Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Correction Devoir surveillé terminal

Exercice 1.

Formuler en langage courant la proposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}, a < c < b)$$

Exprimer sa négation à l'aide de quantificateurs, puis en langage courant.

En langage courant, la formule proposée signifie :

"Il y a toujours un nombre rationnel entre deux réels distincts."

Sa négation s'écrit :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, ((a < b) \wedge (\forall c \in \mathbb{Q}, (c \leq a) \vee (c \geq b))$$

ce qui peut se formuler en langage courant

"Il existe des réels distincts a et b tels qu'aucun nombre rationnel ne soit contenu strictement entre a et b."

Exercice 2.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

- <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i i = -1 = \frac{(-1)(2 \times 1 + 1) - 1}{4}$$

- <u>Hérédité</u> : supposons la propriété établie au rang n. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i i &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \text{ grâce à l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(4n+4-(2n+1)) - 1}{4} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,(2(n+1)+1) - 1}{4}
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Exercice 3.

> On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par
> $$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$
> 1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
> 2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

1. • <u>$\mathcal{R}$ est réflexive</u> : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 - x^2 = 0 = x - x$, donc $x\mathcal{R}x$.
   • <u>$\mathcal{R}$ est symétrique</u> : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
   $$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y \iff y^2 - x^2 = y - x \iff y\mathcal{R}x.$$
   • <u>$\mathcal{R}$ est transitive</u> : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si l'on a simultanément $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors
   $$x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z) = x - z$$
   donc $x\mathcal{R}z$.
2. La classe de 0 est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 0 = x - 0$, c'est-à-dire tels que $x^2 = x$, ce qui équivaut à $x = 0$ ou 1. Donc $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(0) = \{0, 1\} = \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(1)$.
   De même, la classe de $\frac{1}{2}$ est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire tels que $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$, d'où $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(\frac{1}{2}) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 4.

> 1. On souhaite déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système
> $$(S) : \quad \begin{cases} \mathrm{PGCD}(a, b) = & 15 \\ a + b = & 180 \end{cases}$$
>   (a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x + y = 12$ (on rappelle que deux entiers x et y sont *premiers entre eux* si $\mathrm{PGCD}(x, y) = 1$).
>   (b) Montrer que (a, b) est solution du système (S) si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$ et $a' + b' = 12$.
>   (c) Déduire de ce qui précède la liste de tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180.
> 2. Soit
> $$\begin{aligned} f \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\longmapsto (\mathrm{PGCD}(x, y), x + y) \end{aligned}$$
>   L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

1. (a) Les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x + y = 12$ sont : $(1, 11)$, $(11, 1)$, $(5, 7)$ et $(7, 5)$.
   (b) Clairement, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 15$ si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$. La condition sur la somme de a et b devient alors $15(a' + b') = 180$, soit $a' + b' = 12$.
   (c) En combinant les résultats de deux questions précedentes on obtient donc que les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180 sont
   $$(15, 165), \quad (165, 15), \quad (75, 105) \text{ et } (105, 75).$$

2. L'application f n'est pas injective, car (par exemple), $f(15,165) = f(75,105) = (15,180)$. Elle n'est pas non plus surjective, car on remarque que le PGCD de deux entiers divise leurs somme ; un couple (a,b) tel que a ne divise pas b ne peut donc pas avoir d'antécédent par f (par exemple, $(2,3)$ n'a pas d'antécédent par f).

Exercice 5.

Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

1. On a $\operatorname{Card} f(A) = \operatorname{Card}(A) + 1$ si $a_0 \notin A$ et $\operatorname{Card} f(A) = \operatorname{Card}(A) - 1$ si $a_0 \in A$, d'où la conclusion.
2. Si $a_0 \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{a_0\}$ et $f(f(A)) = (A \cup \{a_0\}) \setminus \{a_0\} = A$. De même, si $a_0 \in A$, $f(A) = A \setminus \{a_0\}$ et $f(f(A)) = (A \setminus \{a_0\}) \cup \{a_0\} = A$.
3. Si $f(A) = f(B)$ alors $A = f(f(A)) = f(f(B)) = B$ donc f est injective. Par ailleurs, si C est une partie quelconque de E, alors $f(C)$ est un antécédent de C par f, puisque $f(f(C)) = C$. Donc f est surjective.
4. D'après ce qui précède, f induit une bijection de l'ensemble des parties de cardinal pair sur l'ensemble des parties de cardinal impair, d'où la conclusion.