Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé terminal

16 janvier 2012, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. Formuler en langage courant la proposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}, a < c < b)$$

Exprimer sa négation à l'aide de quantificateurs, puis en langage courant.

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 4.

1. On souhaite déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système

$$(S) : \quad \begin{cases} \mathrm{PGCD}(a,b) = & 15 \\ a+b = & 180 \end{cases}$$

   (a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x+y = 12$ (on rappelle que deux entiers x et y sont *premiers entre eux* si $\mathrm{PGCD}(x, y) = 1$).

   (b) Montrer que (a, b) est solution du système (S) si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$ et $a' + b' = 12$.

   (c) Déduire de ce qui précède la liste de tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180.

2. Soit

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\longmapsto (\mathrm{PGCD}(x, y), x + y) \end{aligned}$$

   L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

tourner svp $\rightarrow$

Exercice 5. Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».