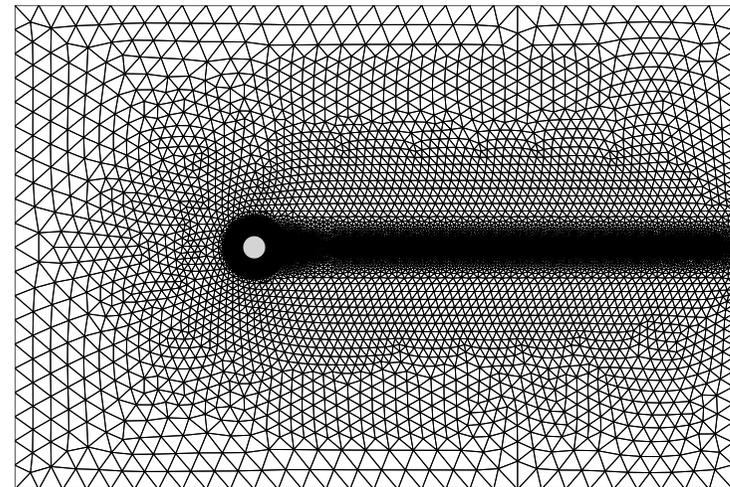
$$\gamma(t) = \frac{V_T}{U_\infty} = A \sin(2\pi St_f t)$$

Cas test :  $A = 2$  et  $St_f = 0,5$



**Déterminer les paramètres  $c = (A, St_f)^T$  qui minimisent le coefficient de traînée moyen**

- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression) en temps
- Éléments finis ( $P_1, P_1$ ) en espace



---

Code de calcul développé par M. Braza et D. Ruiz (IMFT-ENSEEIH).



# Introduction Coefficient de traînée & écoulement de base stationnaire instable

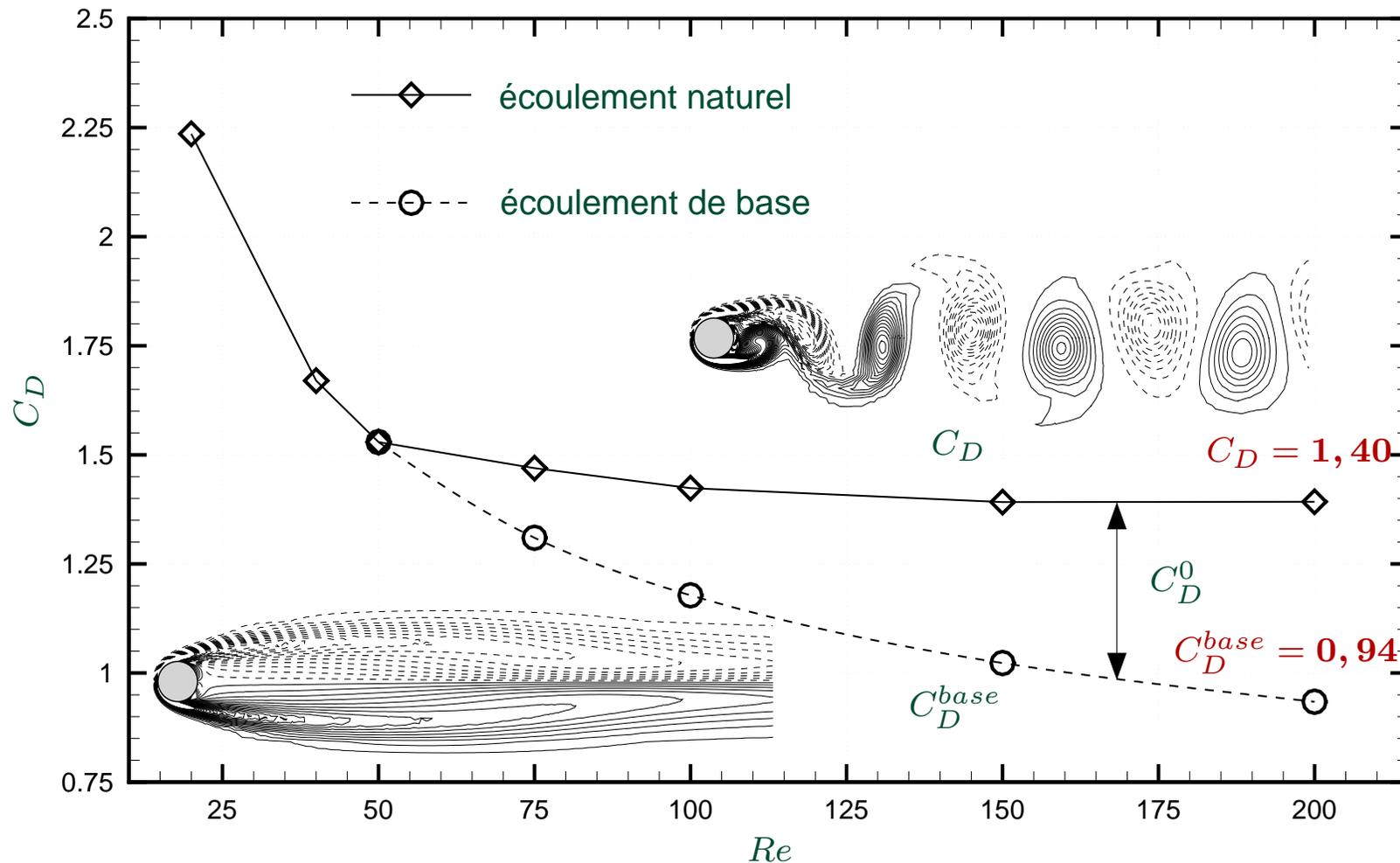


Fig. : Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre l'écoulement naturel et l'écoulement de base stationnaire instable.

Protas, B. et Wesfreid, J.E. (2002) : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14**(2), pp. 810-826.



# I - Etude paramétrique Coefficient de traînée moyen

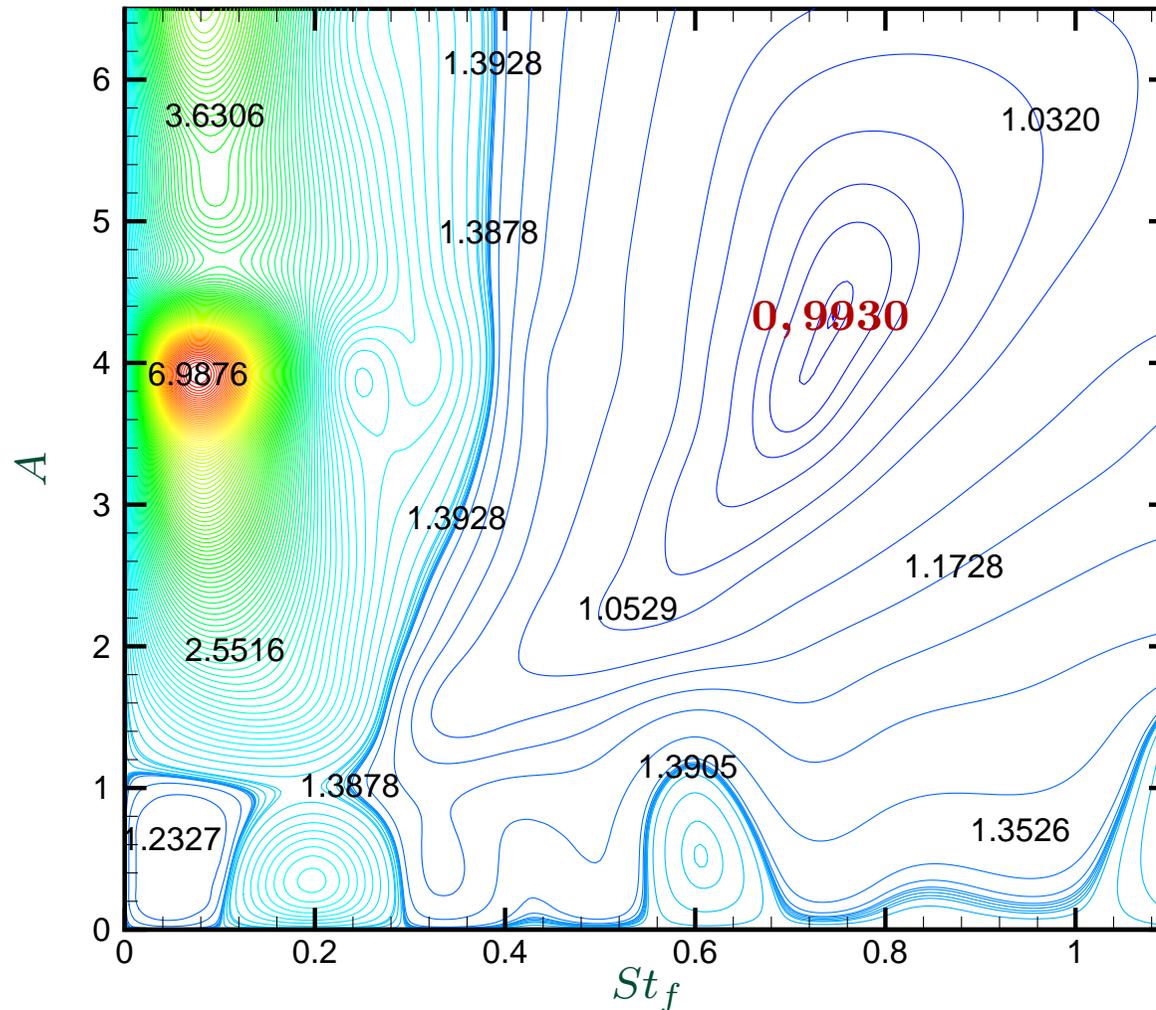


Fig. : Coefficient de traînée moyen en fonction de l'amplitude et de la fréquence de forçage.

Minimum (global ?) :  $C_D = 0,9930$  pour  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$ .



# I - Etude paramétrique Synchronisation des fréquences de l'écoulement

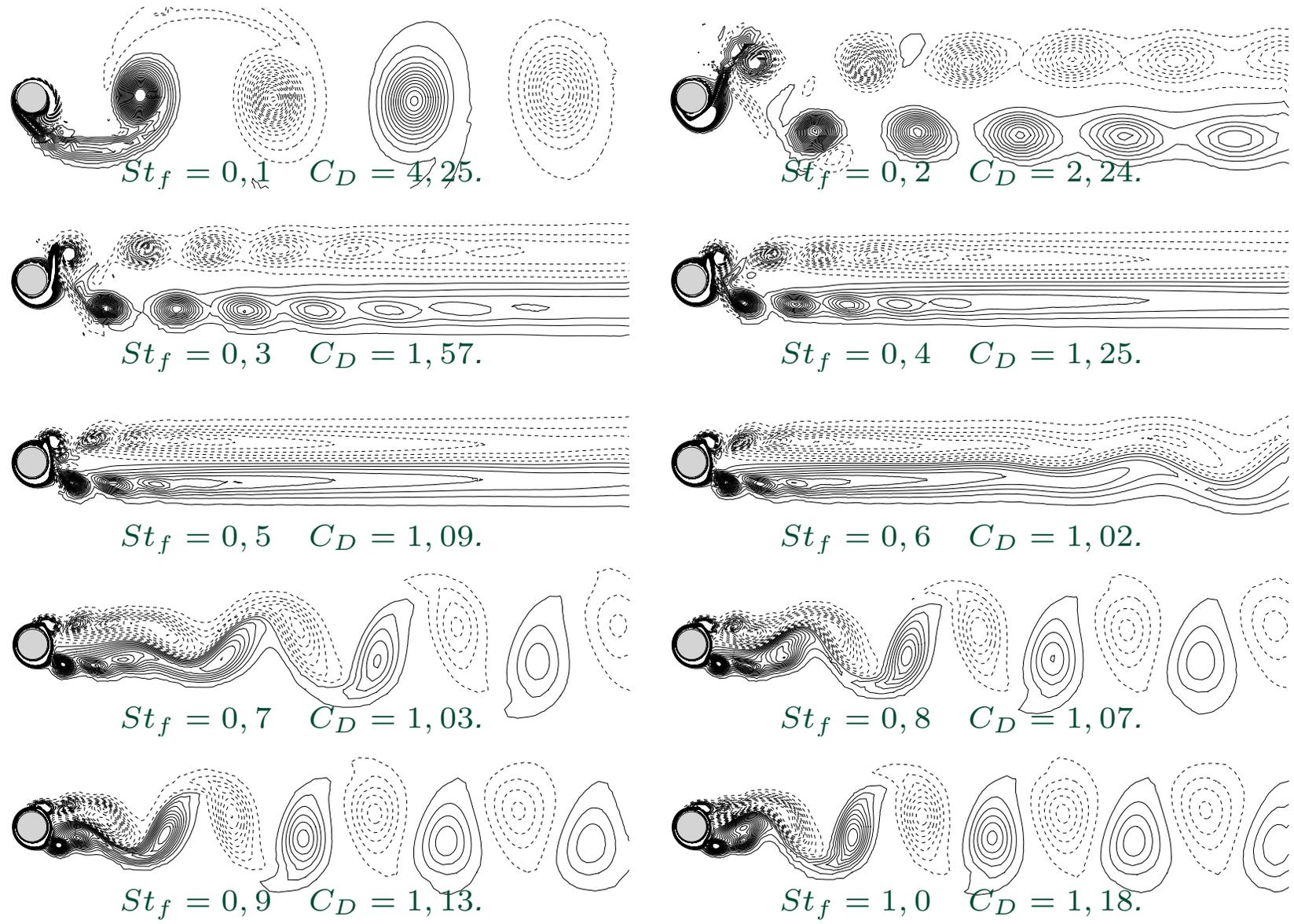


Fig. : Isovaleurs de la vorticité  $\omega_z$  pour  $A = 3$



# I - Etude paramétrique Synchronisation des fréquences de l'écoulement

Définitions : *Lock-on* : la fréquence du lâché de tourbillons  $St$  est égale à la fréquence de forçage  $St_f$ , soit  $St = St_f$   
*Lock-in* : idem *lock-on* avec  $St_f = St_n$ , où  $St_n$  est la fréquence naturelle

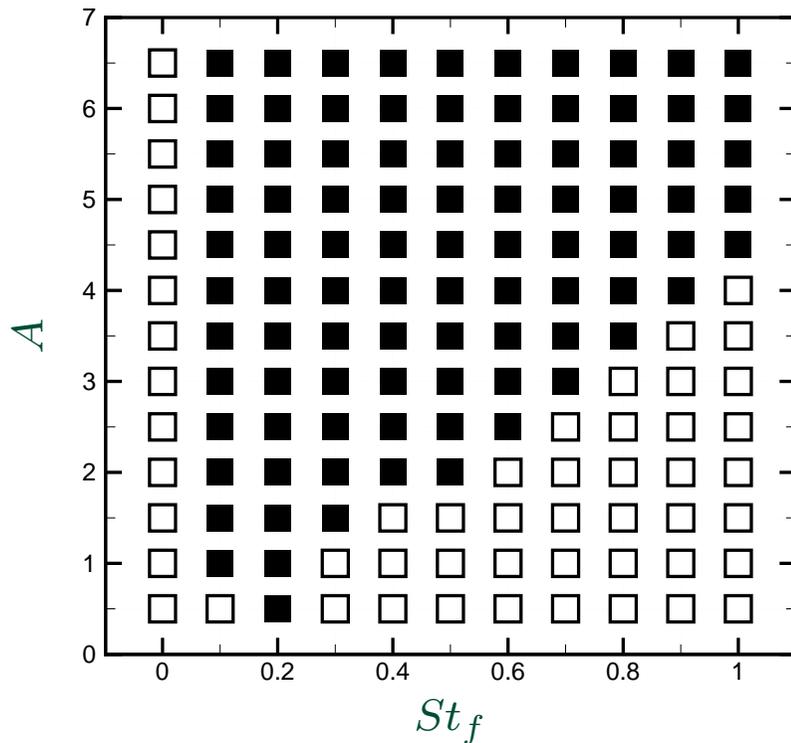


Fig. : Écoulements lock-on ■ et no lock-on □ en fonction de l'amplitude  $A$  et du nombre de Strouhal  $St_f$  de forçage.

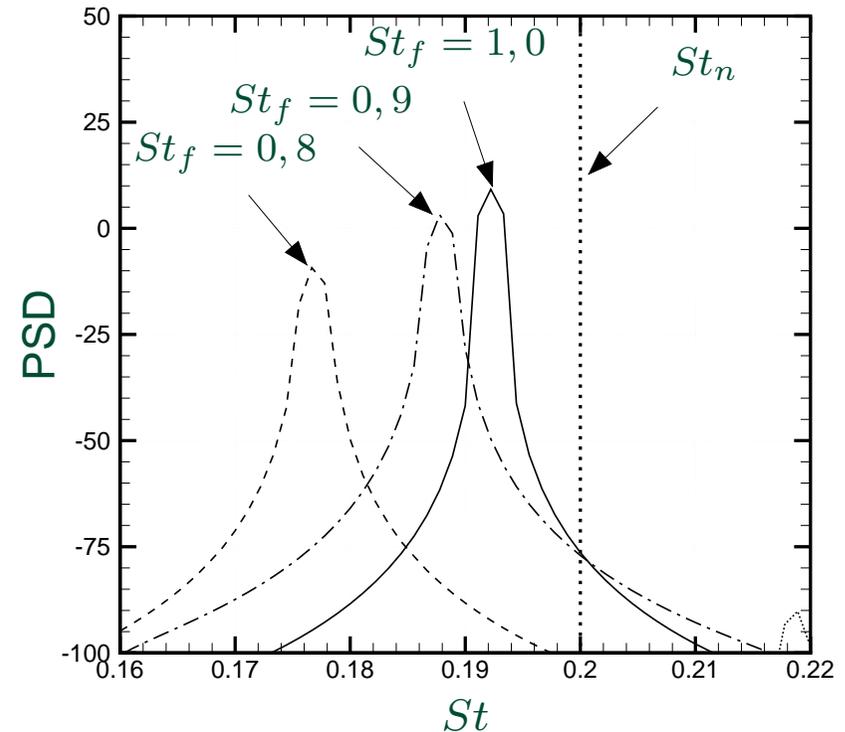


Fig. : Evolution des spectres de puissance du coefficient de portance pour  $A = 3$  après la zone de lock-on.



# I - Etude paramétrique Synchronisation des fréquences de l'écoulement

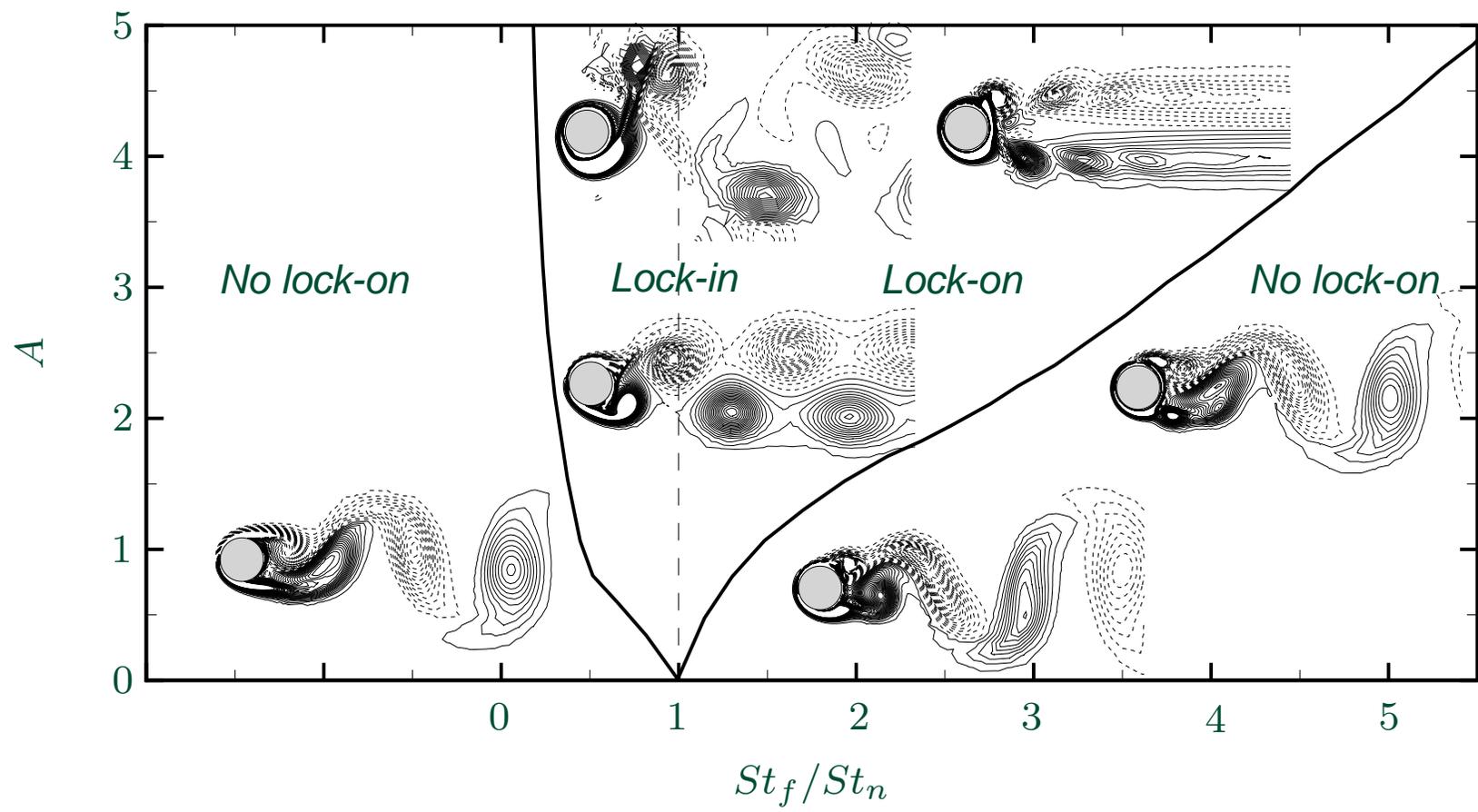


Fig. : Bande fondamentale lock-on et iso-contours de vorticité  $\omega_z$  dans le sillage proche.

► Écoulements hors lock-on "semblables"



# I - Etude paramétrique Angle maximal de rotation

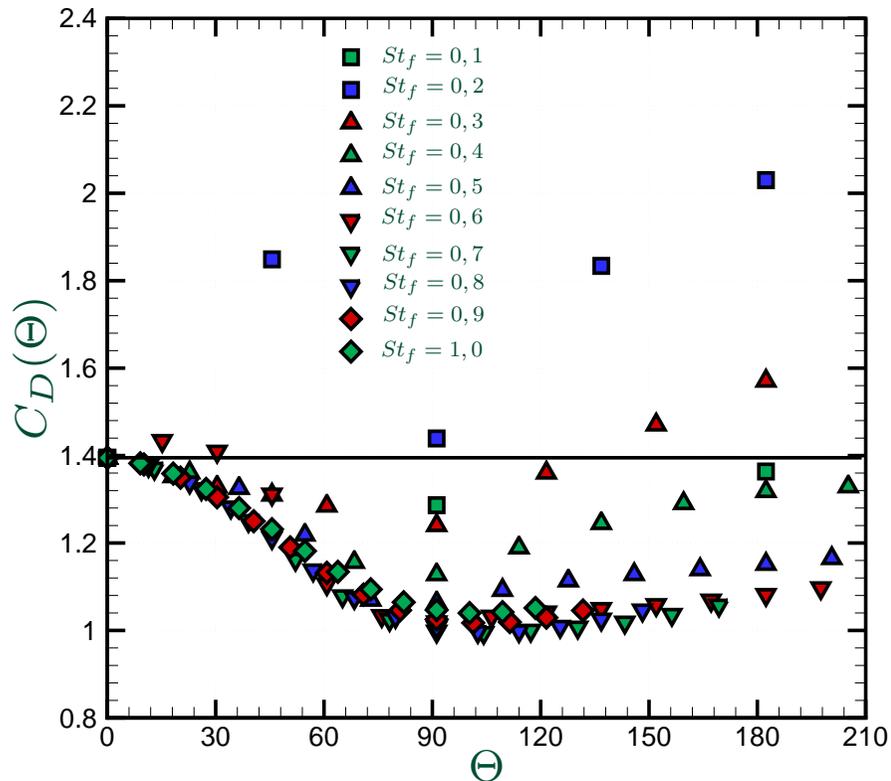


Fig. : Coefficient de traînée moyen en fonction de l'angle maximal de rotation.

## Notation

► Angle maximal de rotation :

$$\Theta = \max_t \{\theta(t)\} = \frac{A}{\pi St_f}$$

## Observations

► Réduction de traînée maximale

$$\Theta_{max} = 95^\circ$$

↪ Coefficient de traînée minimal

$$C_D = 0,993$$

N.B. : Sans contrôle,  $C_D \simeq 1,4$

Existence d'une valeur optimale  $\Theta_{max}$  pour l'angle maximal de rotation.



# I - Etude paramétrique Angle maximal de rotation

Notations :   
 —  $C_{D_{min}}(St_f) = \min_{A \in \mathbb{R}} C_D(\Theta, St_f)$    
 —  $C_{D_{\Theta_{max}}}(St_f) = C_D(\Theta_{max}, St_f)$

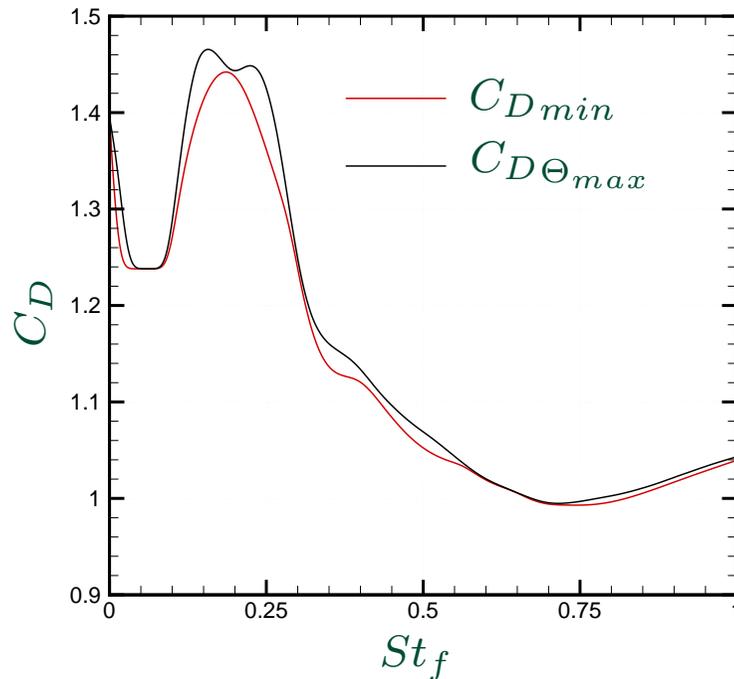


Fig. : Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Strouhal.

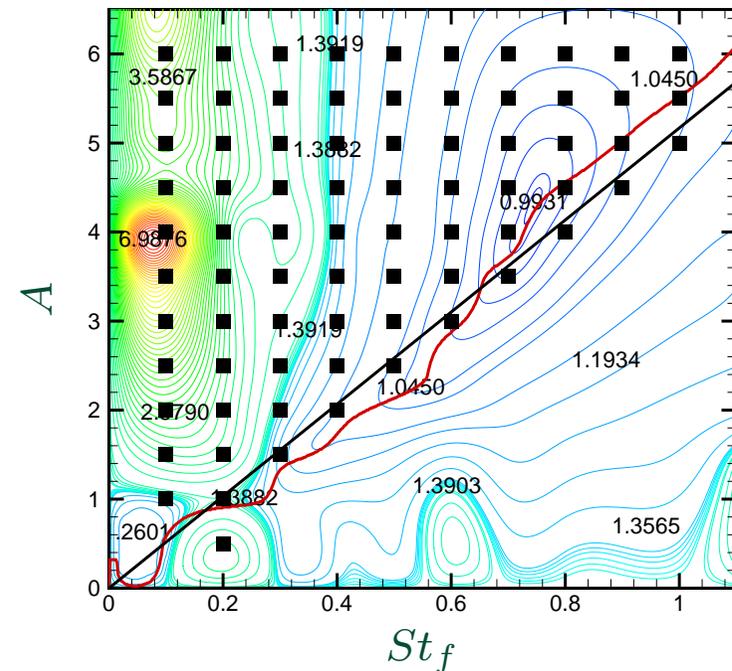


Fig. : Dépendance des paramètres optimaux dans l'espace de contrôle

► Bonne concordance entre  $C_{D_{min}}$  et  $C_{D_{\Theta_{max}}}$ .

$A$  et  $St_f$  "optimaux" semblent dépendants :  $A/St_f = 5, 2$  ( $\Theta_{max} = 95^\circ$ )  
 ⇒ Correspond à la limite région "lock-on".



## II - Théorie du contrôle optimal *Définition*

Méthode mathématique permettant de déterminer **sans empirisme** une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

- Equations d'état  $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$ ;  
(Navier-Stokes + C.I. + C.L.)
- Variables de contrôle  $c$ ;  
(Soufflage/aspiration, paramètres de forme, ...)
- Fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}(\phi, c)$ .  
(Traînée, portance, ...)

*Déterminer les variables de contrôle  $c$  et les variables d'état  $\phi$  telles que la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}(\phi, c)$  soit minimale ou maximale sous les contraintes  $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$ .*



## II - Théorie du contrôle optimal *Multiplicateurs de Lagrange*

Optimisation avec contraintes  $\Rightarrow$  optimisation sans contraintes

► Introduction de multiplicateurs de Lagrange  $\xi$  (pour chaque contrainte active).

► Fonctionnelle de Lagrange :  $\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle \mathcal{F}(\phi, c), \xi \rangle$ .

► Problème : rendre  $\mathcal{L}$  "stationnaire"  $\Rightarrow$  déterminer  $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$ .

► Hypothèse :  $\phi, c$  et  $\xi$  indépendantes :  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$ .

$\hookrightarrow$  Solution de  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0$  : équations d'état  $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$ .

$\hookrightarrow$  Solution de  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi = 0$  : équations adjointes  $\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\right)^* \xi = \left(\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\phi}\right)^*$ .

$\hookrightarrow$  Solution de  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c = 0$  : conditions d'optimalité  $\left(\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial c}\right)^* = \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right)^* \xi$ .

$\Rightarrow$  Assure un extremum local (minimum)

$\Rightarrow$  Méthode de résolution coûteuse en temps CPU  
et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !



"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000



## II - Réduction de modèle *Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres*

► Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

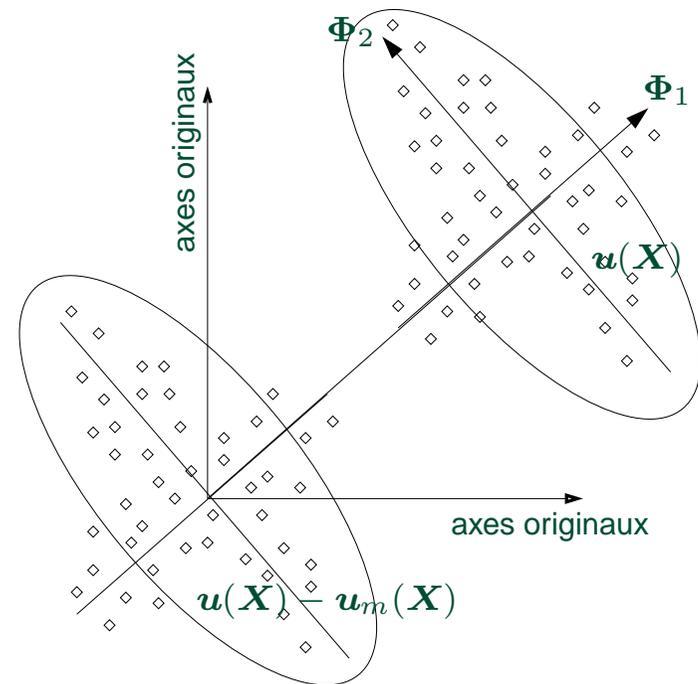
► Rechercher la réalisation  $\Phi(\mathbf{X})$  "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ .  
( $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$ )

►  $\Phi(\mathbf{X})$  solution du problème :

$$\max_{\Phi} \langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle, \quad \|\Phi\|^2 = 1.$$

► Convergence optimale *en norme  $L^2$*  (énergie) de  $\Phi(\mathbf{X})$

⇒ réduction de dynamique envisageable.



---

Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.



## II - Réduction de modèle *Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres*

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_n^{(j)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda_n \Phi_n^{(i)}(\mathbf{X}) \quad n = 1, \dots, N_{POD}$$

↪  $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$  : *tenseur des corrélations spatio-temporelles.*

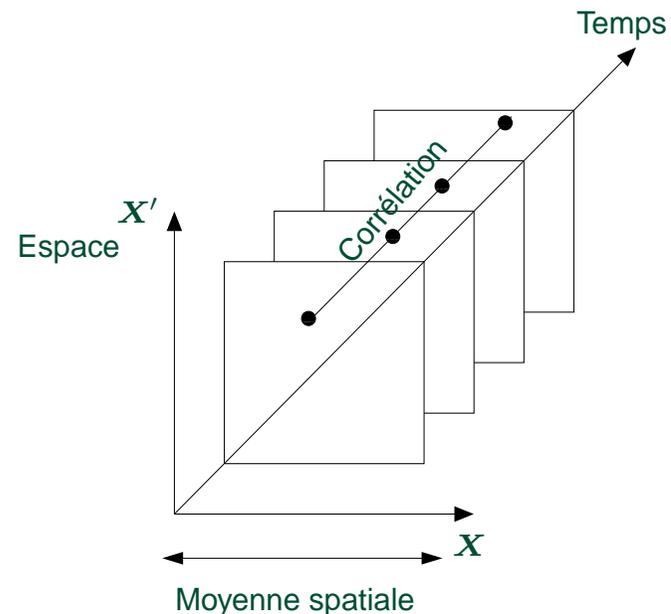
- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t, t') a_n(t') dt' = \lambda_n a_n(t)$$

↪  $C(t, t')$  : *corrélations temporelles.*

- $\Phi(\mathbf{X})$  base de l'écoulement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n(\mathbf{x}).$$



---

Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N° 3, pp. 561–571.

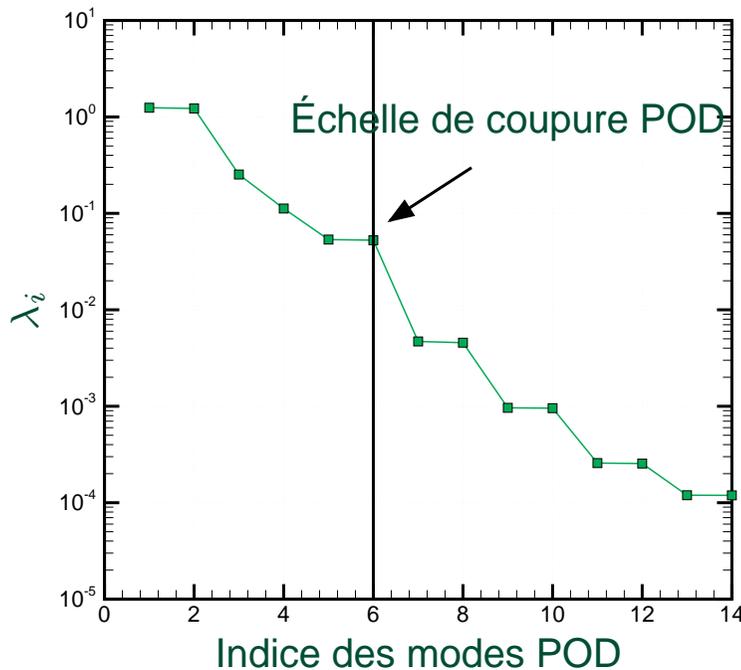


## II - Réduction de modèle *Réduction d'ordre de la base POD*

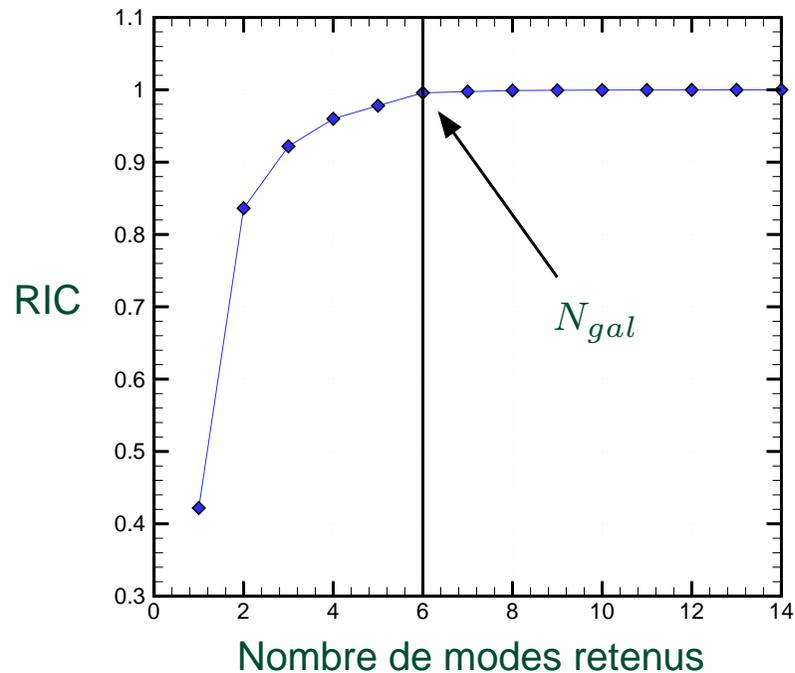
► Contenu énergétique relatif :  $RIC(M) = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k}$

*Objectif : réaliser une troncature dans la base POD en conservant 99% de l'énergie relative*

► Cas test :  $A = 2$  et  $St_f = 0,5 \Rightarrow N_{POD} = 361$  réalisations sur  $T = 18$



**Fig. :** *Spectre énergétique et échelle de coupure POD.*

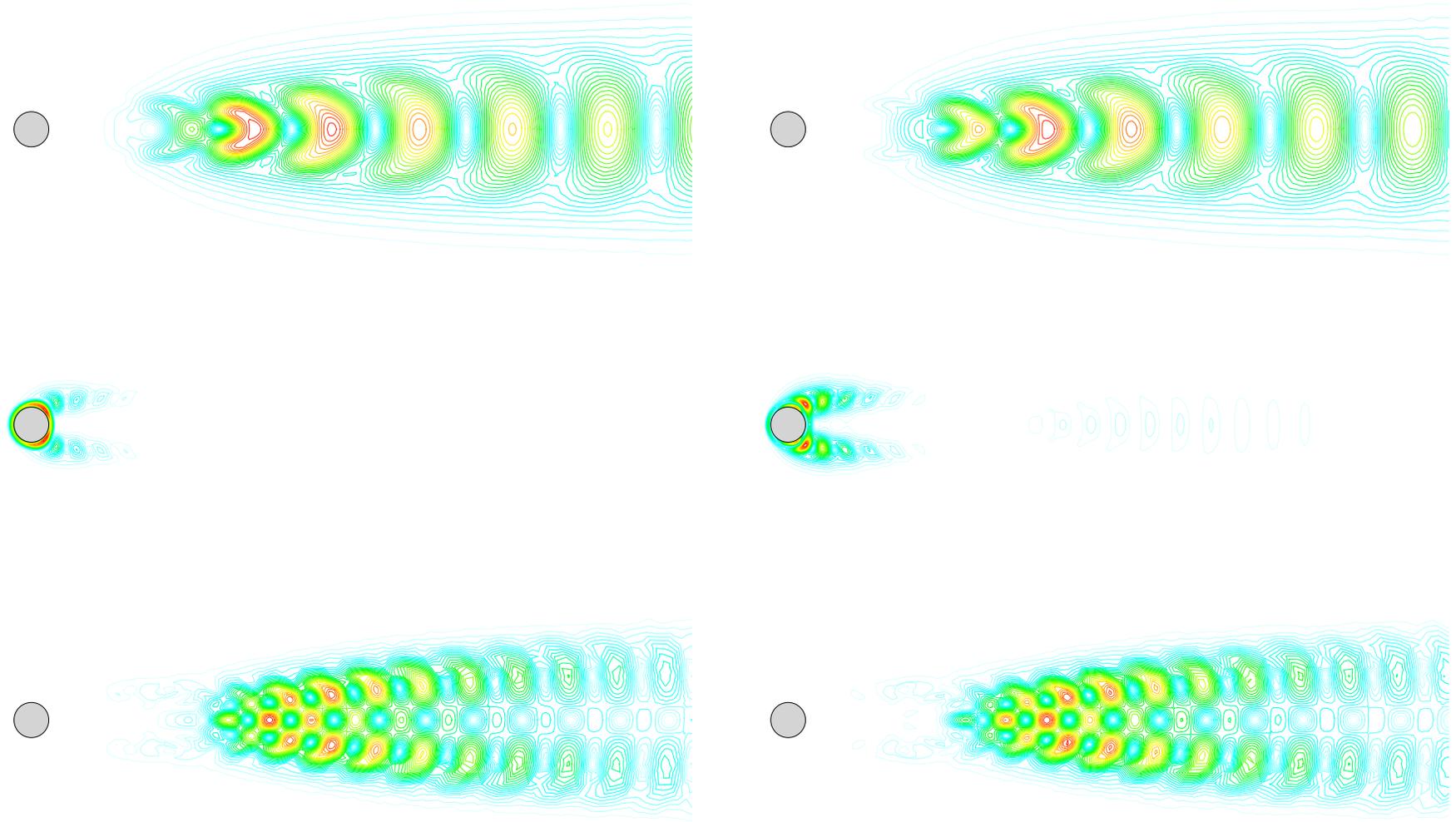


**Fig. :** *Énergie cinétique relative en fonction du nombre  $M$  de modes POD retenus.*

$$N_{gal} = \arg \min_M RIC(M) \text{ t.q. } RIC(N_{gal}) > 99\% \Rightarrow N_{gal} = 6!$$



# II - Réduction de modèle Modes POD du sillage d'un cylindre



**Fig. :** Représentation des 6 premiers modes POD de fluctuations autour du champ moyen  $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$  avec  $A = 2$  et  $St_f = 0,5$ .



## II - Réduction de modèle *Sillage d'un cylindre*

- Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left( \Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left( \Phi_i, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned} \left( \Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= (p, \nabla \cdot \Phi_i) - \frac{1}{Re} \left( (\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u} \right) \\ &\quad - [p \Phi_i] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i]. \end{aligned}$$

$$\text{avec } [a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \text{ et } (\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}) = \int_{\Omega} \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} \, d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} \, d\mathbf{x}.$$

- Termes de pression "indésirables" :  $\Rightarrow$  élimination



## II - Réduction de modèle *Système dynamique du sillage contrôlé d'un cylindre*

- Décomposition du champ de vitesse sur  $N_{POD}$  modes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}).$$

- Système dynamique réduit avec  $N_{gal}$  ( $\ll N_{POD}$ ) modes retenus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d a_i(t)}{d t} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2 \\ a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$  et  $\mathcal{G}_i$  dépendent uniquement de  $\Phi, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_c$  et  $Re$ .



## II - Réduction de modèle *Intégration et stabilisation du modèle réduit*

Cas test :  $\gamma = A \sin(2\pi St_f t)$ ,  $A = 2$  et  $St_f = 0,5$ .

Erreurs de reconstruction POD ROM  $\Rightarrow$  amplification temporelle des modes

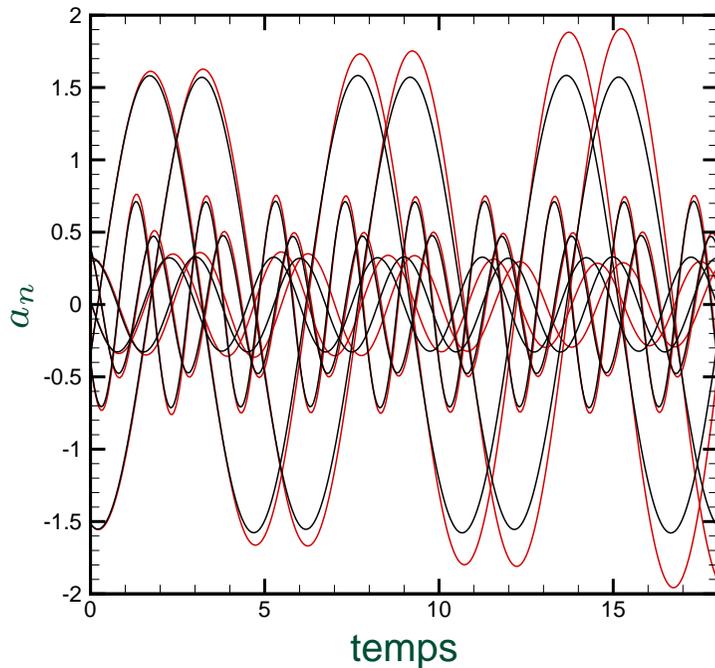


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

► Causes :

- Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
- Essentiel de dissipation dans les petites structures

► Solution :

- Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

— projection (Navier-Stokes) :  $a_{\tau n}(t)$   
— prédiction avant stabilisation (POD ROM)



## II - Réduction de modèle *Intégration et stabilisation du modèle réduit*

Cas test :  $\gamma = A \sin(2\pi St_f t)$ ,  $A = 2$  et  $St_f = 0,5$ .

Erreurs de reconstruction POD ROM  $\Rightarrow$  amplification temporelle des modes

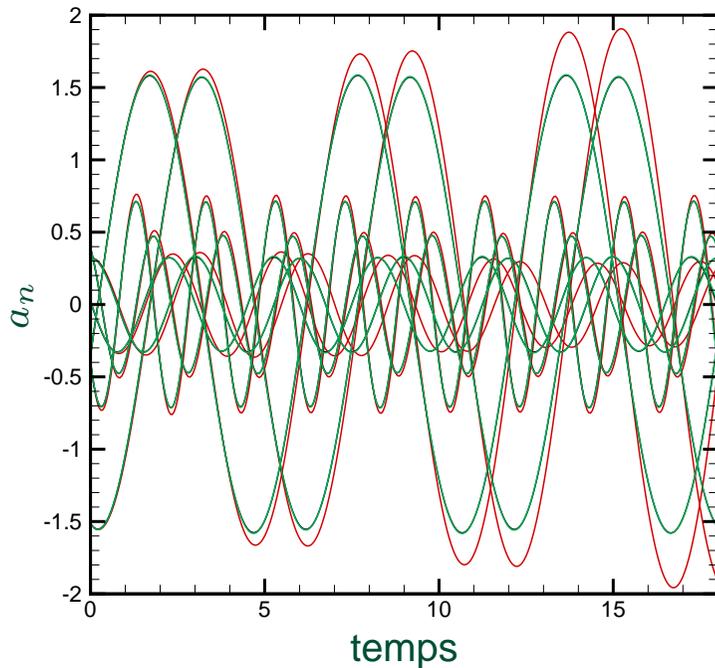


Fig. : *Evolution temporelle des 6 premiers modes POD.*

► Causes :

- Extraction des grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
- Essentiel de dissipation dans les petites structures

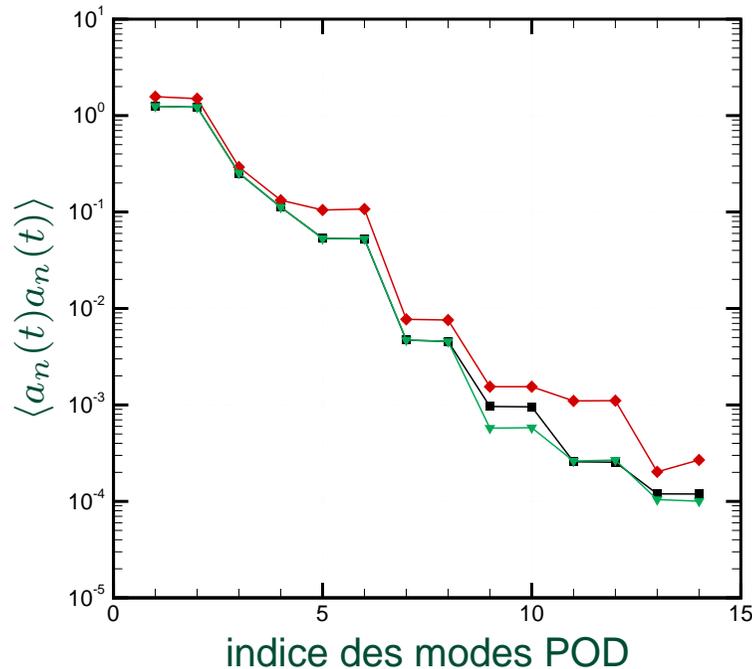
► Solution :

- Ajout de viscosités artificielles optimales sur chaque mode POD

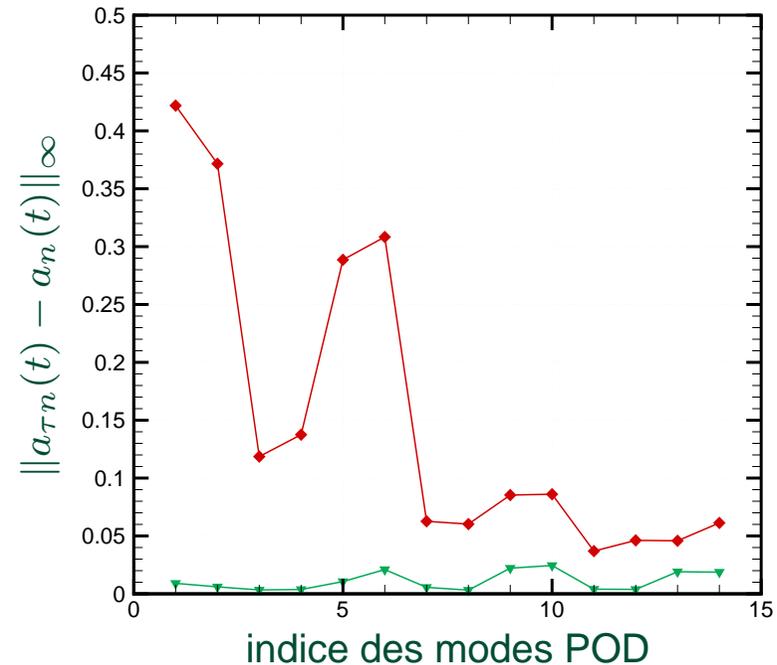
- projection (Navier-Stokes) :  $a_{\tau n}(t)$
- prédiction avant stabilisation (POD ROM)
- prédiction après stabilisation (POD ROM).



## II - Réduction de modèle *Stabilisation du modèle réduit - Energie*



**Fig. :** Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement par DNS et par POD ROM.



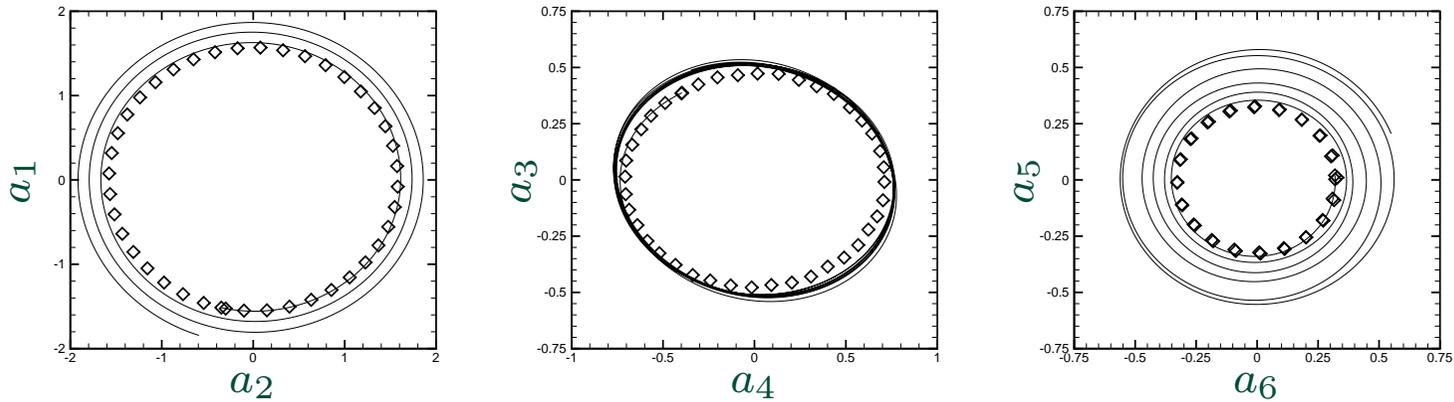
**Fig. :** Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD avant et après stabilisation.

- ▶ Bonne concordance entre spectres POD ROM et DNS
- ▶ Réduction de l'erreur de reconstruction entre les modes prédits (POD ROM) et projetés (DNS)

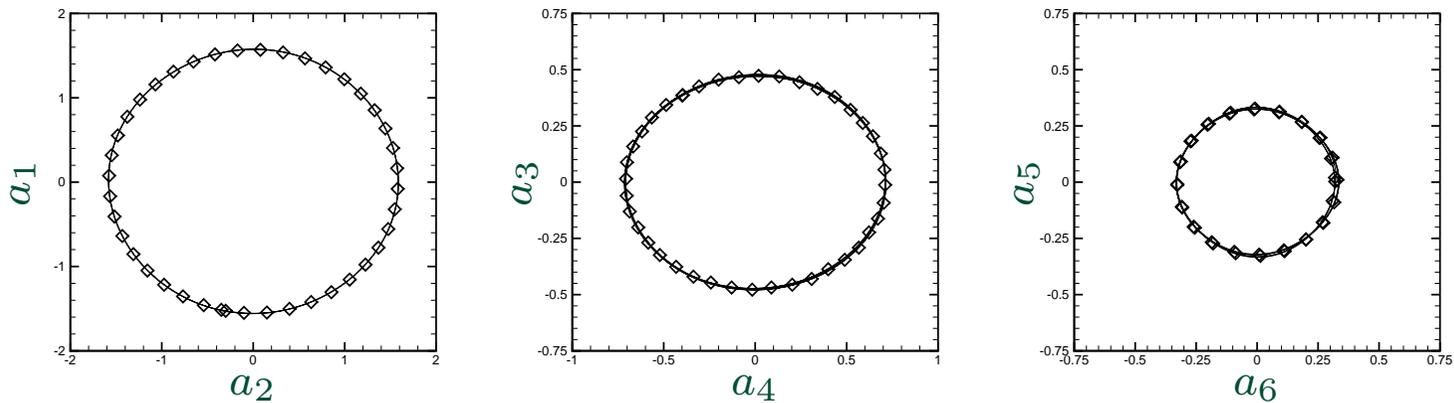
⇒ Validation du modèle réduit POD



## II - Réduction de modèle *Stabilisation du modèle réduit - Dynamique*



*Sans ajout de viscosités artificielles.*



*Avec ajout de viscosités artificielles.*

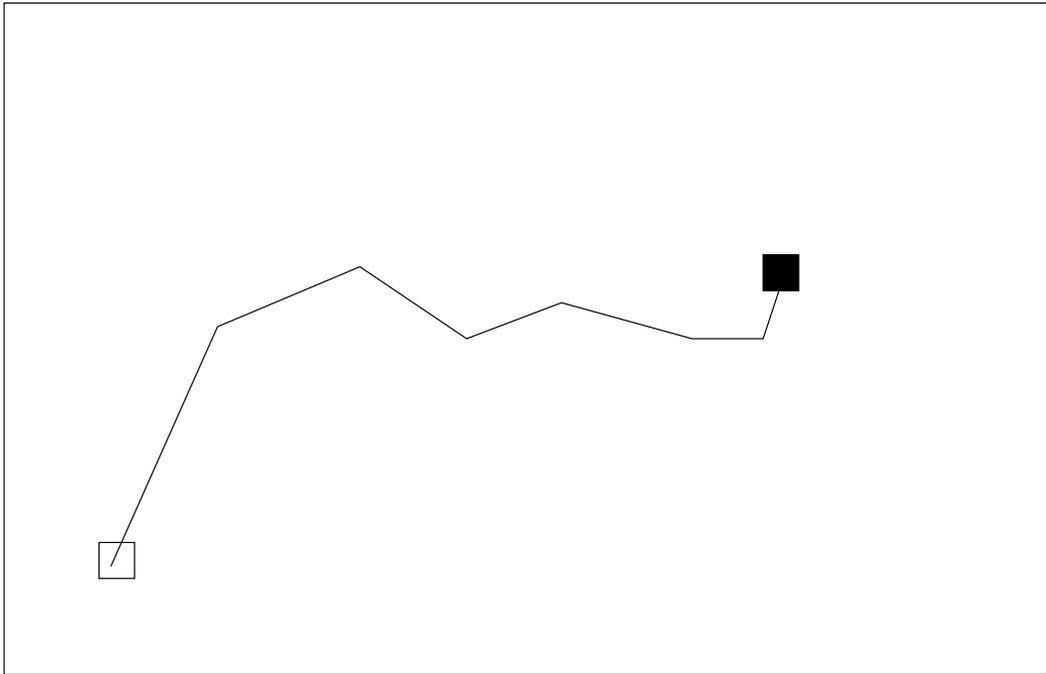
**Fig. :** *Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels  $a_n$  sur 18 unités de temps.*

*◇ modes DNS; — modes POD.*

**Le modèle réduit POD représente correctement *une unique dynamique***



# II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*

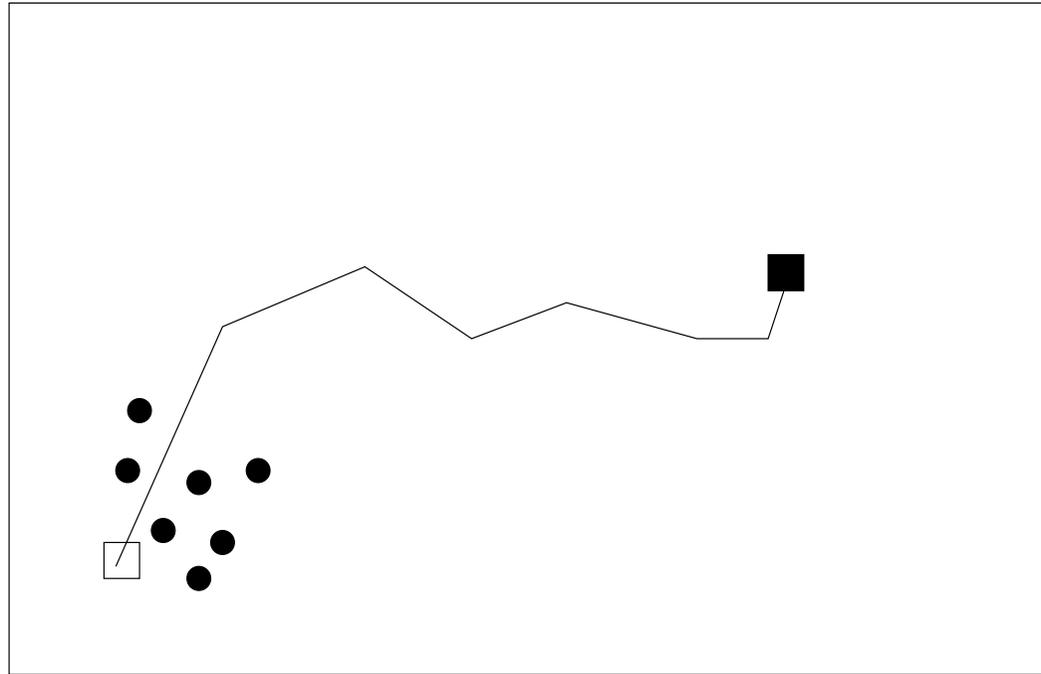


*Configuration générale.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale  $\square$  et terminale  $\blacksquare$  du processus d'optimisation.*



## II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*

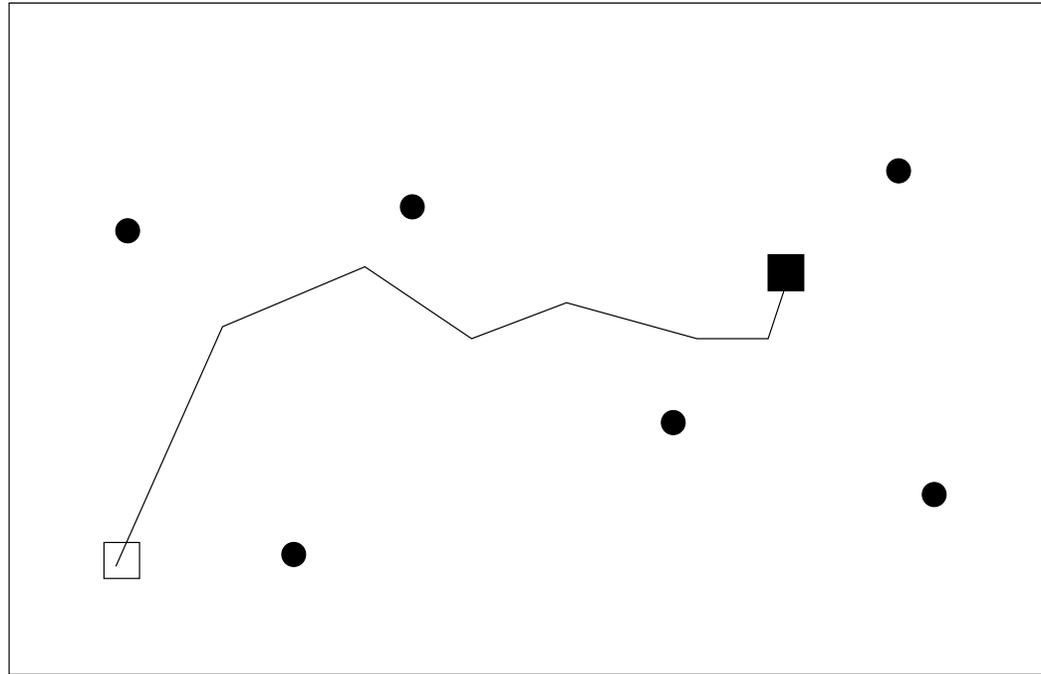


*Echantillonnage inadapté.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*  
● *réalisation utilisée pour la base de données.*



## II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*

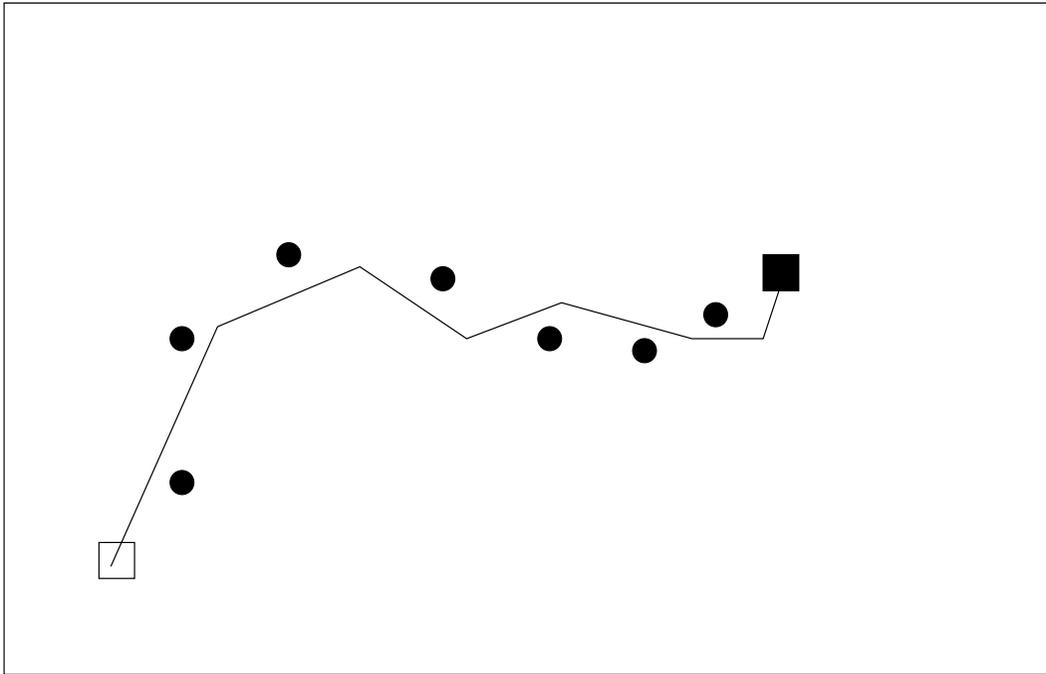


*Echantillonnage inadapté.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*  
● *réalisation utilisée pour la base de données.*



# II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*

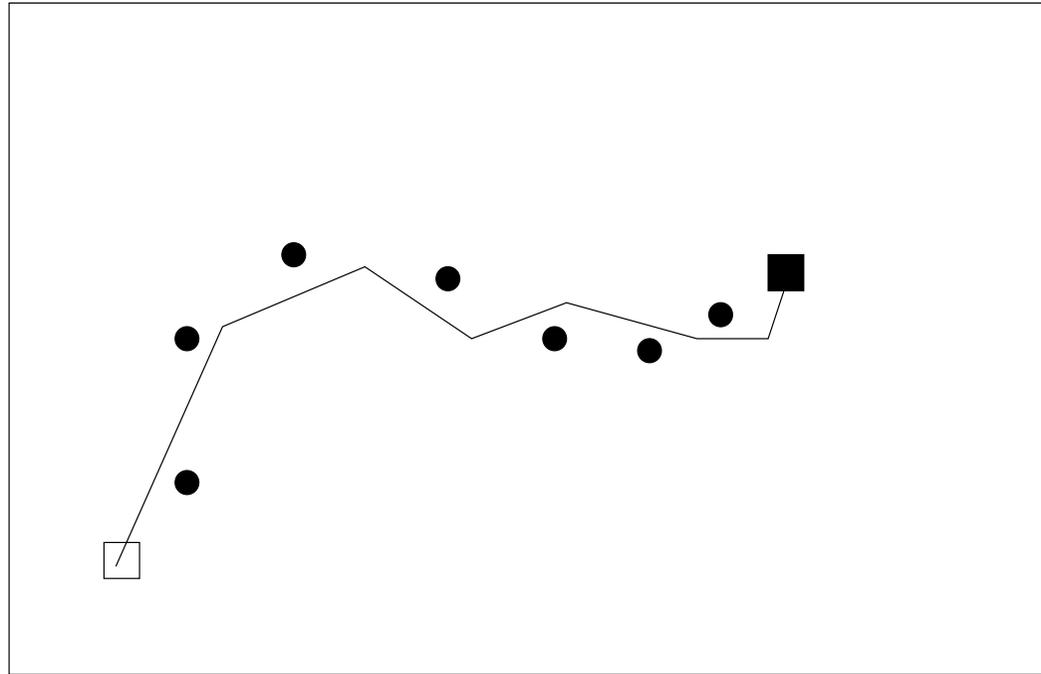


*Echantillonnage idéal.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*  
● *réalisation utilisée pour la base de données.*



## II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*



*Echantillonnage idéal.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale  $\square$  et terminale  $\blacksquare$  du processus d'optimisation,*  
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

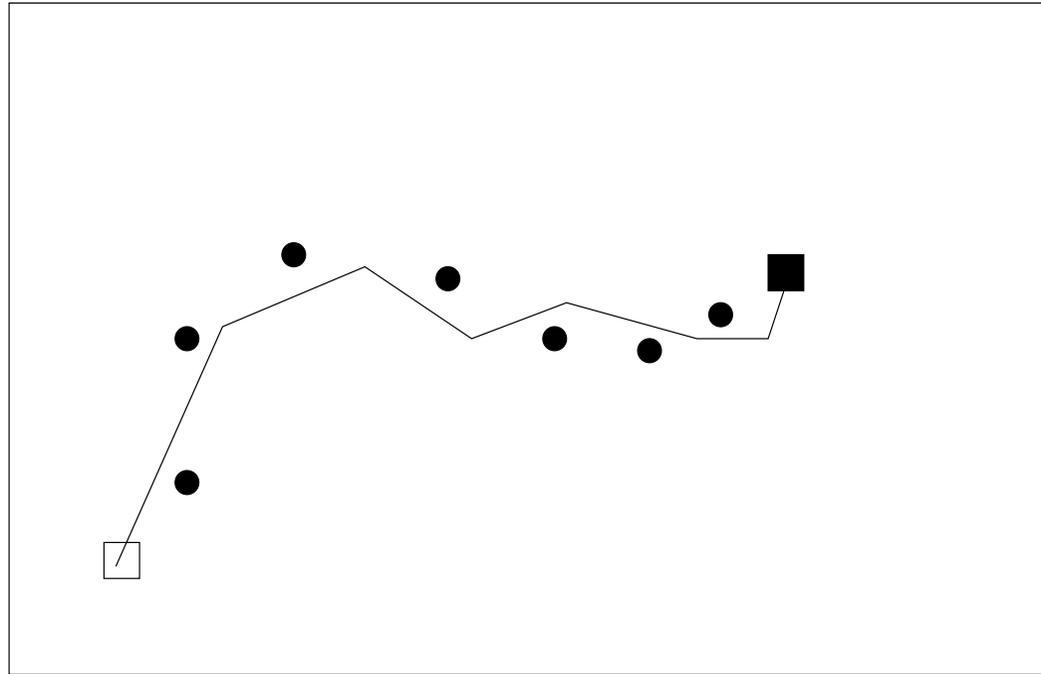
- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation

### III - Optimisation sans réactualisation de la base POD

[Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, 17 (9), 2005]



## II - Réduction de modèle *Choix des réalisations en optimisation*



*Echantillonnage idéal.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*  
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation

### III - Optimisation sans réactualisation de la base POD

[Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, 17 (9), 2005]

- La base ne représente qu'une dynamique contrôlée particulière

### IV - Optimisation avec réactualisation de la base POD



# III - Base POD non réactualisée *Présentation*

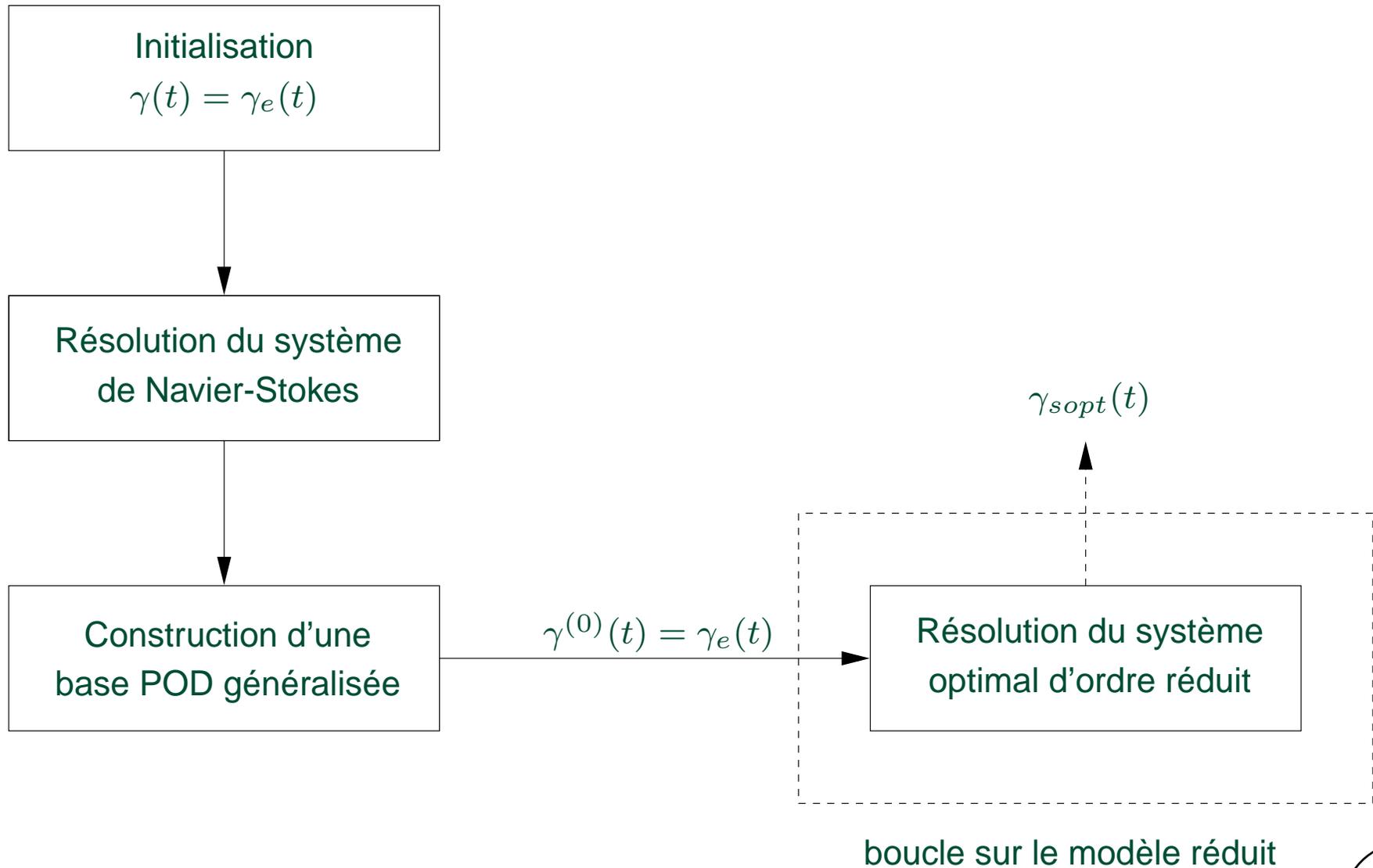


Fig. : Représentation schématique de la méthode d'optimisation sans réactualisation de la base POD.



Objectif : minimiser l'instationnarité du sillage.

► Fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt = \int_0^T \left( \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i^2(t) + \frac{\alpha}{2} \gamma^2(t) \right) dt.$$

$\alpha$  : paramètre de régularisation (pénalisation).

► Equations adjointes :

$$\begin{cases} \frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left( \mathcal{B}_{ji} + \gamma \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k \right) \xi_j(t) - 2a_i \\ \xi_i(T) = 0. \end{cases}$$

► Condition d'optimalité :

$$\delta\gamma(t) = - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi_i + \alpha \gamma(t).$$



# III - Base POD non réactualisée Résolution du système optimal

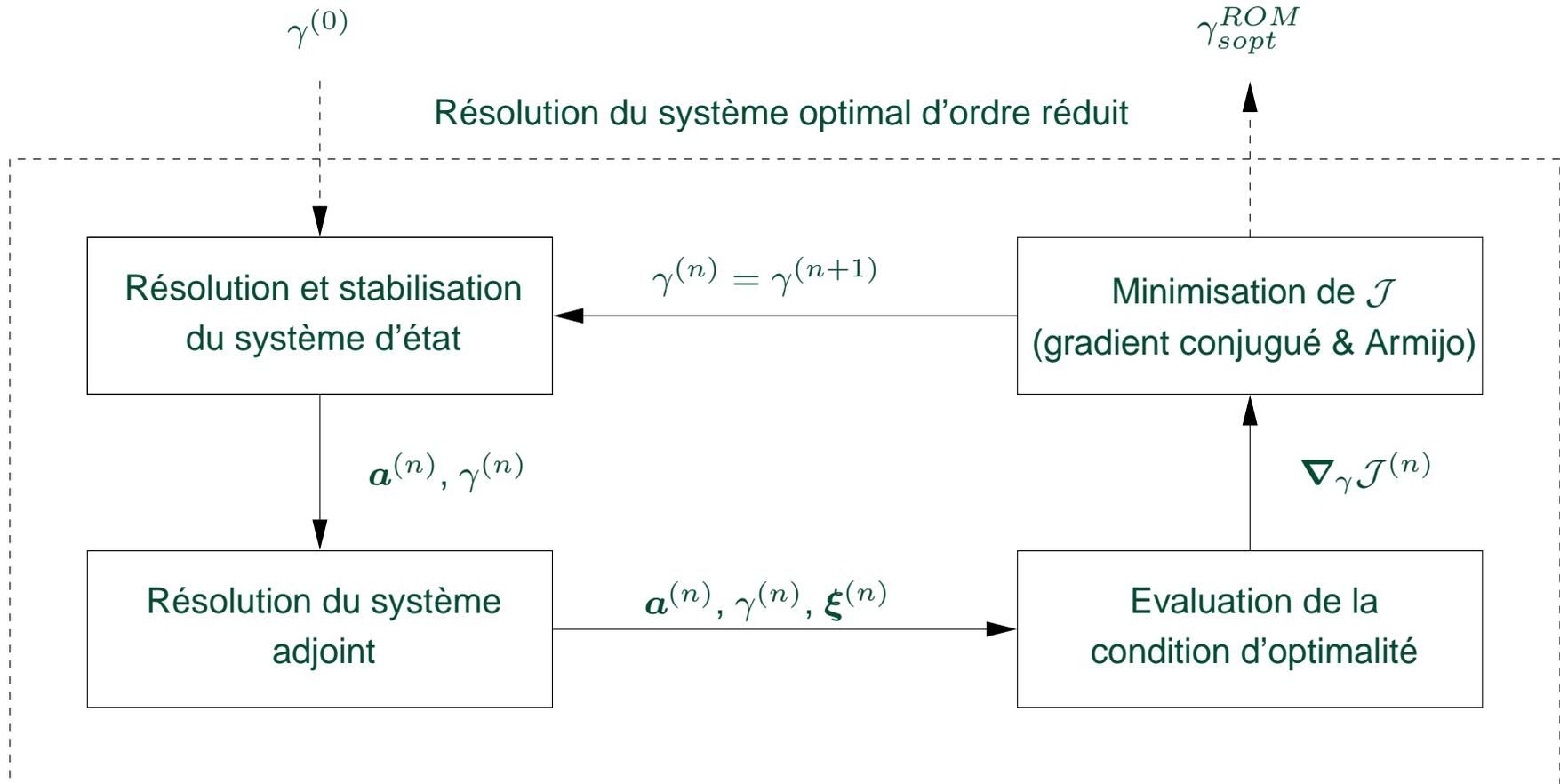


Fig. : Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.



# III - Base POD non réactualisée Généralités

► Pas de réactualisation de la base POD.

► Représentativité énergétique *a priori* différente de représentativité dynamique :

↔ inconvénient possible pour le contrôle.

↔ un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer.

► Construction d'une base POD généralisée représentative d'une plus large gamme de dynamique :

↔ *excitation d'un plus grand nombre de degrés de liberté par balayage en amplitudes et en fréquences de  $\gamma(t)$ .*



### III - Base POD non réactualisée *Excitation utilisée*

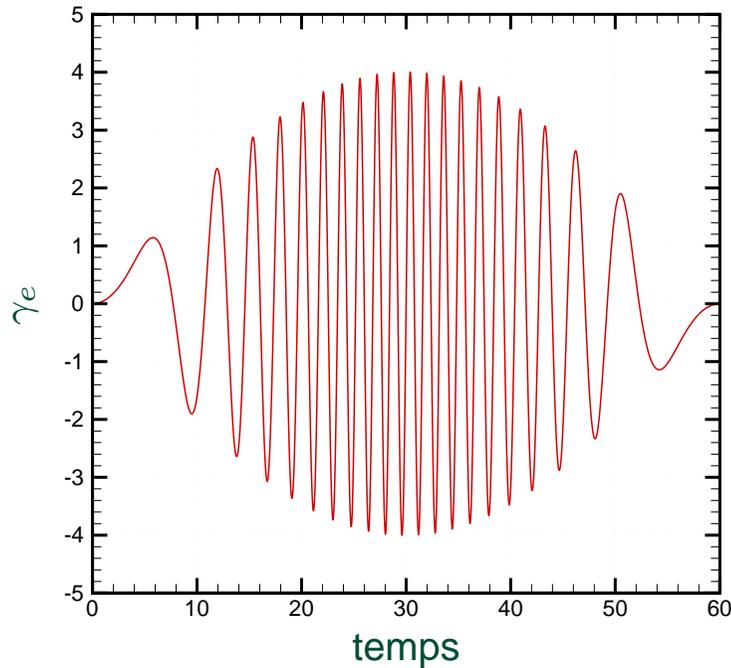


Fig. : Excitation temporelle  $\gamma_e$  imposée au cylindre.

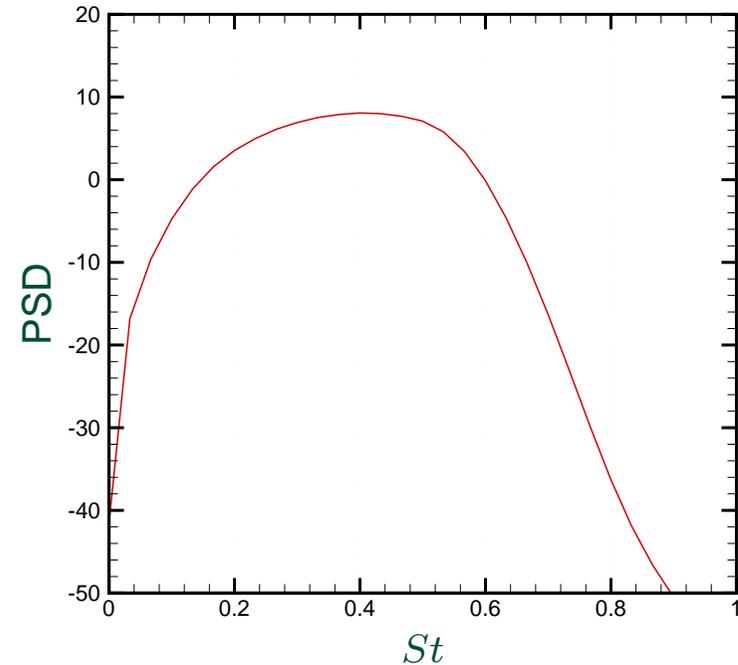


Fig. : Densité spectrale de puissance de l'excitation temporelle  $\gamma_e$ .

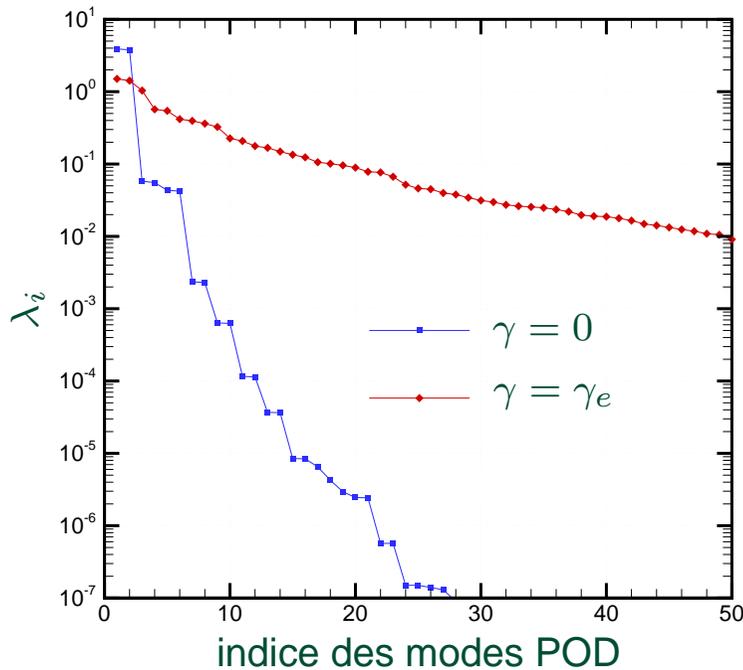
$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi St_1 t) \times \sin(2\pi St_2 t - A_2 \sin(2\pi St_3 t))$$

avec  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = 18$ ,  $St_1 = 1/120$ ,  $St_2 = 1/3$  et  $St_3 = 1/60$ .

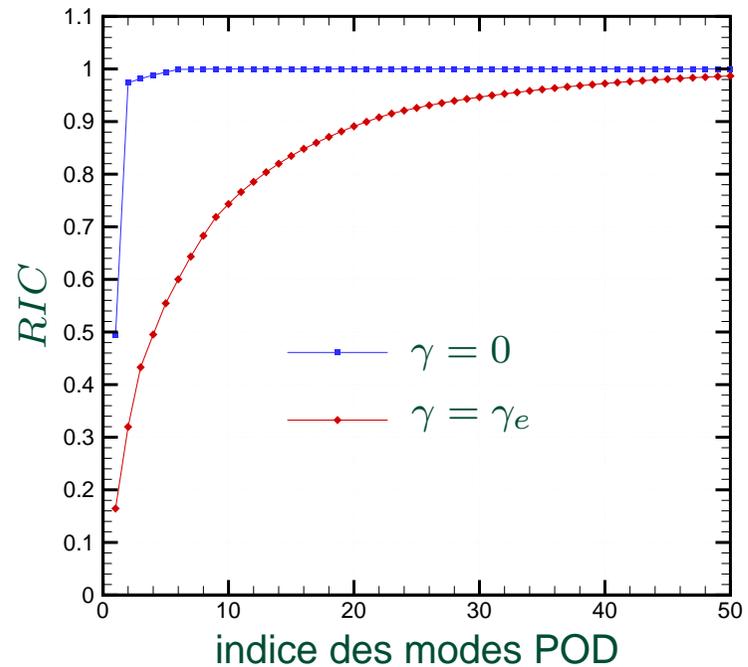
- ▶  $0 \leq \text{amplitudes} \leq 4$  et analyse de Fourier  $\Rightarrow 0 \leq \text{fréquences} \leq 0,8$
- ▶  $\gamma_e$  loi de contrôle initiale dans processus itératif.



# III - Base POD non réactualisée *Energie*



**Fig. :** Comparaison des spectres de valeurs propres pour l'écoulement non contrôlé ( $\gamma = 0$ ) et pour l'écoulement manipulé ( $\gamma = \gamma_e$ ).



**Fig. :** Comparaison du contenu informationnel relatif pour l'écoulement non contrôlé ( $\gamma = 0$ ) et pour l'écoulement manipulé ( $\gamma = \gamma_e$ ).

► Cylindre non contrôlé,  $\gamma = 0$  :

↪ 2 modes sur 100 suffisent pour représenter 97% de l'énergie.

► Cylindre excité,  $\gamma = \gamma_e$  :

↪ 40 modes sur 100 sont nécessaires pour représenter 97% de l'énergie

⇒ *Evolution de la robustesse p.r. aux évolutions dynamiques.*



# III - Base POD non réactualisée *Loi de contrôle sous-optimale*

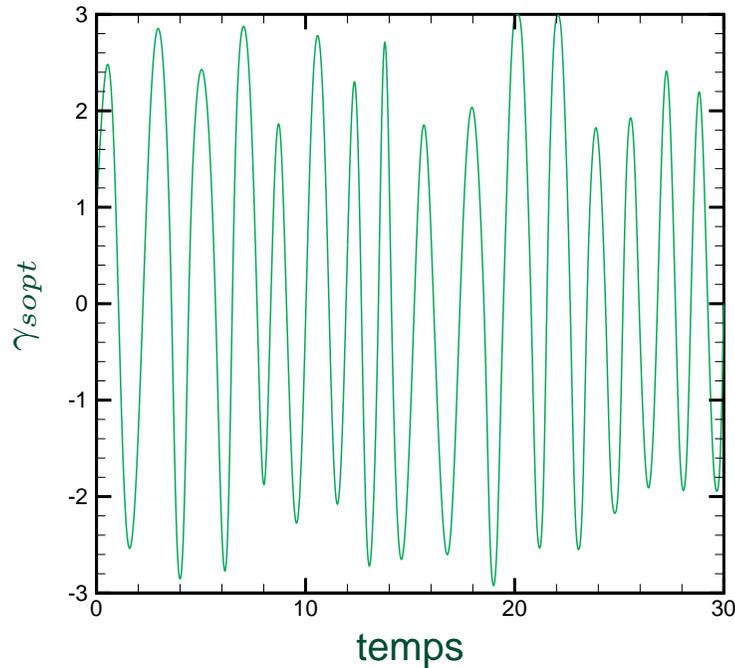


Fig. : Evolution temporelle de la loi de contrôle

$\gamma_{opt}$ .

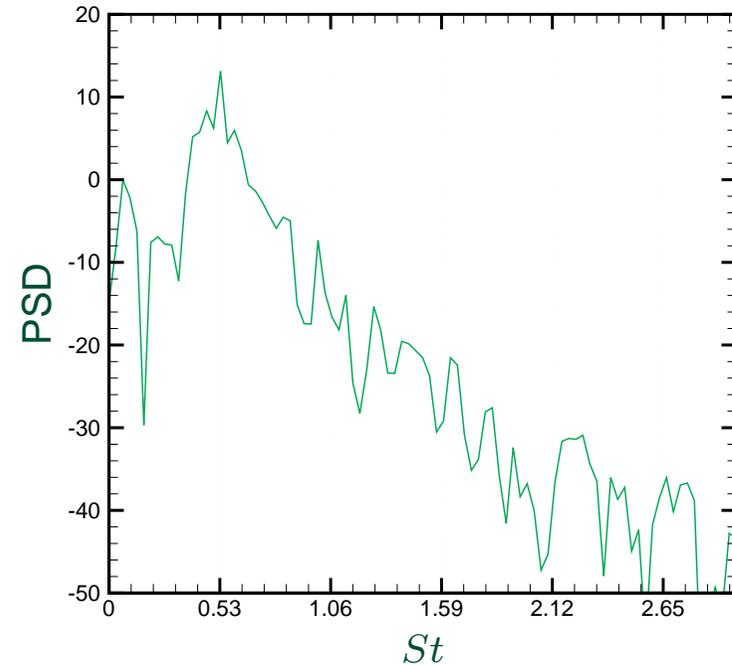


Fig. : Densité spectrale de puissance de la loi de

contrôle  $\gamma_{opt}$ .

- Diminution très importante de l'instationnarité du sillage.

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 11,85 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\gamma_{opt}) = 3,70.$$

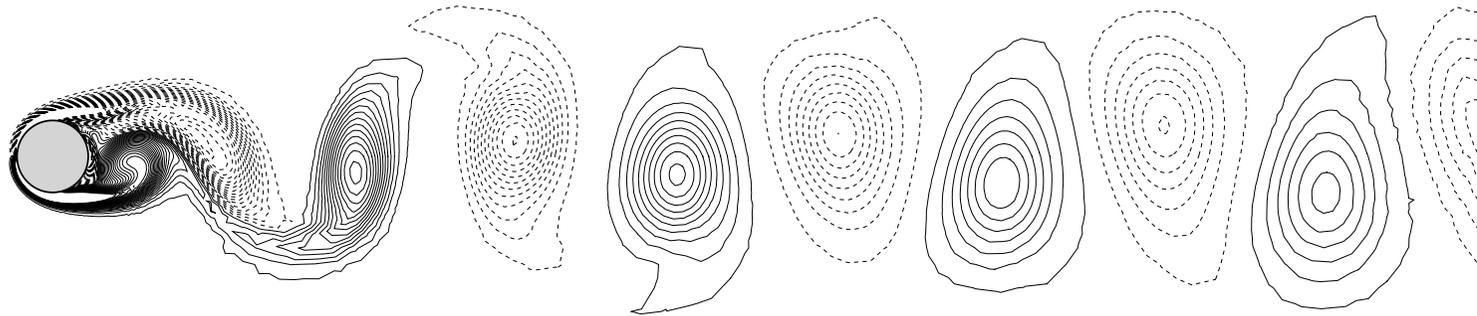
$$\gamma_{opt} \simeq A \sin(2\pi St_f t) \text{ avec } A = 2,2 \text{ et } St_f = 0,53$$

- Le contrôle est optimal pour le système POD ROM.
- Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

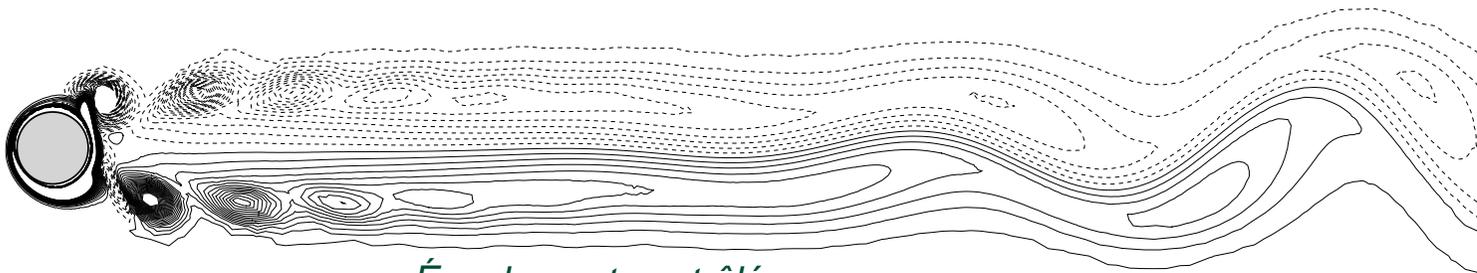


# III - Base POD non réactualisée *Sillage*

- ▶ Aucune preuve mathématique d'optimalité pour Navier-Stokes.



Écoulement non contrôlé,  $\gamma = 0$ .



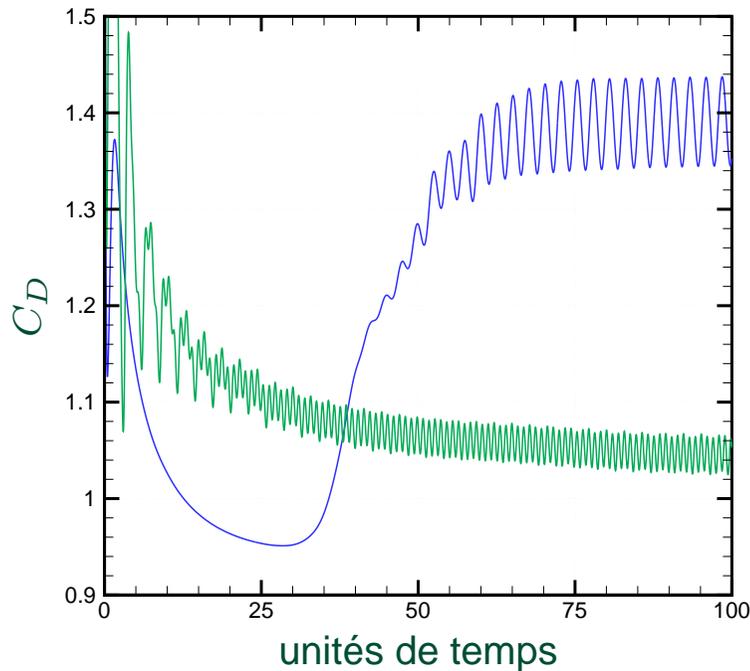
Écoulement contrôlé,  $\gamma = \gamma_{opt}$ .

Fig. : Isocontours de vorticité  $\omega_z$ .

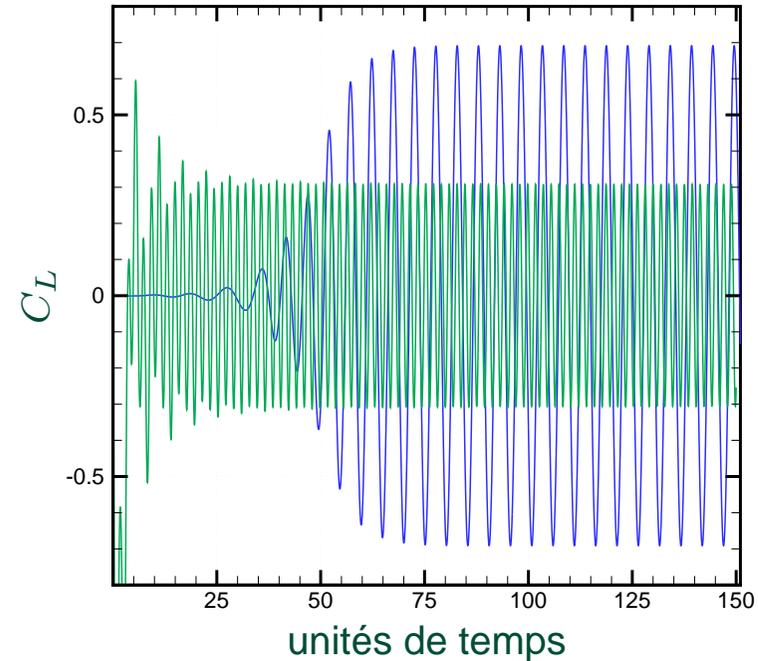
- ▶ Écoulement non contrôlé :  $\gamma = 0 \Rightarrow$  Sillage asymétrique.
  - $\hookrightarrow$  Grosses structures porteuses d'énergie.
- ▶ Écoulement contrôlé :  $\gamma = \gamma_{opt} \Rightarrow$  Sillage quasi symétrique.
  - $\hookrightarrow$  Plus petites structures  $\Rightarrow$  moins énergétiques.



### III - Base POD non réactualisée Coefficients aérodynamiques



**Fig. :** Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé et dans le cas où le contrôle sous-optimal est appliqué.



**Fig. :** Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance dans le cas non contrôlé et dans le cas où le contrôle sous-optimal est appliqué.

- ▶ Importante réduction de traînée :

$$C_D = 1,40 \text{ pour } \gamma = 0 \text{ et } C_D = 1,06 \text{ pour } \gamma = \gamma_{sopt} \text{ (plus de 25\%).}$$

- ▶ Diminution de l'amplitude de la portance :

$$C_L = 0,68 \text{ pour } \gamma = 0 \text{ et } C_L = 0,13 \text{ pour } \gamma = \gamma_{sopt}.$$



### III - Base POD non réactualisée *Coûts de calcul*

► Contrôle optimal Navier-Stokes par He *et al.* (2000) :

↔ loi de contrôle harmonique avec  $A = 3$  et  $St_f = 0,75$ .

⇒ 30% de réduction de traînée.

► Contrôle *sous-optimal* POD ROM (présente étude) :

↔ loi de contrôle harmonique avec  $A = 2,2$  et  $St_f = 0,53$ .

⇒ 25% de réduction de traînée.

● Coûts énergétiques inférieurs (gain énergétique supérieur ?)

● Temps de calcul :

**100 fois inférieur** par POD ROM que par NSE ! (idem équations adjointes et condition d'optimalité)

● Stockage mémoire :

**600 fois moins de variables** par POD ROM que par NSE !



# IV - Base POD réactualisée *Présentation*

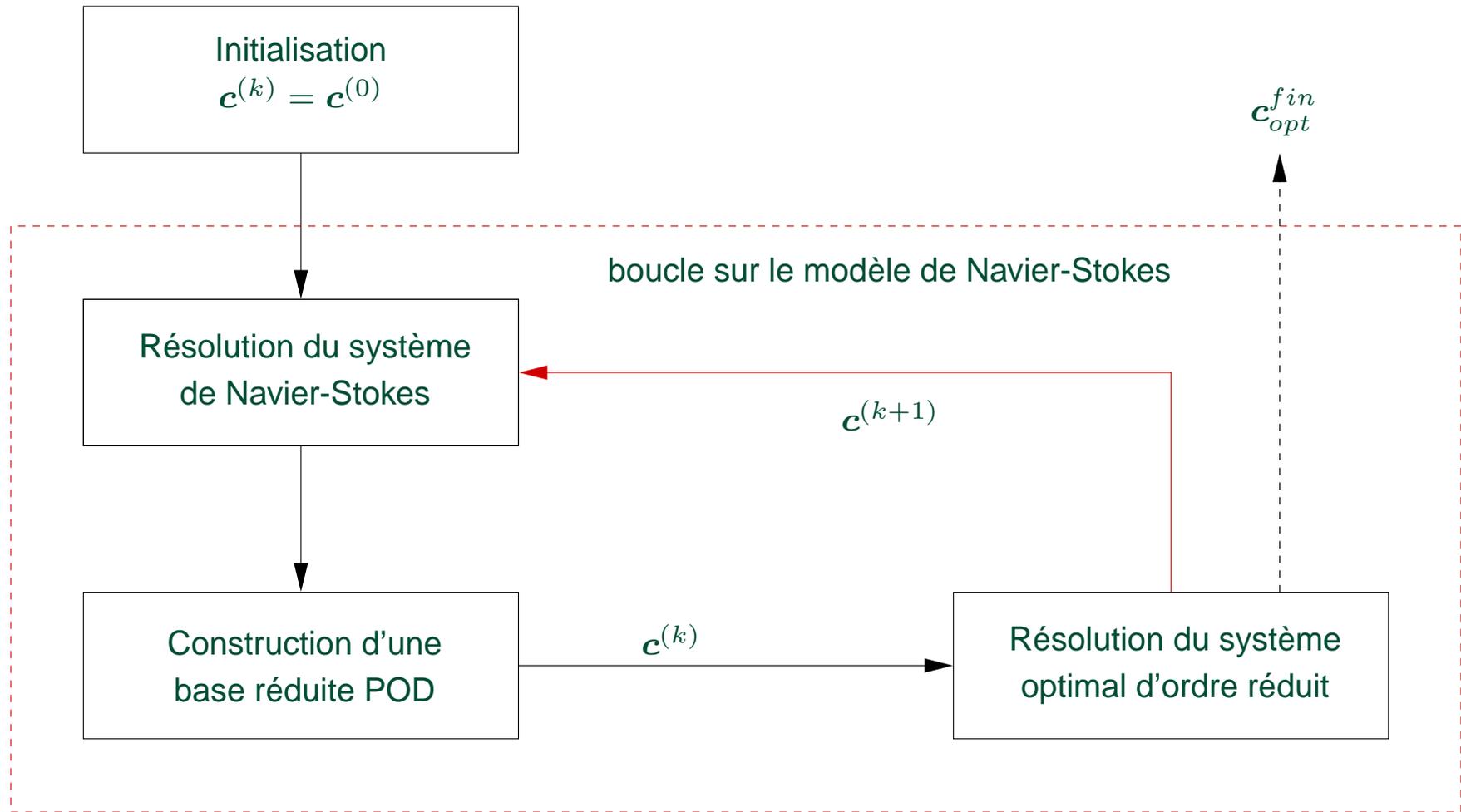
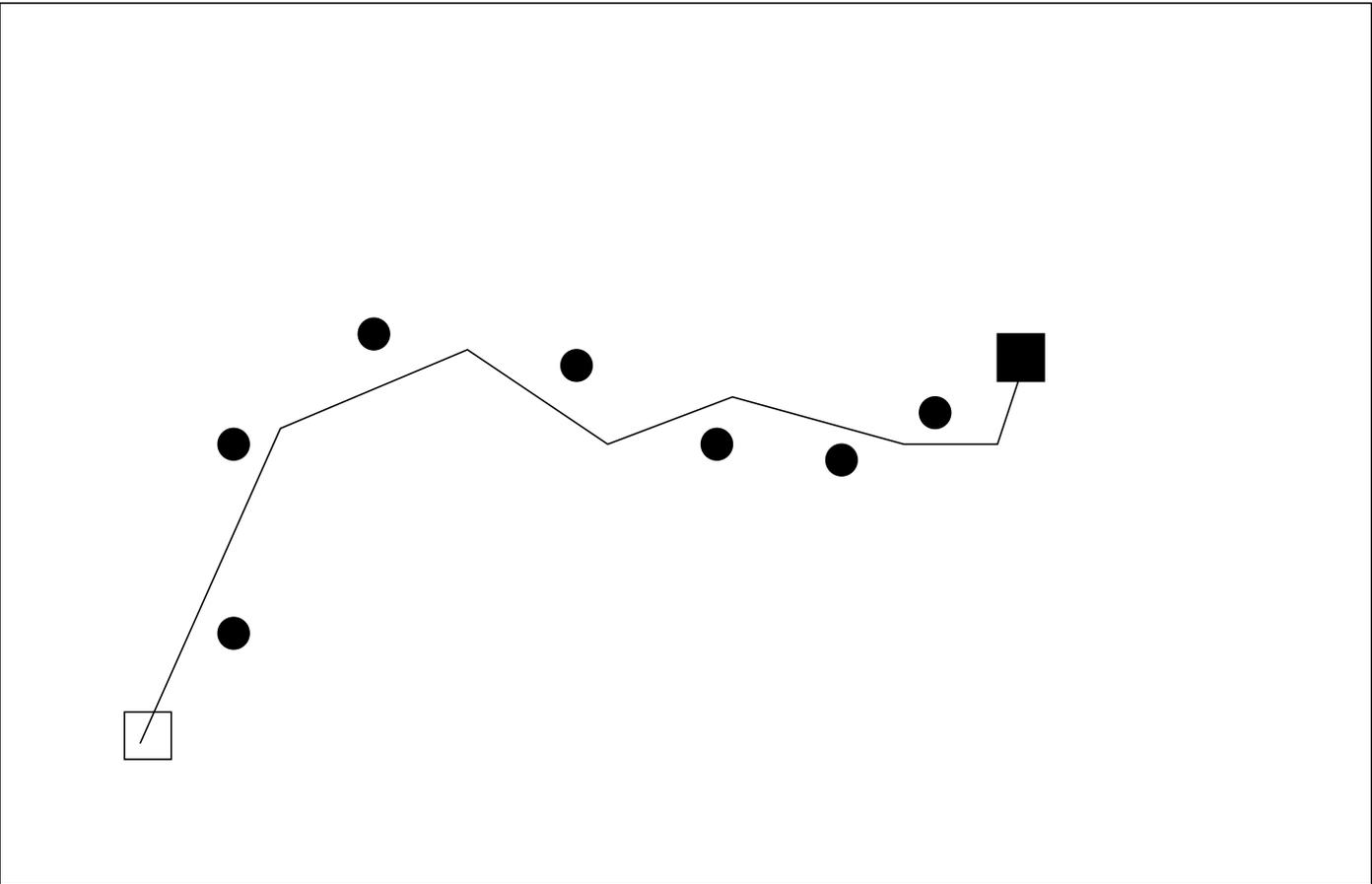


Fig. : Représentation schématique de la méthode d'optimisation avec réactualisation de la base POD.

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?



# IV - Base POD réactualisée *Présentation*



*Echantillonnage idéal.*

**Fig. :** *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*  
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*  
• *réalisation utilisée pour la base de données.*

**Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?**



# IV - Base POD réactualisée Modes de non-équilibre

► Nécessité de directions non prises en compte dans la base POD initiale  $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N_{gal}}$

► Construction de  $N_{neq}$  modes particuliers

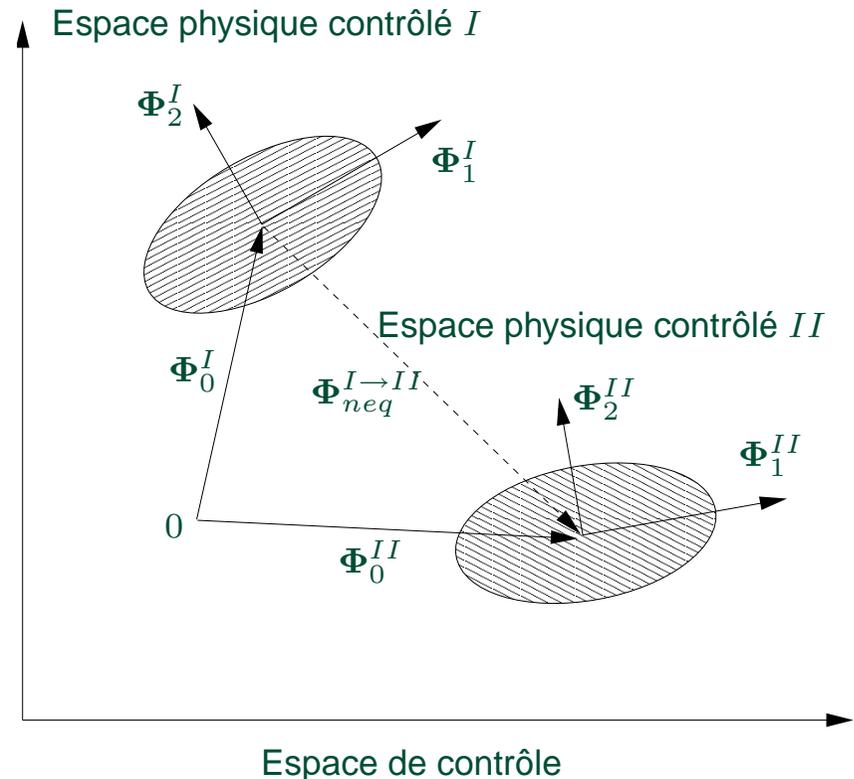
● Vecteur translation entre le champ moyen  $I$  et le champ moyen  $II$  :

$$\Phi_0^{I \rightarrow II} = \Phi_0^{II} - \Phi_0^I.$$

● Ajout à la base existante (Gram-Schmidt)

$$\Phi_{N_{gal}+1}^I \equiv \tilde{\Phi}_0^{I \rightarrow II}.$$

● Idem pour  $\Phi_0^{I \rightarrow III}$ , etc...



**Fig. :** Représentation schématique d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre.

Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. et Thiele, F. (2003) : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497** pp. 335–363.



# IV - Base POD réactualisée *Système dynamique d'ordre réduit*

- Décomposition de la vitesse sur  $N_{gal} + N_{neq} + 1$  modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{a_0(t) \Phi_0(\mathbf{x})}_{\text{champ moyen}} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}.$$

- Système dynamique avec  $N_{gal} + N_{neq} + 1$  modes retenus (équations d'état) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_i(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma(\mathbf{c}, t)}{dt} + \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t). \\ a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

$\mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$  et  $\mathcal{G}_i$  dépendent de  $\Phi$ ,  $\mathbf{u}_c$  et  $Re$ .



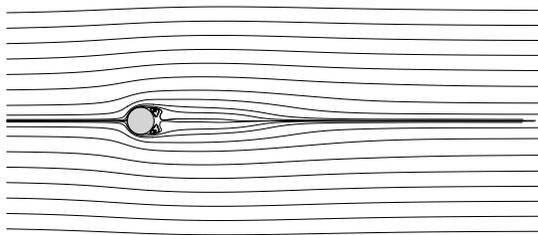
# IV - Base POD réactualisée *Aspects physiques et dynamiques des modes POD*

Aspects physiques	Modes	Aspects dynamiques
fonction de contrôle	$\mathbf{u}_c$	dynamique pré-déterminée
mode écoulement moyen	$\mathbf{u}_m, i = 0$	$a_0 = Cste$
modes POD Galerkin correspondent à la physique de l'écoulement	$i = 1$	<b>Système dynamique</b> modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$ )
	$i = 2$	
	...	
	$i = N_{gal}$	
modes de non-équilibre correspondent à des directions privilégiées	$i = N_{gal} + 1$	
	...	
	$i = N_{gal} + N_{neq}$	

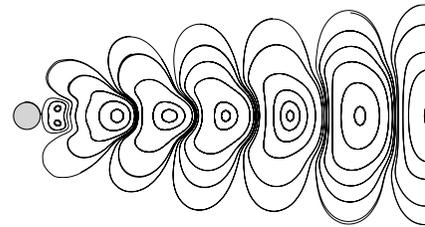
**Tab. :** *Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.*



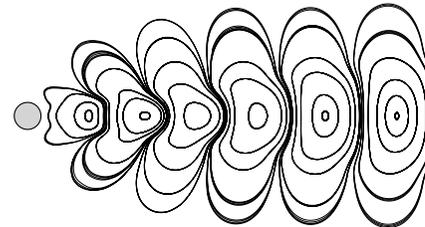
# IV - Base POD réactualisée Modes POD Galerkin et modes de non-équilibre



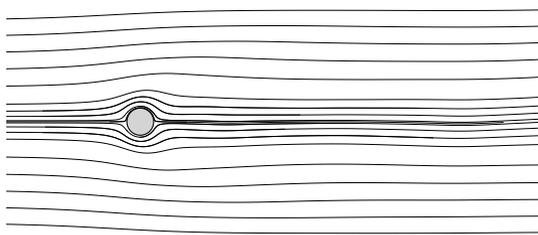
Éclt. contrôlé (I) moyen



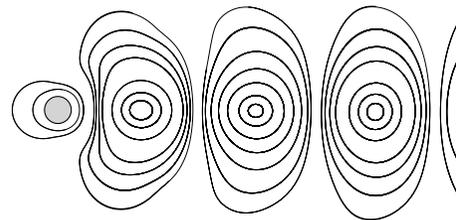
1er mode POD de I



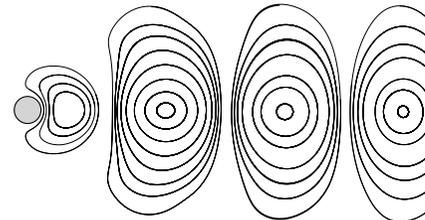
2nd mode POD de I



Éclt. contrôlé (II) moyen



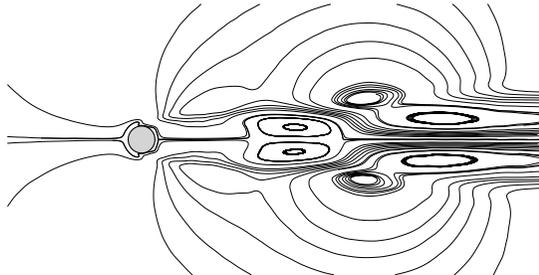
1er mode POD de II



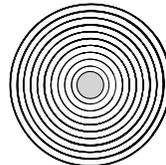
2nd mode POD de II



Mode shift de I vers II



Mode shift de I vers base



Fonction de contrôle

**Fig. :** Représentation de modes Galerkin, de la fonction de contrôle  $u_c$ , et de modes de non-équilibre présents dans la base POD



► Opérateur de traînée

$$\mathcal{C}_D : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \mapsto 2 \int_{\Gamma_c} \left( u_3 n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial y} n_y \right) d\Gamma.$$

► En variables réduites,

↔ Coefficient de traînée réel Navier-Stokes  $C_D = \mathcal{C}_D(\mathbf{U})$  avec  $\mathbf{U} = (u, v, p)^T$

↔ Coefficient de traînée modélisé par POD  $\tilde{C}_D = \mathcal{C}_D(\tilde{\mathbf{U}})$  avec  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})^T$

► Problème :  $\tilde{p}$  n'est pas connu

↔ La base POD est étendue au champ de pression :  $\Phi = (\Phi, \Phi^p)^T$

$$\Rightarrow \text{Corrélations avec pression } C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} U_i(\mathbf{x}, t) U_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x}$$



## ► Décomposition

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}.$$

## ► Evolution du coefficient de traînée modélisé par POD

$$\tilde{C}_D(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \quad \text{avec} \quad N_i = C_D(\Phi_i).$$

## ► Fonction objectif modélisée par POD (coefficient de traînée moyen)

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i dt.$$



# IV - Base POD réactualisée Formulation contrôle optimal POD ROM

► Système dynamique adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left( \mathcal{B}_{ji} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \frac{1}{T} N_i, \\ \xi_i(T) = 0. \end{array} \right.$$

► Conditions d'optimalité

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left( \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \nabla_{\mathbf{c}} \gamma dt.$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_i = -\frac{d\xi_i}{dt} \mathcal{D}_i + \xi_i \left( \mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{G}_i \right)$$



# IV - Base POD réactualisée Formulation contrôle optimal POD ROM

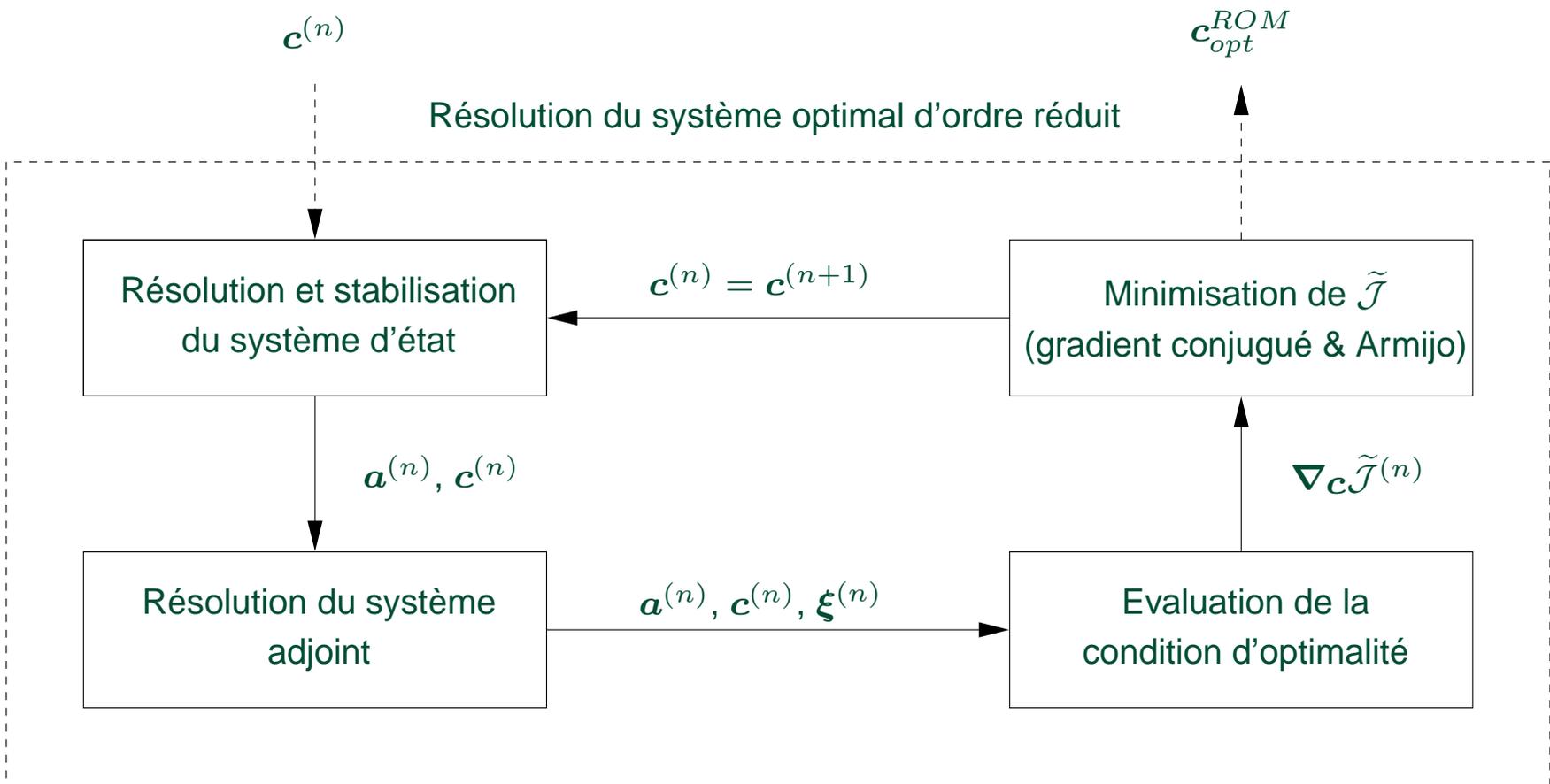


Fig. : Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.

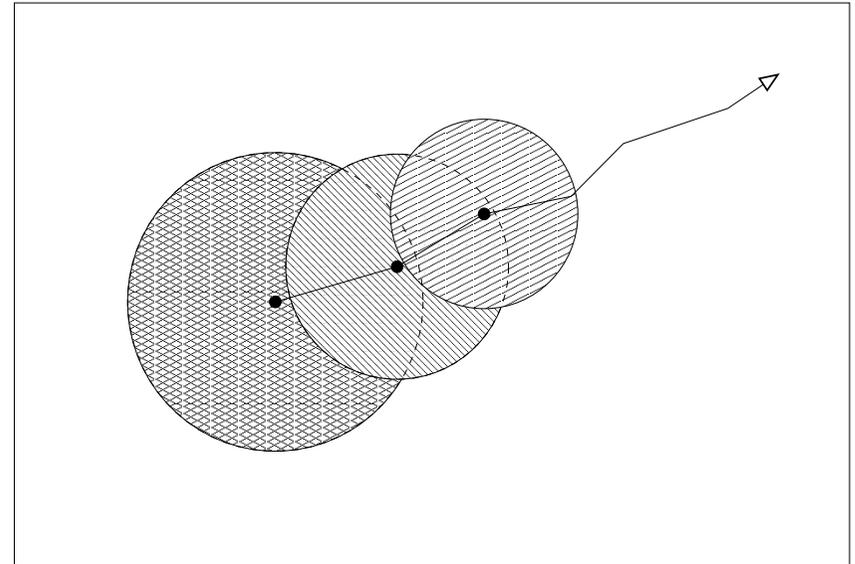


# IV - Base POD réactualisée *Résolution du problème d'optimisation*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes pour "rafraîchir" la base POD ?

→ Déterminer un domaine de validité du modèle réduit

- Domaine "infini" (pas de contraintes)
- Détermination empirique : méthode adaptative
- Détermination automatique : méthode à région de confiance (TRPOD)



## Avantages TRPOD

- ▶ Pas d'empirisme
- ▶ Preuves de convergence de la solution sous certaines conditions
- ▶ Coûts de calcul identiques à méthode adaptative

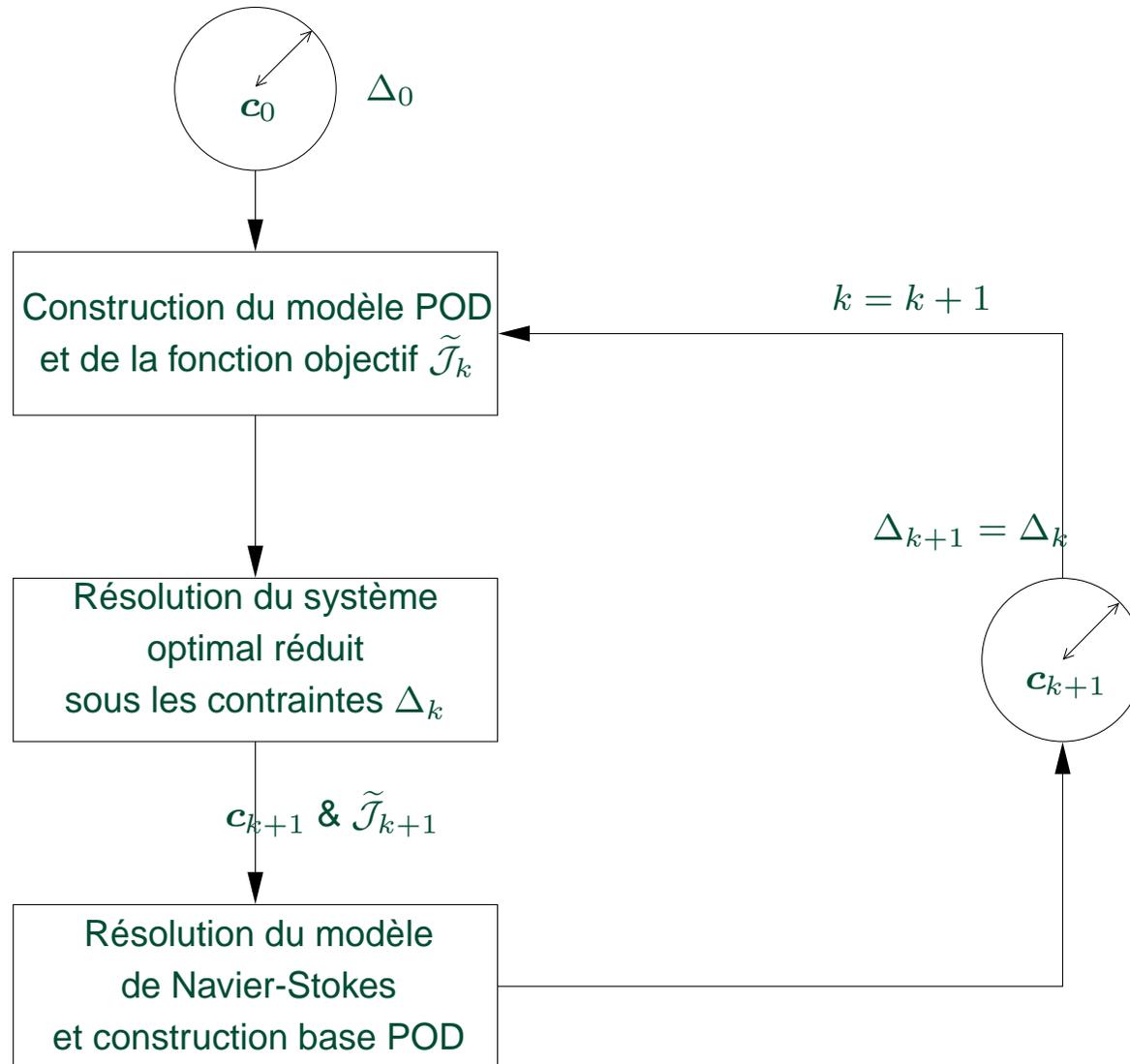


Conn, A.R., Gould, N.I.M. et Toint, P.L. (2000) : Trust-region methods. *SIAM, Philadelphia.*



# IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Initialisation :  $c_0$ , résolution du modèle de Navier-Stokes.  $k = 0$ .

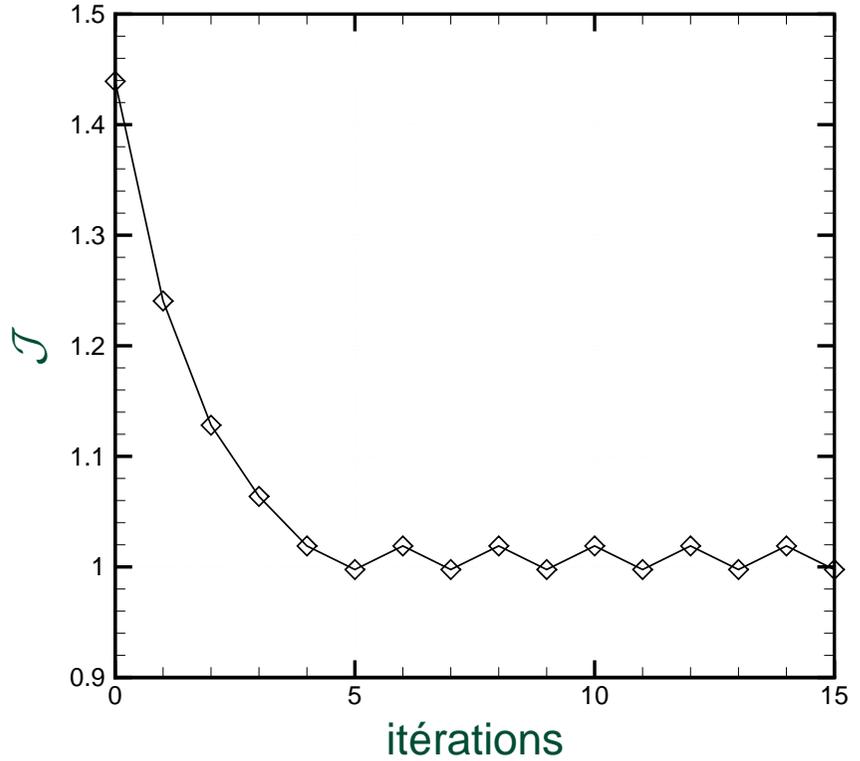
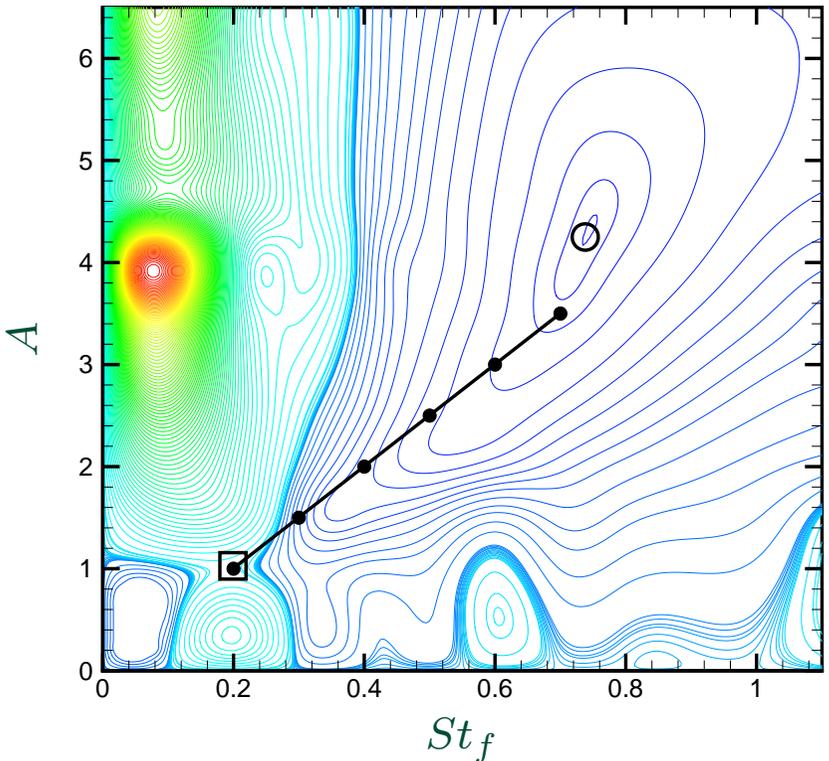


**Fig. :** Schématisation de la méthode adaptative.



# IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 1,0$  et  $St_f = 0,2$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de  $A = 3,25$  et  $St_f = 0,65$

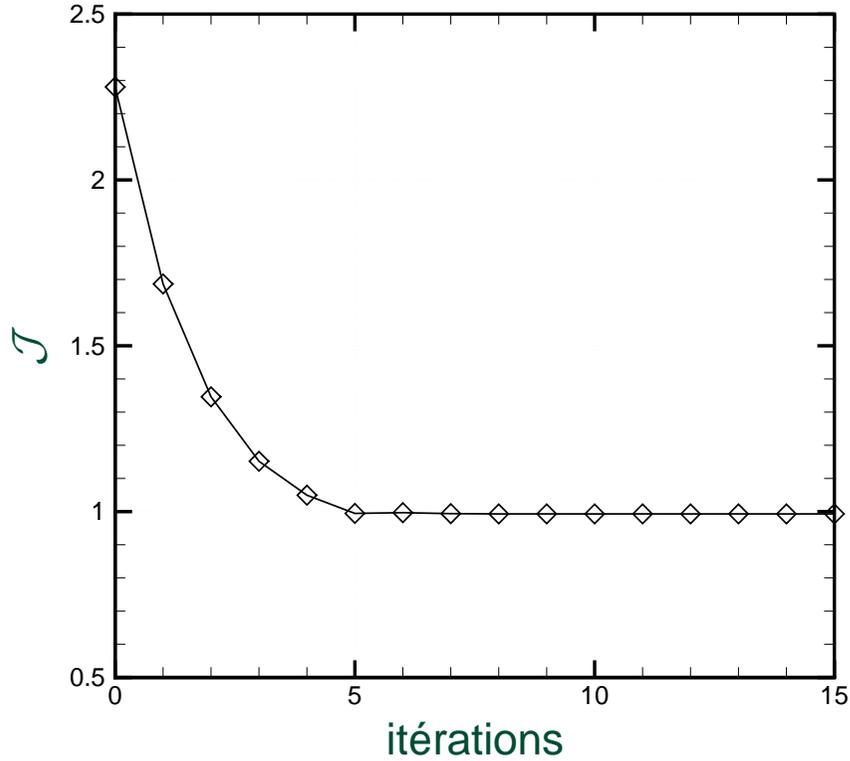
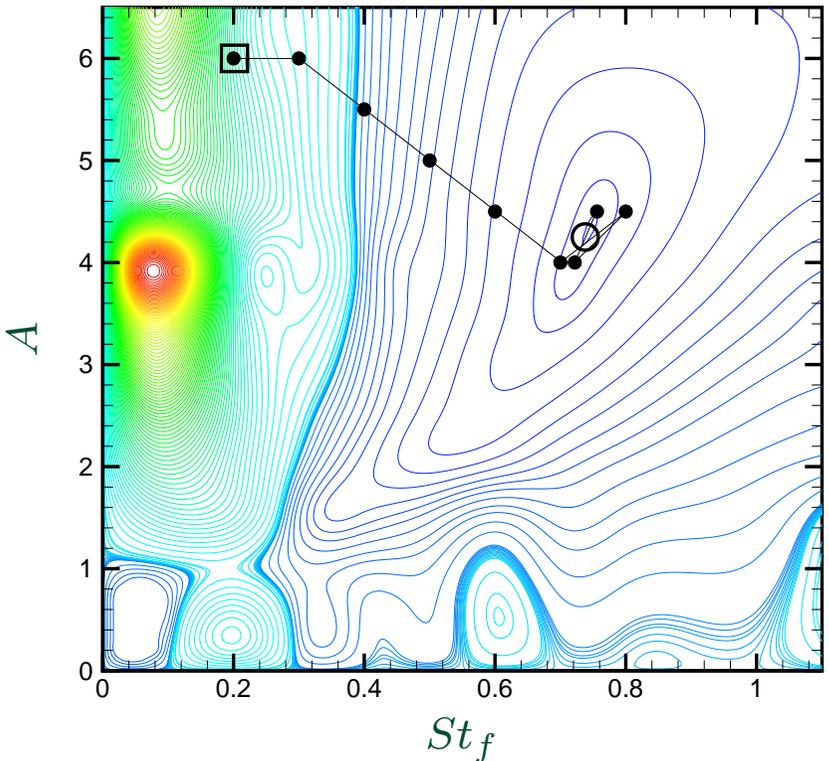
Coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 1,01$

Pas de convergence...



# IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 6,0$  et  $St_f = 0,2$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

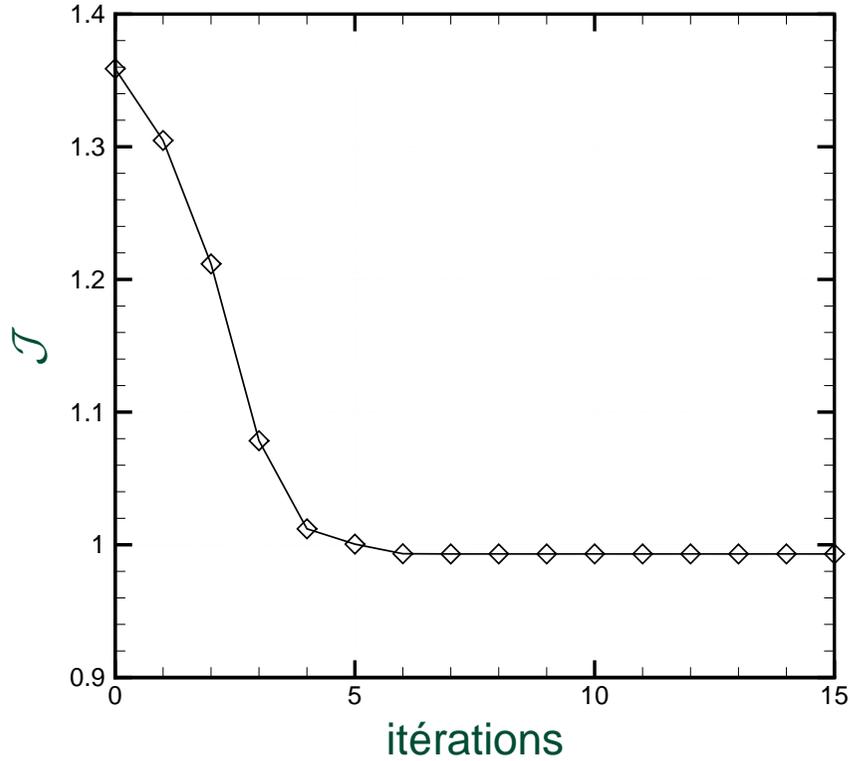
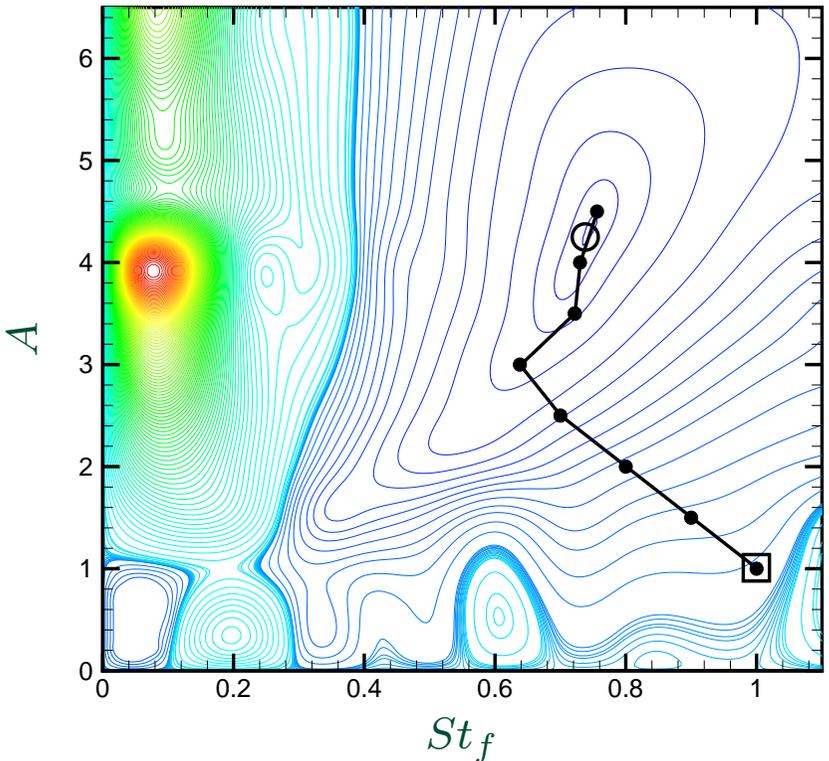
Coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...



# IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 1,0$  et  $St_f = 1,0$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

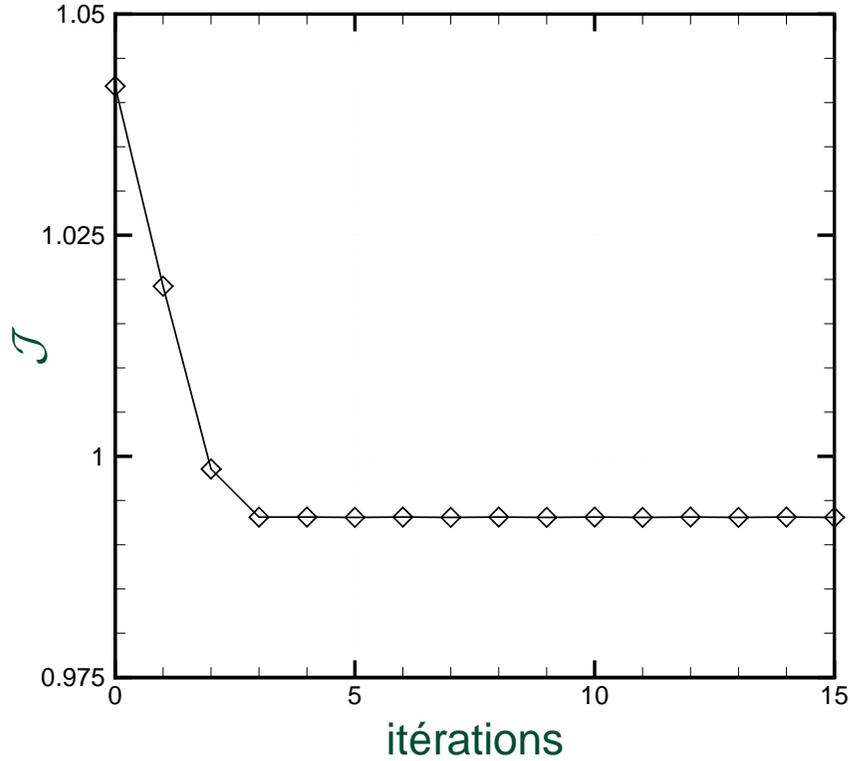
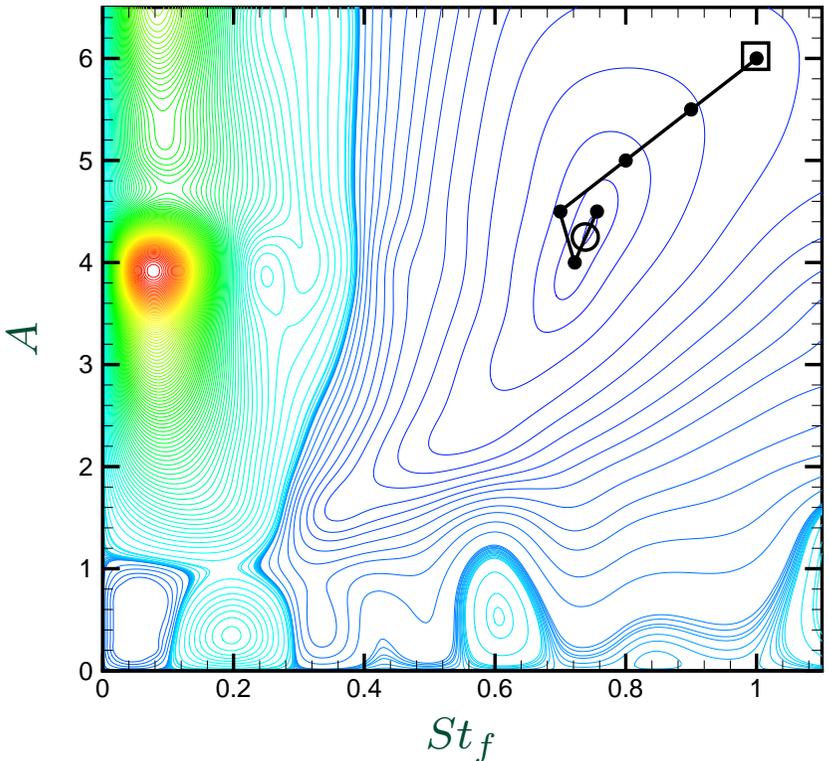
Coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...



# IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 6,0$  et  $St_f = 1,0$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...



# IV - Base POD réactualisée Méthode à région de confiance (TRPOD)

Initialisation :  $c_0$ , résolution du modèle de Navier-Stokes,  $\mathcal{J}_0$ .  $k = 0$ .

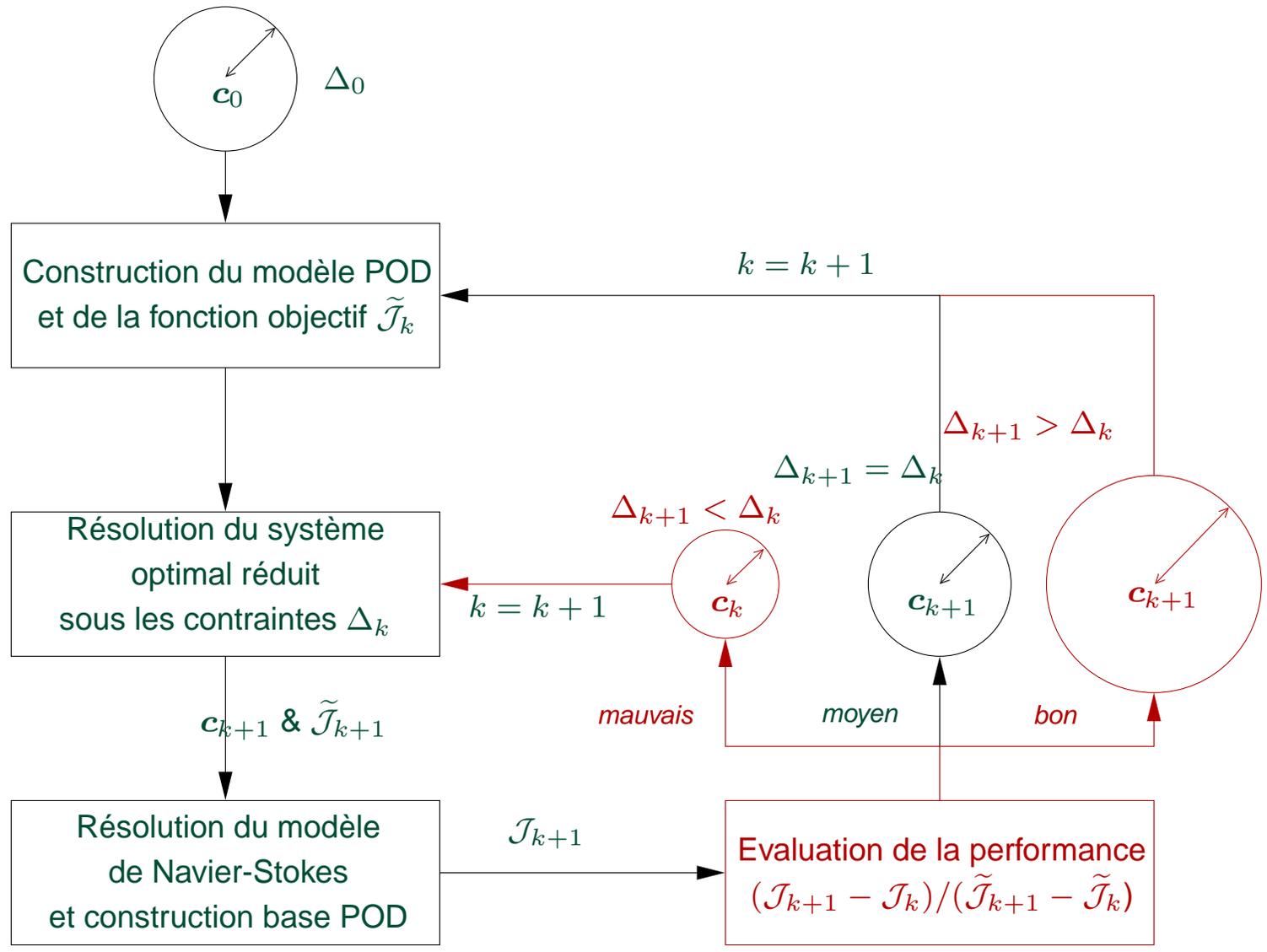
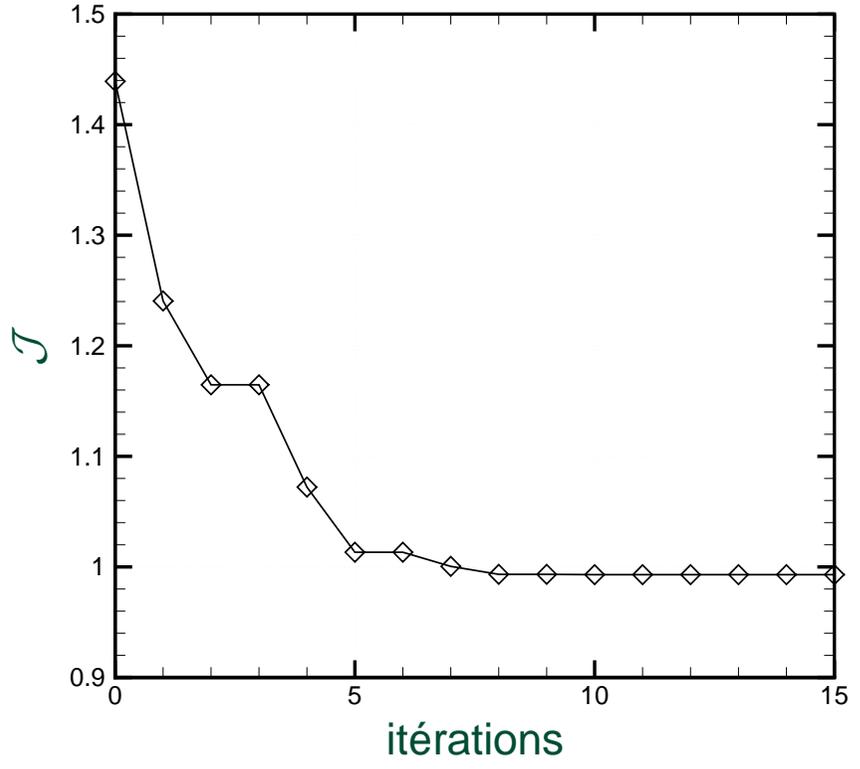
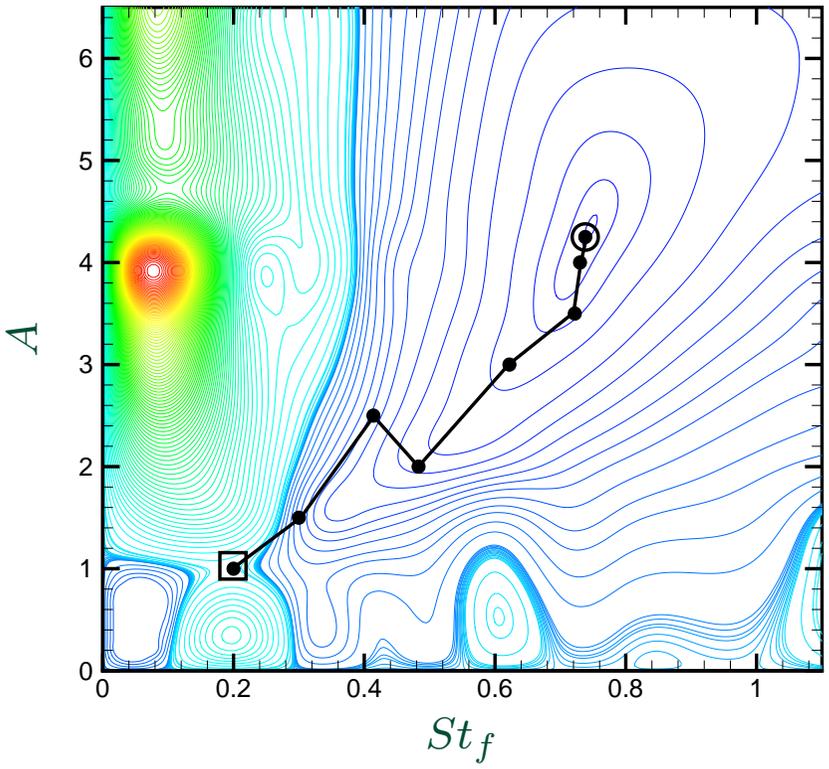


Fig. : Schématisation de la méthode à région de confiance.



# IV - Base POD réactualisée *Méthode à région de confiance (TRPOD)*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 1,0$  et  $St_f = 0,2$



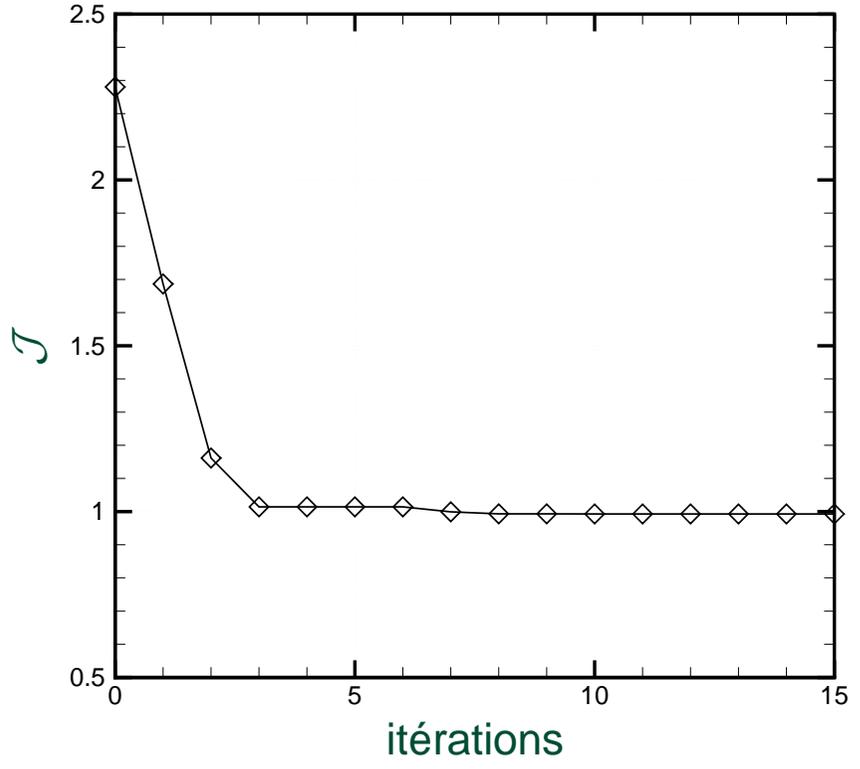
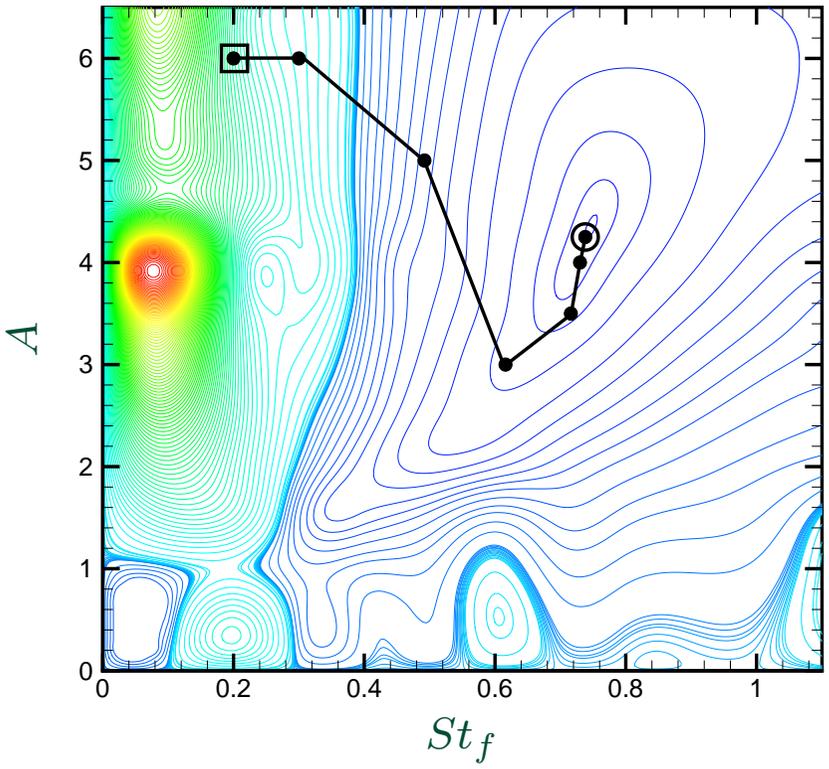
Paramètres de contrôle optimaux :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

**Convergence** : coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$ ,  
obtenus en uniquement 8 résolutions de Navier-Stokes



# IV - Base POD réactualisée *Méthode à région de confiance (TRPOD)*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 6,0$  et  $St_f = 0,2$



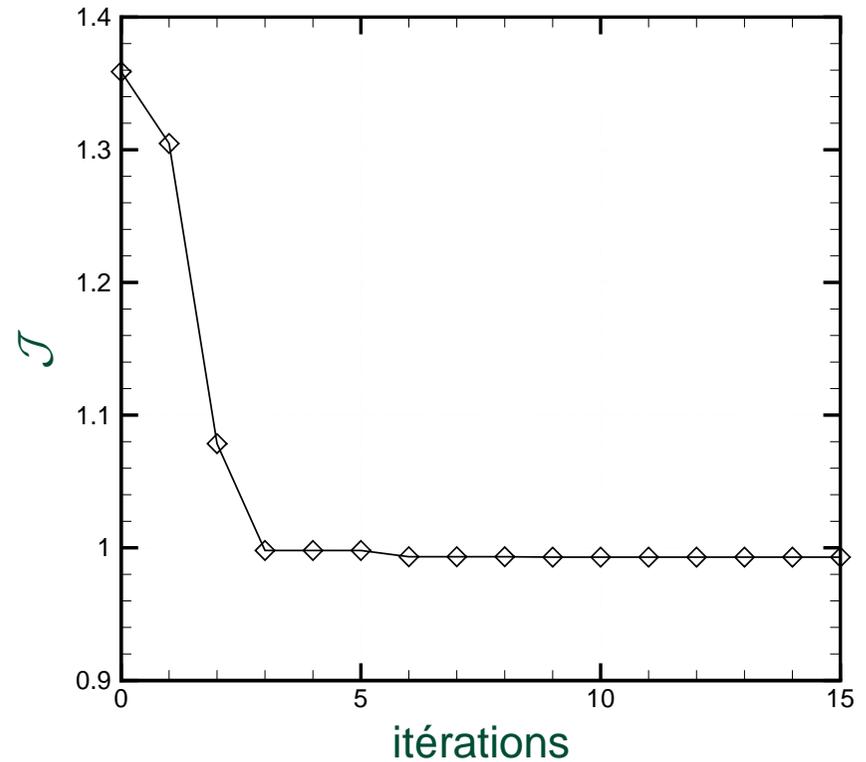
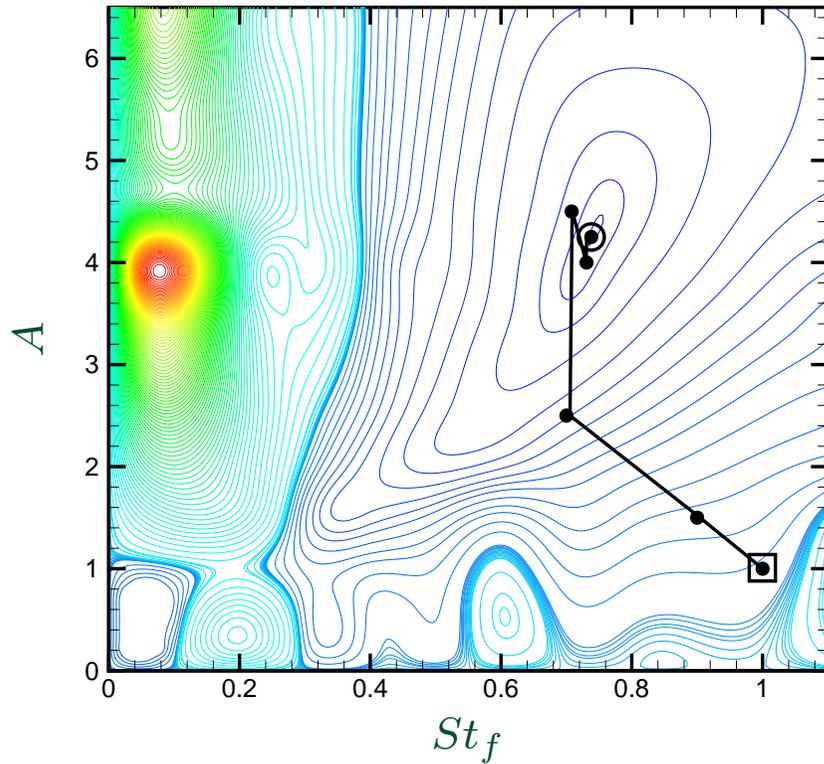
Paramètres de contrôle optimaux :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

**Convergence** : coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$ ,  
obtenus en uniquement 6 résolutions de Navier-Stokes



# IV - Base POD réactualisée *Méthode à région de confiance (TRPOD)*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 1,0$  et  $St_f = 1,0$



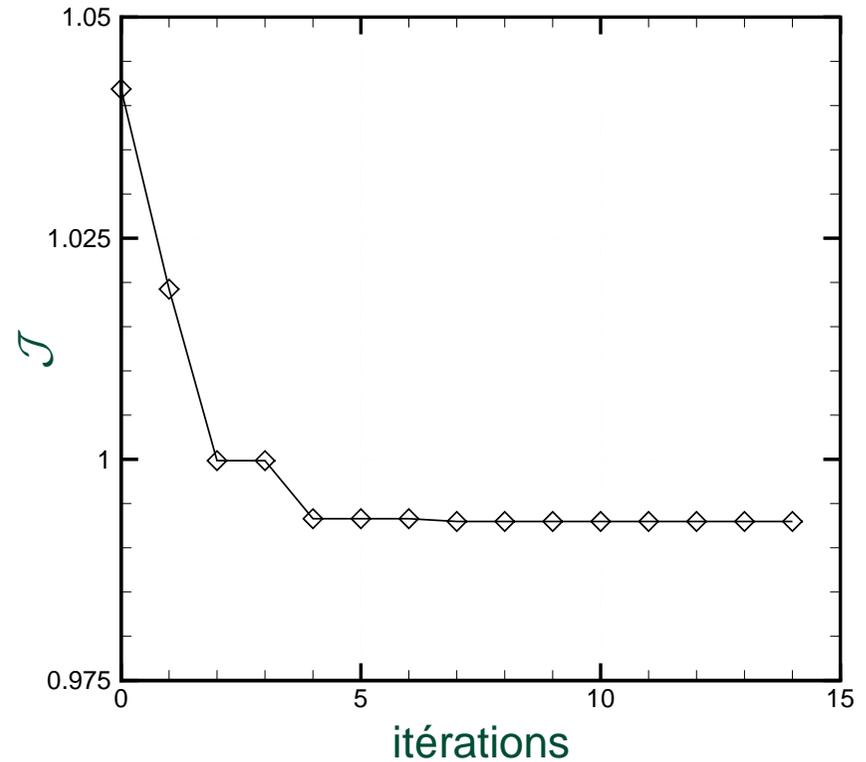
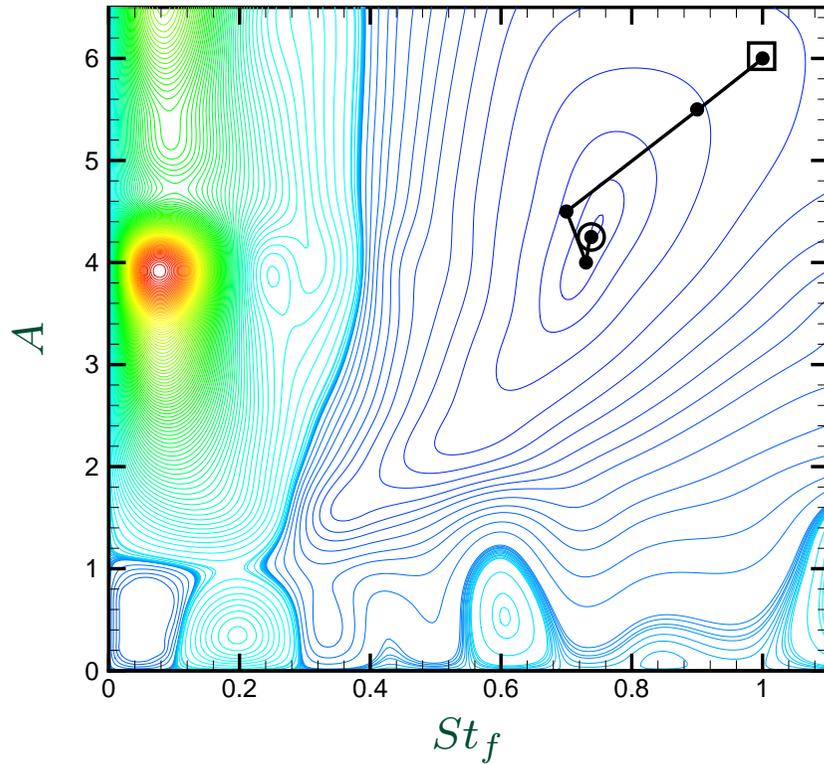
Paramètres de contrôle optimaux :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

**Convergence** : coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$ ,  
obtenus en uniquement 5 résolutions de Navier-Stokes



# IV - Base POD réactualisée *Méthode à région de confiance (TRPOD)*

Paramètres de contrôle initiaux :  $A = 6,0$  et  $St_f = 1,0$



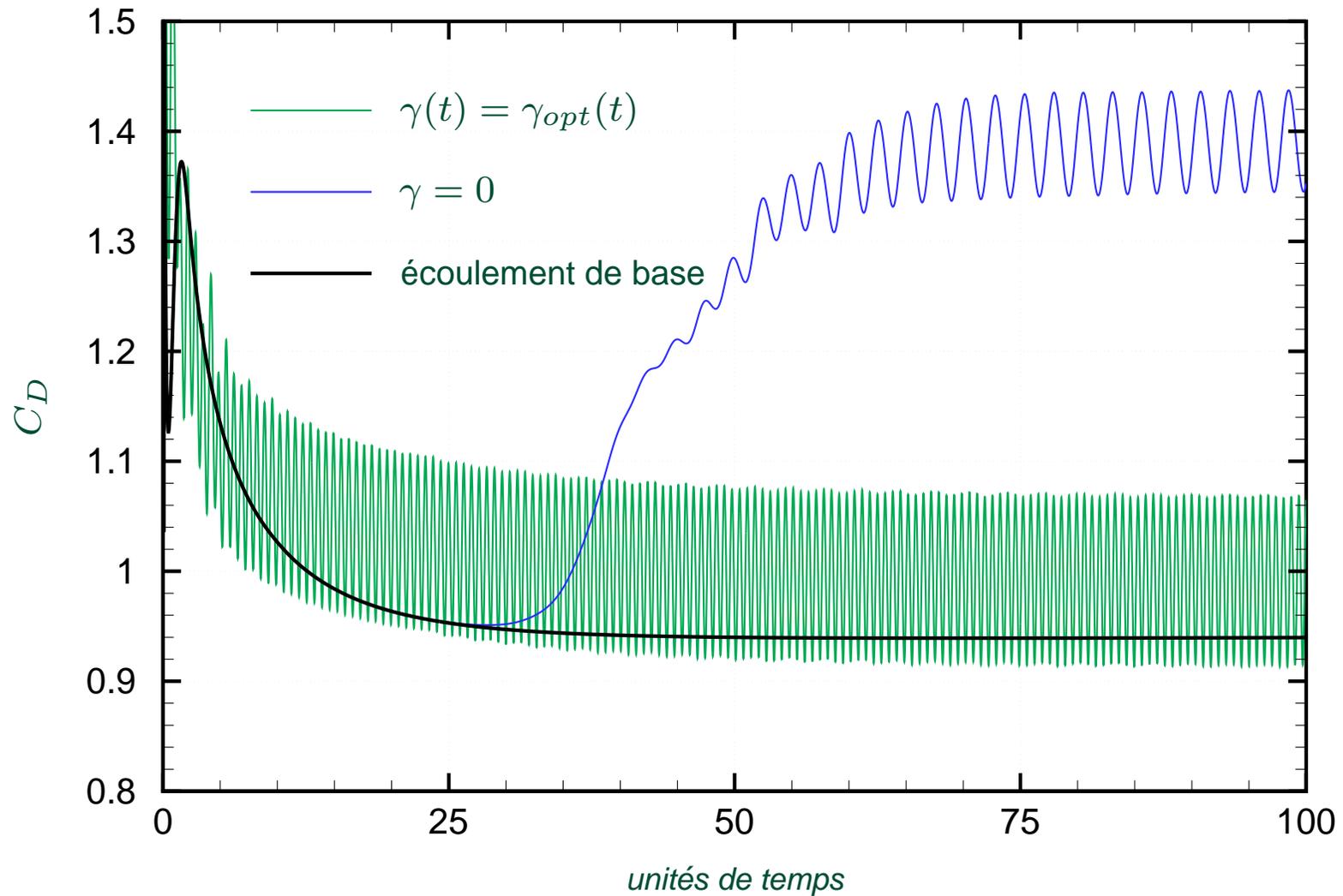
Paramètres de contrôle optimaux :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$

**Convergence** : coefficient de traînée moyen :  $\mathcal{J} = 0,993$ ,  
obtenus en uniquement 4 résolutions de Navier-Stokes



# IV - Base POD réactualisée Résultats numériques

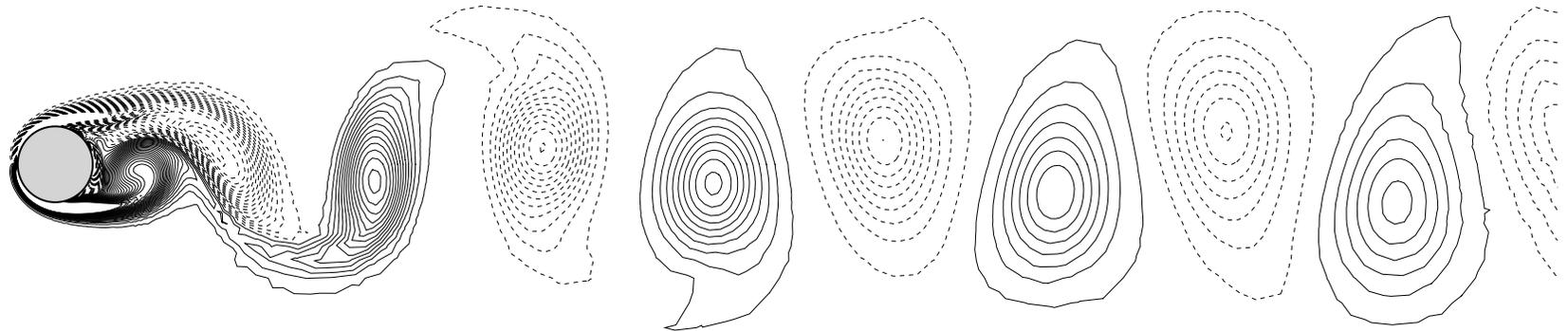
► Loi de contrôle optimale :  $\gamma_{opt}(t) = A \sin(2\pi St_f t)$  avec  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$



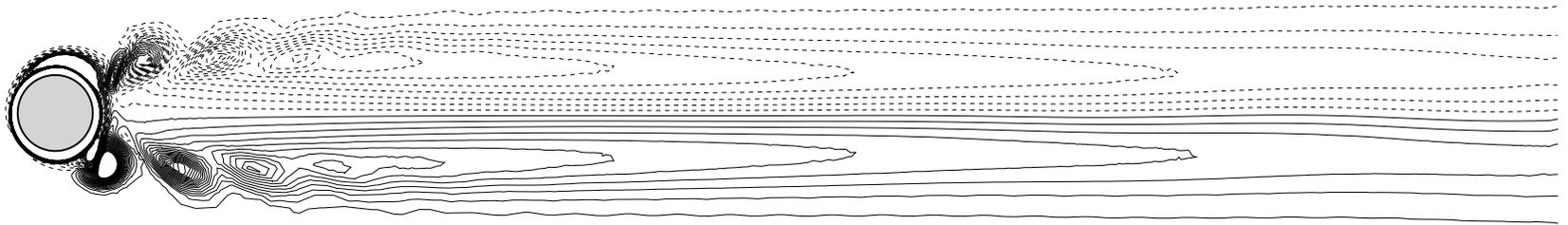
► Diminution relative du coefficient de traînée de 30% ( $\mathcal{J}_0 = 1,4 \Rightarrow \mathcal{J}_{opt} = 0,99$ )



# IV - Base POD réactualisée Résultats numériques



Écoulement non contrôlé,  $\gamma = 0$ .



Écoulement contrôlé,  $\gamma = \gamma_{opt}$ .

Fig. : Isocontours de vorticité  $\omega_z$ .

Écoulement contrôlé : Sillage proche fortement instationnaire, sillage lointain (après 5 diamètres) stationnaire et symétrique → écoulement de base stationnaire instable



# Conclusions

## Etude paramétrique

- ▶ Paramètres de contrôle "optimaux" :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$ .
- ▶  $(A, St_f)$  liés :  $\Theta = \frac{A}{\pi St_f} = 95^\circ$

## Optimisation SANS réactualisation de la base POD

- ▶ Loi de contrôle *sous-optimale* harmonique :  $A = 2,2$  et  $St_f = 0,53$ .
  - ↪ 25% de réduction relative de traînée
- ▶ Réduction des coûts de calculs POD/NSE
  - ↪ En temps : 100 fois, en mémoire 600 fois

## Optimisation AVEC réactualisation de la base POD (TRPOD)

- ▶ Loi de contrôle *optimale* harmonique :  $A = 4,25$  et  $St_f = 0,74$ .
  - ↪ 30% de réduction relative de traînée
- ▶ Réduction des coûts de calculs POD/NSE
  - ↪ En temps : 4 fois, en mémoire 1 600 fois

### Différences résultats ?

⇒ Méthodes et objectifs mathématiques différents

TRPOD : technique appropriée et efficace pour le contrôle d'écoulements avec preuves de convergence !

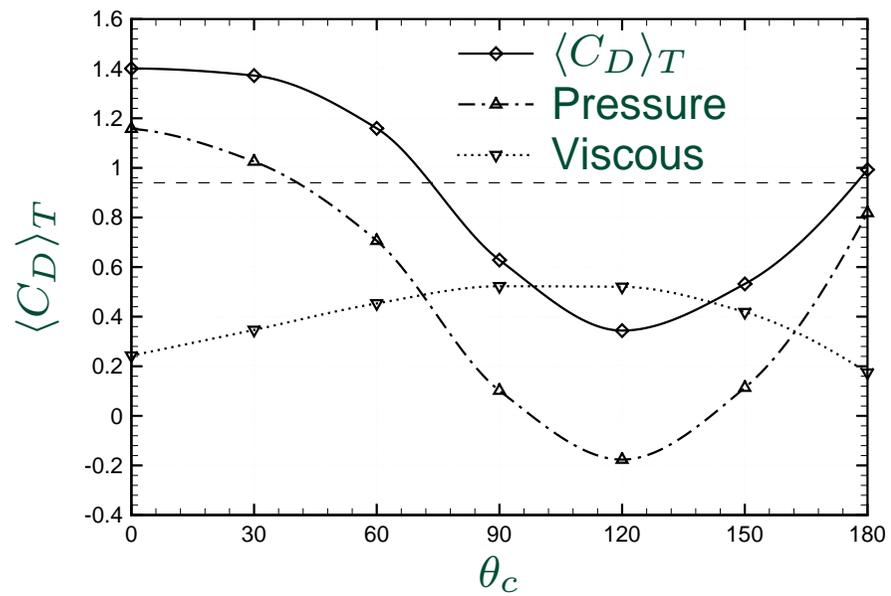


- Extension à des géométries complexes 3D en régime turbulent
  - ⇒ Ailes d'avion, automobiles
- Précautions sur le choix des réalisations
  - ⇒ Méthode *Centroidal Voronoi Tessellation* (CVT) proposée par Gunzburger
- Amélioration de la représentativité POD ROM par *balanced POD* (Rowley, Willcox)
- Comparaisons avec expériences : même loi optimale ?
- Contrôle optimal Navier-Stokes : comparaisons coûts de calcul
- Prendre en compte le coût lié au contrôle : puissance gagnée/puissance dépensée
- Contrôle partiel : optimisation 3 paramètres de contrôle
  - ↪ l'amplitude  $A$ , le nombre de Strouhal  $St_f$  plus la partie du cylindre  $\theta_c$  à contrôler

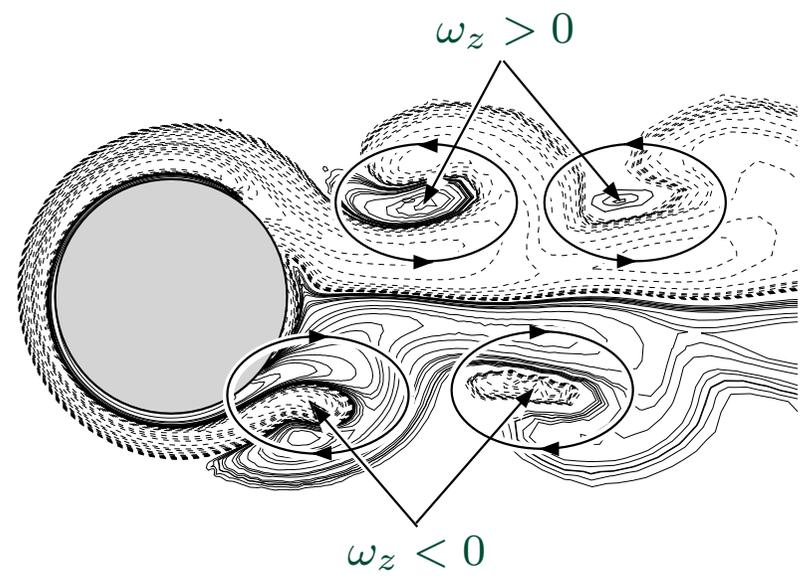


# Pour finir...

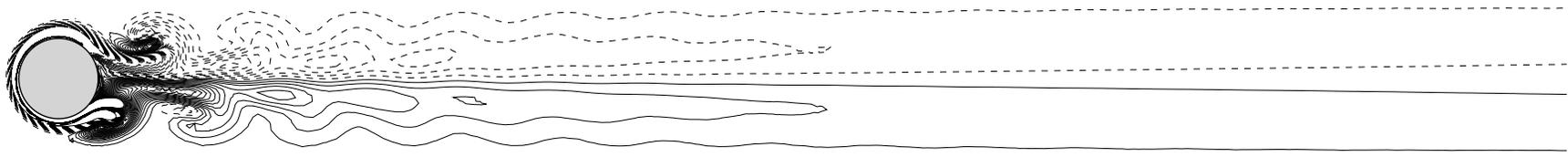
► Effet de l'angle de contrôle pour  $\gamma(t) = \gamma_{opt}(t)$



**Fig. :** Variation of the mean drag coefficient with respect to the control angle  $\theta_c$ .



**Fig. :** Organization of the near wake ( $\theta_c = 120^\circ$ ). —  $\omega_z > 0$ , - - -  $\omega_z < 0$ .



**Fig. :** Organization of the whole wake

[Bergmann *et al.*, Phys. Fluids, **18** (2), 2006]

