Contrôle Optimal: Multiplicateurs de Lagrange

M. Bergmann
LEMTA, INPL Nancy
Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Workshop
"Commande Optimale Pratique"
Mercredi 25 septembre 2002

plan de l'exposé

1. *Contrôle Optimal: Multiplicateurs de Lagrange*

2. *Application: Contrôle du sillage d'un cylindre circulaire*

3. *Modèle d'ordre faible basé sur la POD*

Contrôle Optimal: Multiplicateurs de Lagrange

- **Paramètres du contrôle:**
  - ▷ *Variables d'état:* ϕ (vitesses,pression, ...)
  - ▷ *Variables de contrôle:* g (vitesses de paroi, ...)
  - ▷ *Contrainte:* $F(\phi,g) = 0$ et $\Lambda(\phi) = 0$(Equations de Navier-Stokes + conditions limites, ...)
  - ▷ *Fonctionnelle coût:* $J(\phi,g)$
- **Problème du contrôle:** *Trouver les variables de contrôle g et les variables d'état ϕ telles que la fonctionnelle coût $J(\phi,g)$ est minimale.*

Méthodes de Contrôle Optimal

IL existe deux grandes familles de méthodes:

- ▷ Approche Lagrangienne
- ▷ Approche du Gradient: $\frac{dJ}{dg}$

$\Longrightarrow$ Par les sensibilités $\frac{d\phi}{dg}$

$\Longrightarrow$ Par équation Adjointe

Approche Lagrangienne

Problème: *Chercher ϕ, g et les multiplicateurs de Lagrange ξ tels que la fonctionnelle de Lagrange L a un point de minimum.*

$$L(\phi,g,\xi) = J(\phi,g) - < F(\phi,g),\xi >$$

Il faut rendre L "stationnaire", on cherche donc $\delta L = 0$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial g}\delta g + \frac{\partial L}{\partial \xi}\delta\xi = 0$$

On suppose les variables ϕ, g et ξ indépendantes
Il faut donc que chaque dérivée directionnelle soit nulle :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi = \frac{\partial L}{\partial g}\delta g = \frac{\partial L}{\partial \xi}\delta\xi = 0$$

Annulation de la dérivée directionnelle suivant ξ

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}\delta\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\phi,g,\xi + \varepsilon\delta\xi) - L(\phi,g,\xi)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}\delta\xi = 0 \Leftrightarrow F(\phi,\xi) = 0$$

Puisque les variations de ξ sont arbitraires, on retrouve donc l'équation d'état.

Annulation de la dérivée directionnelle suivant ϕ

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\phi + \varepsilon\delta\phi,g,\xi) - L(\phi,g,\xi)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F^*}{\partial \phi}\xi = \frac{\partial J^*}{\partial \phi}$$

On obtient ici l'équation adjointe (ou duale ou du co-état).

Annulation de la dérivée directionnelle suivant g

$$\frac{\partial L}{\partial g}\delta g = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\phi,g+\varepsilon\delta g,\xi) - L(\phi,g,\xi)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial L}{\partial g}\delta g = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial J^*}{\partial g} = \frac{\partial F^*}{\partial g}\xi$$

Ce qui nous donne la condition d'optimabilité.

Processus de résolution numérique

- *On se fixe un contrôle initial: à l'itération n, on a* g^n.
- *On résoud l'équation d'état de t=0 à t=T: on obtient* ϕ^n.
- *On résoud l'équation adjointe de t=T à t=0: on obtient* ξ^n.
- *La condition d'optimabilité est uniquement vérifiée au minimum, donc on a à l'itération n:*

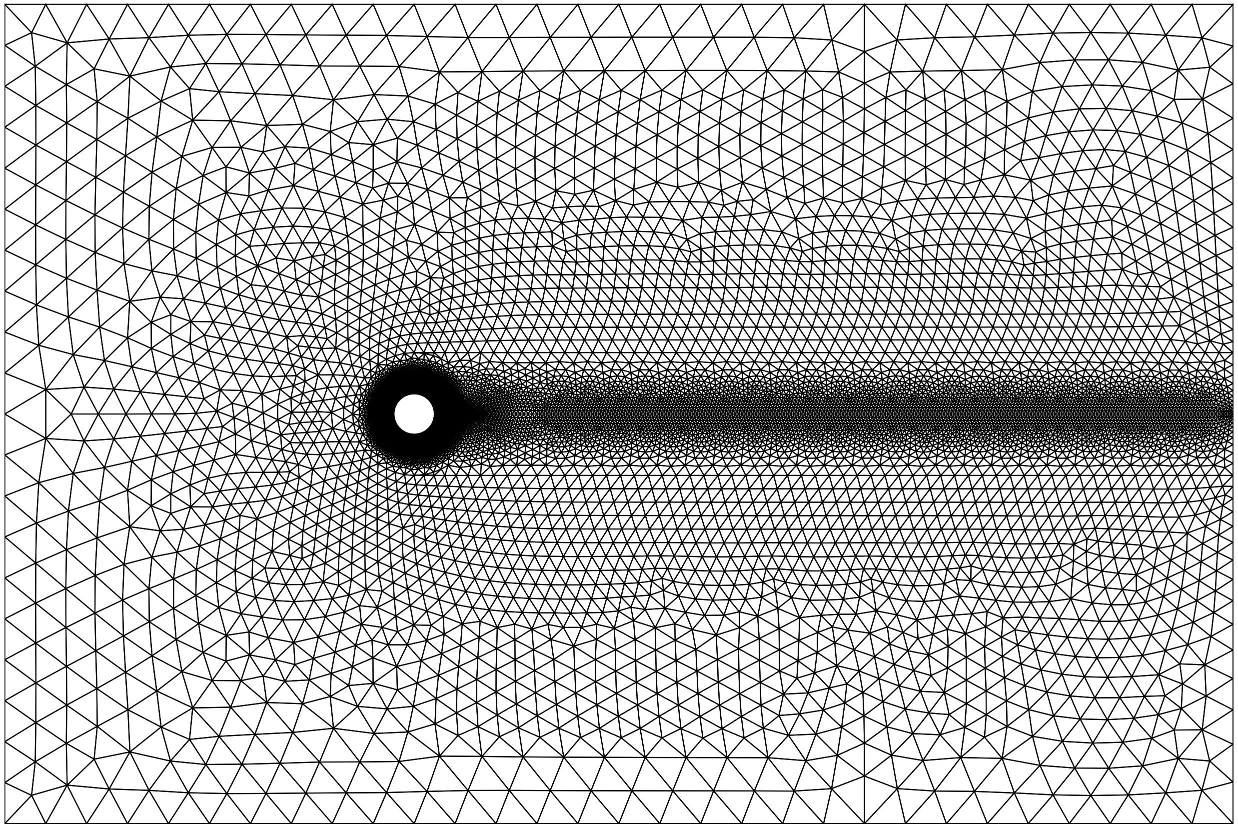
$$\delta g^n = \frac{\partial J^*}{\partial g} - \frac{\partial F^*}{\partial g}\xi$$

- *On calcule un nouveau contrôle (par une méthode de gradient par exemple):*

$$g^{n+1} = g^n - \omega \delta g^n$$

(où ω est le facteur de relaxation).
Ce processus continue jusqu'à convergence ($\mid \delta g \mid < \varepsilon \ll 1$).

Application: contrôle du sillage d'un cilyndre circulaire



Equations d'Etat: Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

$$\mathbf{u} = a \sin(2\pi s t)\mathbf{t} = 0 \ sur \ \Gamma_c$$

$$+C.L + C.I.$$

fonctionnelle objective

$$J(\mathbf{u},p,a,s) = -\int_0^T \int_\Omega p\nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega dt + \frac{1}{Re}\int_0^T \int_\Omega D(\mathbf{u}) \ D(\mathbf{u}) d\Omega dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma \left(\alpha \frac{a^2}{2} + \beta \frac{s^2}{2}\right) d\Gamma dt$$

Système Adjoint:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^*)\mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u} + \nabla P^* + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u}^* = -\nabla P + \frac{2}{Re}\nabla(D(\mathbf{u}))$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \ sur \ \Gamma_c$$

$$\mathbf{u}^*(T,\cdot) = \mathbf{0}$$

Conditions d'Optimabilité

$$\delta a = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left(\alpha a + \left[\left(\frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{t} \sin(2\pi s t) \right) d\Gamma dt$$

$$\delta s = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left(\beta s + 2\pi a t \left[\left(\frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{t} \cos(2\pi s t) \right) d\Gamma dt$$

Modéle d'ordre faible basé sur la POD

NB: On ne contrôlera pas ici directement les équations de Navier-Stokes mais un modèle d'ordre faible (P.O.D)représentatif du modèle de Navier-Stokes.

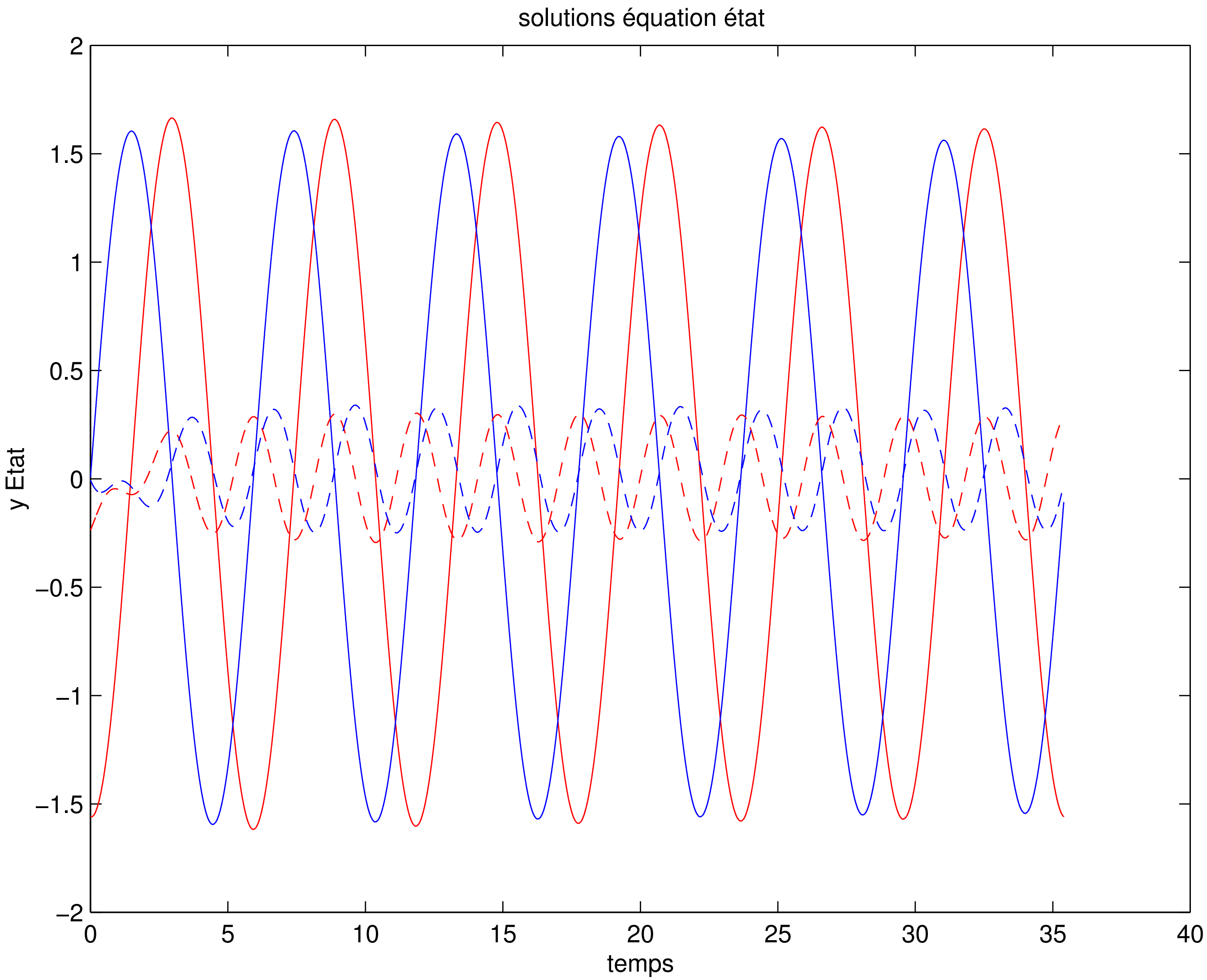
Equation d'Etat

L'équation d'état issu du modèle POD est la suivante:

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_{ijk} y_i y_k + d_i \frac{d\gamma}{dt} + (e_i + \sum_{j=1}^{N} f_{ij} y_j)\gamma + g_i \gamma^2$$

Conditions Initiales:

$$y_i(0) = y_{i_{proj}}(0)$$


solutions équation état
y Etat
temps
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Fonctionnelle Objective

$$E = \int_0^T e(\mathbf{y},\gamma)dt$$

Ici, on choisit:

$$e(\mathbf{y},\gamma) = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + e^{C(\gamma^2 - \gamma_{max}^2)}$$

La fonction de coût dépend de l'amplitude des modes propres POD.

Le second terme de l'expression précédente représente un coût sévère pour tout $\gamma > \gamma_{max}$.

Problème adjoint

Equation adjointe:

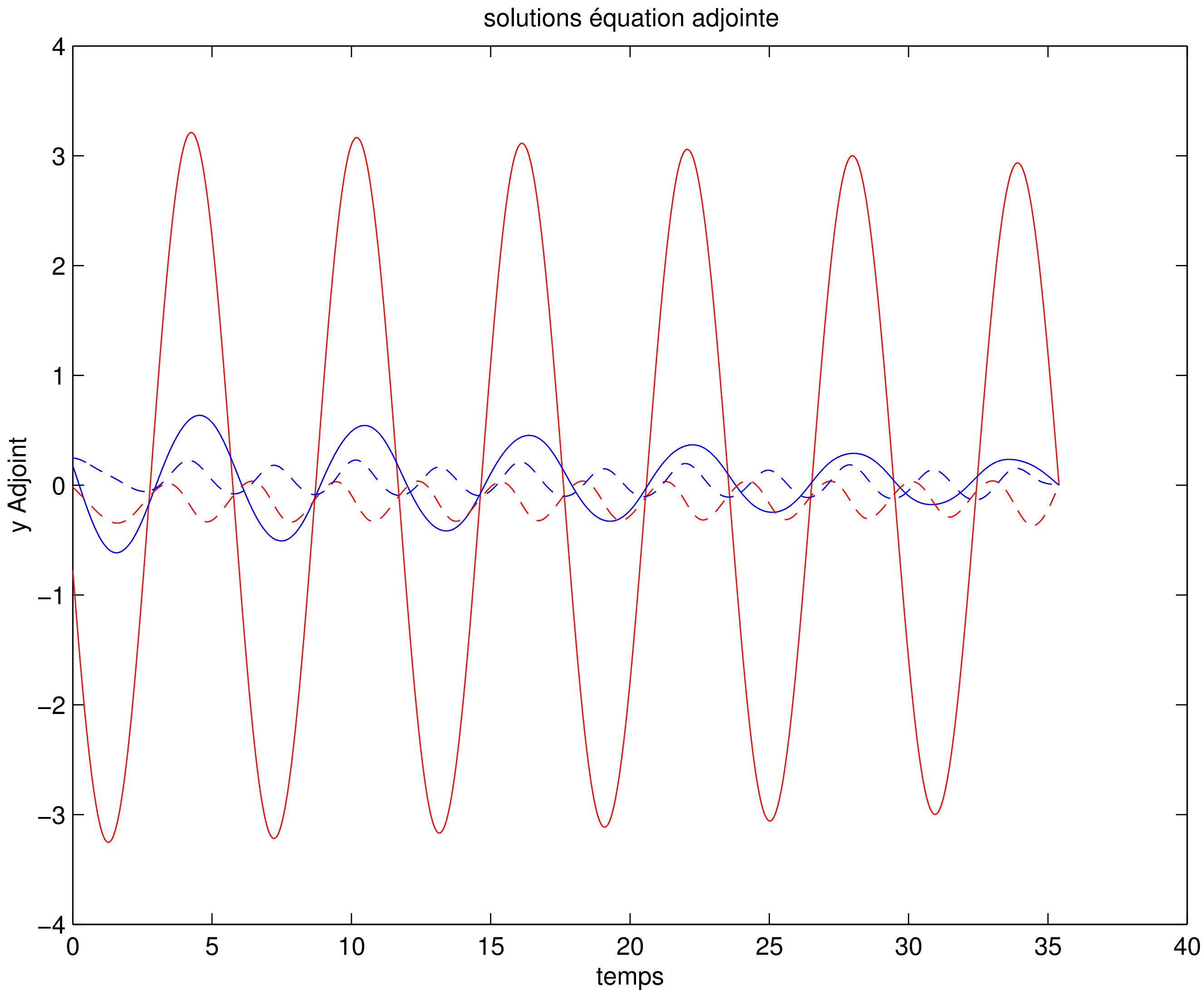
$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{N}(b_{ij} + \sum_{k=1}^{N}(c_{jik} + c_{jki})y_k + f_{ij}\gamma)\theta_i - \frac{\partial e}{\partial y_i}$$

Soit, dans notre cas:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{N}(b_{ij} + \sum_{k=1}^{N}(c_{jik} + c_{jki})y_k + f_{ij}\gamma)\theta_i - 2y_i$$

Conditions Terminales:

$$\theta_i(T) = 0$$


solutions équation adjointe
y Adjoint
temps
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Condition d'Optimabilité

rappel: *Cette condition est uniquement vérifiée au minimum!*

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial e}{\partial \gamma} + \sum_{i=1}^{N} \theta_i (e_i + \sum_{j=1}^{N} f_{ij} y_j + 2 g_i \gamma)$$

Soit:

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \frac{d\theta_i}{dt} = 2\gamma e^{c(\gamma^2 - \gamma_{max}^2)} + \sum_{i=1}^{N} \theta_i (e_i + \sum_{j=1}^{N} f_{ij} y_j + 2 g_i \gamma)$$

Résolution numérique globale: concept de Trust Région

Etape 1 *Résulotion de Navier Stokes avec* $\gamma^n(t)$: $\Rightarrow$ *snapshots*

Etape 2 *Construction et résulotion du modéle POD: équation d'état*

Etape 3 *Résolution de l'équation adjointe*

Etape 4 *Calcul du contrôle optimal* $\gamma_{opt}(t) = \gamma^n(t) + \delta\gamma^n(t)$: *condition d'optimabilité*

Trust Région: *Tant que* $\max \mid \delta\gamma^n(t) \mid < \delta^n$ *(où* δ^n *est le rayon de la région de confiance) on continue le processus d'optimisation sur le modèle d'ordre faible. Sinon, on retourne à l'étape 1 avec un nouveau contrôle* $\gamma^{n+1}(t) = \gamma^n_{opt}(t)$ *et on recommence le processus d'optimisation. Quand* $\max \mid \delta\gamma(t) \mid < \varepsilon$ *l'optimisation est terminée (la condition d'optimabilité est vérifiée).*

Perspectives

- Contrôle par déformation de la paroi
- Utilisation d'Algorithmes Génétiques
- Utilisation de Réseaux de Neurones
- Propositions?...