

## Annexe B

# Stabilité des systèmes dynamiques

### Sommaire

<b>B.1</b>	<b>Stabilité d'un point fixe . . . . .</b>	<b>225</b>
<b>B.2</b>	<b>Stabilité des solutions périodiques . . . . .</b>	<b>226</b>
B.2.1	La matrice de Monodromie . . . . .	226
B.2.2	La section de Poincaré . . . . .	227
B.2.3	Calcul pratique de stabilité . . . . .	229

Dans cette annexe, nous allons aborder l'étude de systèmes d'Equations Différentielles Ordinaires (EDO) autonomes<sup>1</sup> du premier ordre, dit *flot*, défini dans  $\mathbb{R}^n$  et représenté formellement par :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) \quad (\text{B.1})$$

avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $\alpha \in \mathbb{C}$  est un paramètre d'étude.

### B.1 Stabilité d'un point fixe

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité des points fixes du flot (B.1). Les points fixes sont représentés dans l'espace des phases comme les solutions des états d'équilibre  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{0}$  *i.e.* les solutions du problème  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ .

Le problème qui se pose alors est de savoir si ces points fixes sont temporellement stables. La théorie de l'algèbre linéaire permet de répondre à cette question, en considérant la stabilité des points fixes vis à vis de perturbations infinitésimales.

Supposons que le flot (B.1) présente un point fixe en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . On peut alors linéariser le système (B.1) autour de cet état d'équilibre. En posant  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ , ce système s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \alpha) \mathbf{y} \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \alpha)$  est la matrice Jacobienne de  $\mathbf{F}$  au point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Les solutions du système linéaire (B.2) à coefficients constants se présentent sous forme d'exponentielles  $e^{st}$ . La résolution de ce problème est alors équivalente à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \alpha) \mathbf{y} = s \mathbf{y}. \quad (\text{B.3})$$

1. Un système autonome ne dépend pas explicitement du temps.

**Théorème 7** Considérons  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \alpha) \mathbf{y}$  le système linéarisé autour du point d'équilibre  $\mathbf{x}^*$  du flot  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha)$ . Soient  $\lambda_i, i = 1 \dots n$ , les valeurs propres de l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \alpha)$ , alors

- si pour tout  $i \in [1; n]$ ,  $Re(\lambda_i) \leq 0$  le point fixe  $\mathbf{x}^*$  est stable.
- si il existe  $k \in [1; n]$  tel que  $Re(\lambda_k) > 0$ , le point fixe  $\mathbf{x}^*$  est instable.

## B.2 Stabilité des solutions périodiques

Dans cette section, nous nous intéressons aux solutions  $T$  périodiques du flot (B.1) i.e. aux fonctions  $\mathbf{x}(t)$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t),$$

dont on cherchera à étudier la stabilité et les éventuels mécanismes à l'origine de leur perte.

Par la suite, on convient de noter  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  avec  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , les trajectoires solutions du système d'équations différentielles (B.1) muni de la condition initiale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

Les sections suivantes présentent de manière succincte les deux principales méthodes permettant d'étudier la stabilité linéaire d'une solution périodique du flot (B.1) : la matrice de Monodromie (§ B.2.1) et la section de Poincaré (§ B.2.2).

Enfin, pour des raisons de facilité de lecture, la dépendance de  $\mathbf{x}$  en  $\alpha$  est provisoirement omise.

### B.2.1 La matrice de Monodromie

Le concept de l'approche par la matrice de Monodromie est d'étudier l'influence d'une perturbation des conditions initiales sur l'évolution temporelle des solutions du flot (B.1). Pour cela, on considère  $\mathbf{x}^*(t)$  une solution périodique particulière du flot (B.1) : la stabilité de  $\mathbf{x}^*(t)$  est évaluée par la détermination, après une période, de l'écart entre la trajectoire de la solution périodique  $\mathbf{x}^*(t)$  et de la trajectoire issue d'une légère perturbation de la condition initiale. Cette approche est détaillée dans Seydel (1988).

Soient  $\varphi(t, \mathbf{x}_0^*)$  la trajectoire de la solution périodique  $\mathbf{x}^*(t)$  correspondant à la condition initiale  $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*$  et  $\varphi(t, \mathbf{x}_0^* + \delta \mathbf{x}_0)$  la trajectoire de la solution ayant pour condition initiale  $\mathbf{x}_0^* + \delta \mathbf{x}_0$ , l'évolution temporelle de l'écart des trajectoires est donnée par :

$$\delta \mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0^* + \delta \mathbf{x}_0) - \varphi(t, \mathbf{x}_0^*).$$

En particulier, après une période on a :

$$\delta \mathbf{x}(T) = \varphi(T, \mathbf{x}_0^* + \delta \mathbf{x}_0) - \varphi(T, \mathbf{x}_0^*).$$

En effectuant un développement en série de Taylor autour de  $\mathbf{x}_0^*$ , on aboutit au premier ordre à :

$$\delta \mathbf{x}(T) = \frac{\partial \varphi(T, \mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0} \delta \mathbf{x}_0.$$

On constate que l'écart entre les deux trajectoires à  $t = T$  est lié à l'écart initial  $\delta \mathbf{x}_0$  par la matrice

$$\frac{\partial \varphi(T, \mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

où  $\varphi^i$  et  $x_0^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) représentent respectivement la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\varphi$  et de  $\mathbf{x}_0$ .

Il est facile d'imaginer que les propriétés de la matrice (B.4), appelée *Matrice de Monodromie*, décideront de la stabilité du système (B.1) par l'intermédiaire de la croissance ou de l'amortissement de la perturbation initiale.

Puisque  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  représente la trajectoire de la solution de (B.1) ayant  $\mathbf{x}_0$  pour condition initiale,  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  vérifie également ce système, soit :

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t} = \mathbf{F}(\varphi(t, \mathbf{x}_0), \alpha).$$

Différencier cette équation par rapport à la condition initiale  $\mathbf{x}_0$  donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{F}(\varphi, \alpha)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}.$$

En remarquant ensuite que la condition  $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  conduit à

$$\frac{\partial \varphi(0, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbb{I},$$

on met en évidence que la matrice de monodromie est identique à  $\Phi(T)$ , où  $\Phi(t)$  vérifie :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \alpha)}{\partial \mathbf{x}} \Phi, \quad \Phi(0) = \mathbb{I}.$$

La matrice de monodromie  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  associée à la solution  $T$  périodique  $\mathbf{x}^*$  de valeurs initiales  $\mathbf{x}_0^*$  est définie par :

$$\mathcal{M} \equiv \Phi(T) = \frac{\partial \varphi(T, \mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0}.$$

Enfin, on montre (Seydel, 1988) que la matrice de monodromie possède deux propriétés remarquables :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \Phi(kT) = \mathcal{M}^k$
- la matrice de monodromie  $\mathcal{M}$  possède toujours  $\lambda = 1$  comme valeur propre.

### B.2.2 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques (Seydel, 1988; Bergé *et al.*, 1988) et notamment la stabilité des orbites périodiques.

Considérons comme au paragraphe précédent que  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  est une trajectoire représentant la solution du système (B.1) muni de la condition initiale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Au lieu de s'intéresser directement à  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ , comme cela a été fait pour définir la matrice de monodromie, on va considérer l'ensemble des points  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$  correspondant aux intersections successives de la trajectoire  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  avec une hypersurface  $\Sigma_p$  de dimension  $n - 1$  appelée *section de Poincaré*. Ce plan de coupe  $\Sigma_p$  peut, en principe<sup>2</sup>, être quelconque mais un choix approprié permet d'obtenir des sections aisément exploitables.

Soit  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  l'application continue transformant un point en son suivant sur la section de Poincaré, on a, pour une trajectoire quelconque, la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{T}(\mathbf{p}_{k-1}).$$

Pour une solution périodique quelconque du système (B.1), la transformation  $\mathbf{T}$  est équivalente à l'identité puisque la trajectoire se referme sur elle-même.  $\mathbf{p}_0^*$  est alors un point fixe de l'application  $\mathbf{T}$ , soit :

$$\mathbf{p}_0^* = \mathbf{T}(\mathbf{p}_0^*) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{p}_0^*)) = \dots$$

Choisissons l'hypersurface  $\Sigma_p$  contenant le point  $\mathbf{x}_0$  que l'on dénomme  $\mathbf{p}_0$  sur l'hypersurface. Dans le même esprit que pour introduire la matrice de monodromie, on peut étudier l'écart, au bout d'un itéré de l'application  $\mathbf{T}$ , des images du point périodique  $\mathbf{p}_0^*$  dont on aurait très légèrement modifié la position initiale sur la section de Poincaré et du point  $\mathbf{p}_0^*$  (voir figure B.1 pour le principe) :

$$\delta \mathbf{p}(T) = \mathbf{T}(\mathbf{p}_0^* + \delta \mathbf{p}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{p}_0^*).$$

---

2. Il est cependant imposé que la trajectoire  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  doit toujours couper la section  $\Sigma_p$  dans le même sens.

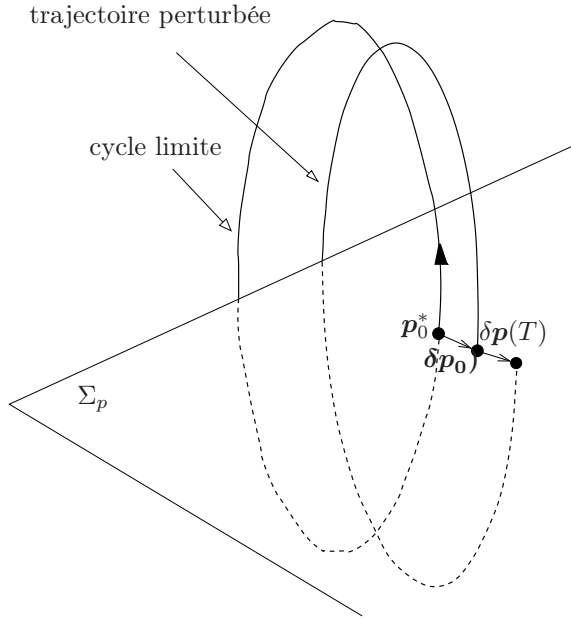


FIGURE B.1 – Base de la théorie de Floquet. Cycle limite et trajectoire perturbée.

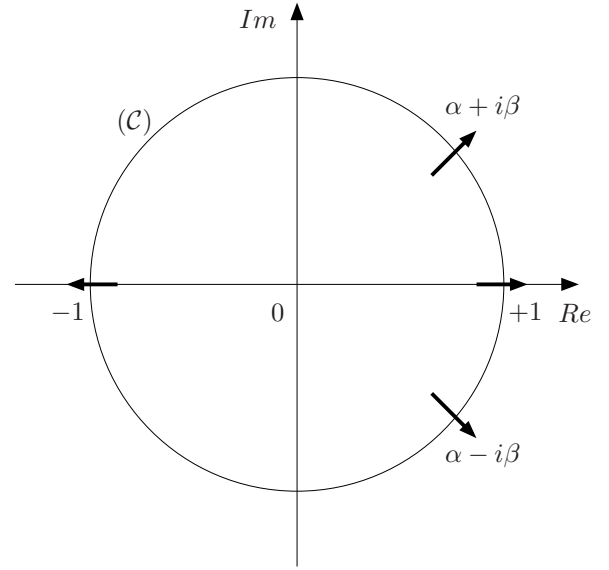


FIGURE B.2 – Différents croisements du cercle unité par les valeurs propres de la matrice de Floquet.

Puisque

$$T(\mathbf{p}_0^* + \delta\mathbf{p}_0) = T(\mathbf{p}_0^*) + \frac{\partial T(\mathbf{p}_0^*)}{\partial \mathbf{p}_0} \delta\mathbf{p}_0 + \mathcal{O}(\delta\mathbf{p}_0^2)$$

il vient immédiatement :

$$\delta\mathbf{p}(T) = \frac{\partial T(\mathbf{p}_0^*)}{\partial \mathbf{p}_0} \delta\mathbf{p}_0 + \mathcal{O}(\delta\mathbf{p}_0^2)$$

où la matrice

$$\mathcal{F} = \frac{\partial T(\mathbf{p}_0^*)}{\partial \mathbf{p}_0} \quad (\text{B.5})$$

est appelée *matrice de Floquet*.

La solution périodique est stable si et seulement si  $\|\delta\mathbf{p}(T)\| < \|\delta\mathbf{p}_0\|$ , soit encore :

$$\|\mathcal{F}\delta\mathbf{p}_0\| < \|\delta\mathbf{p}_0\|. \quad (\text{B.6})$$

Soit  $\mu_i, i = 1, \dots, n-1$  le spectre des valeurs propres de la matrice de Floquet  $\mathcal{F}$ , la trajectoire périodique est

- linéairement stable si toutes les valeurs propres  $\mu_i$  ont un module strictement inférieur à 1,
- linéairement instable si au moins une valeur propre de  $\mathcal{F}$  a un module supérieur à 1.

La perte de stabilité de la solution périodique (du cycle limite) correspond donc à la traversée du cercle unité par une (ou plusieurs) valeur(s) propre(s) de la matrice de Floquet (figure B.2). Lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$  traversent simultanément le cercle unité, on obtient une bifurcation de Hopf, *super-critique* (figure B.4) lorsque les termes non linéaires de plus haut degré ont un effet opposé à celui de l'instabilité engendrée par le terme d'ordre inférieur, *sous-critique* (figure B.3) lorsque c'est l'inverse (Bergé *et al.*, 1988).

Les deux figures B.5 et B.6 sont représentées pour un flot dans  $\mathbb{R}^3$ , l'hypersurface se réduisant à un plan ( $\mathbb{R}^2$ ). La figure B.5 présente la trajectoire de phase d'une solution périodique. Cette trajectoire suit une orbite fermée appelée cycle limite : suivant le sens de la trajectoire, celle-ci coupe toujours l'hypersurface au même point  $P_0$ . La section de Poincaré est alors réduite à l'unique point  $P_0$ . La figure B.6 présente quant à elle la trajectoire d'une solution non périodique. Dans ce cas, la trajectoire ne suit pas une orbite fermée et coupe l'hypersurface en différents points  $P_0, P_1, P_2$ , etc... formant la section de Poincaré. Dans le cas où la solution

est quasi-périodique de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  incommensurables, la section de Poincaré est une courbe refermée sur elle-même. Dans le cas où ces deux fréquences ne sont pas incommensurables, la section de Poincaré se réduit à un nombre fini de points.

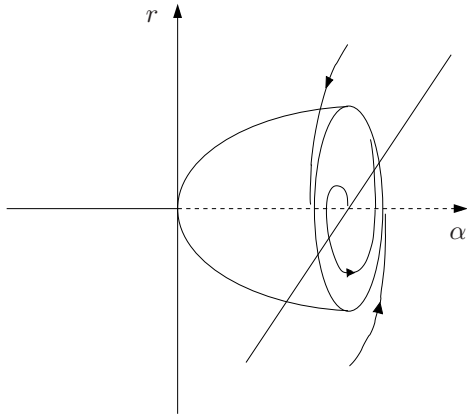


FIGURE B.3 – *Bifurcation de Hopf super-critique.*

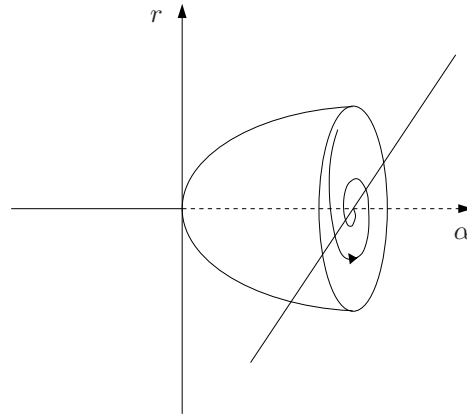


FIGURE B.4 – *Bifurcation de Hopf sous-critique.*

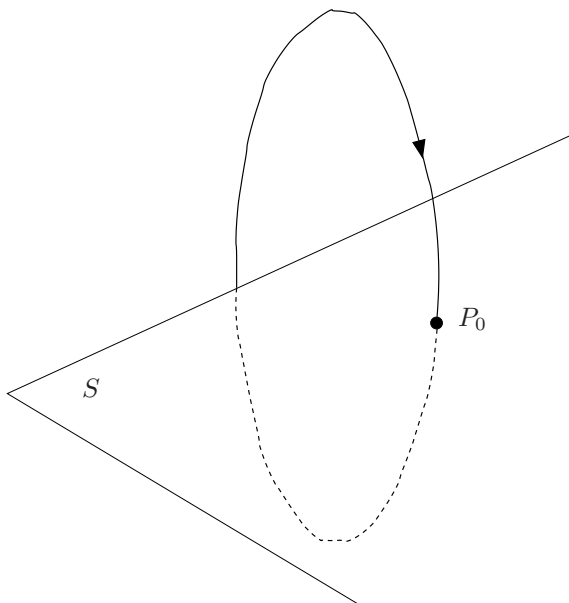


FIGURE B.5 – *Section de Poincaré d'une solution périodique. Cycle limite.*

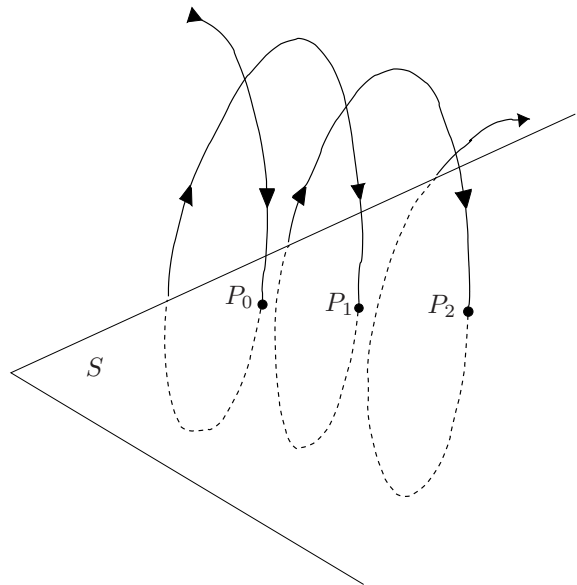


FIGURE B.6 – *Section de Poincaré d'une solution non périodique.*

### B.2.3 Calcul pratique de stabilité

Les sections précédentes ont mises en évidence deux manières différentes d'aborder le problème de stabilité linéaire d'une solution périodique d'un flot de  $\mathbb{R}^n$ . Ces deux méthodes sont finalement liées car on montre (Seydel, 1988) que l'on a :

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p}_0^*)}{\partial \mathbf{p}_0} = \frac{\partial \varphi(T, \mathbf{p}_0^*)}{\partial \mathbf{p}_0}$$

où  $\varphi$  est restreinte aux  $n - 1$  composante de  $\Sigma_p$ . Comme nous l'avions fait remarqué à la fin de la section B.2.1, la matrice de monodromie (de dimension  $n \times n$ ) définie en (B.4) a systématiquement  $\lambda = 1$  pour valeur propre. En choisissant une base appropriée de représentation pour la matrice de monodromie, les  $n - 1$  valeurs propres restantes correspondent à celles de la matrice de Floquet (B.5).

**Théorème 8** Soit  $\mathbf{x}^*$  une solution  $T$  périodique du flot  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha)$  correspondant à une valeur de  $\alpha$  fixée, la matrice de monodromie  $\mathcal{M}(\alpha)$  est encore définie par  $\Phi(T)$  où  $\Phi(t)$  est solution du problème matriciel aux valeurs initiales suivant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \alpha)}{\partial \mathbf{x}} \Phi, \quad \Phi(0) = \mathbb{I}.$$

Soit  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  le spectre de valeurs propres de la matrice de monodromie, on convient, quitte à les renuméroter, que  $\lambda_n$  correspond à la valeur propre égale à 1 de la matrice de monodromie. La stabilité locale de la solution est alors déterminée par les  $n - 1$  autres valeurs propres en appliquant la règle suivante :

- la solution périodique est linéairement stable si pour tout  $i = 1, \dots, n - 1$  on a  $|\lambda_i| < 1$ ,
- la solution périodique est linéairement instable si il existe  $i, 1 \leq i \leq n - 1$  tel que  $|\lambda_i| > 1$ .