

Premier devoir surveillé

Octobre 2012, Durée 1h00
Documents non autorisés.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Les symboles p et q désignent des propositions logiques.

1. Écrire la table de vérité de la proposition $p \Rightarrow q$.
2. Écrire la proposition $\neg(p \Rightarrow q)$ sans utiliser le connecteur \Rightarrow (donc en n'utilisant que les connecteurs \vee , \wedge et \neg).
3. Simplifier la proposition $\neg((p \vee \neg q) \Rightarrow q)$.
4. Écrire la proposition $\neg(p \Leftrightarrow q)$ sans utiliser les connecteurs \Rightarrow ni \Leftrightarrow .

Exercice 2. On considère les trois sous-ensembles suivants de $E = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$:

A l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs,

B l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 6,

C l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 9.

1. Déterminer l'ensemble $A \cap (B \cup C)$.
2. Quels sont les éléments de l'ensemble $B \setminus C$? Ceux de $A \setminus (B \setminus C)$?
3. L'ensemble $A \setminus (B \setminus C)$ est-il égal à $(A \cap C) \cup (A \setminus B)$?
4. L'égalité $A \setminus (B \setminus C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B)$ est-elle vraie pour n'importe quels ensembles A , B et C ? Justifier votre réponse par une démonstration.

Exercice 3. Jetons un oeil à la figure 1 page suivante, qui représente un très beau graphe. Les lettres sont appelées "sommets" du graphe et les traits "arêtes" du graphe. On notera S l'ensemble des sommets.

On définit la proposition $p(x, y, l)$ par « il existe un chemin du sommet x au sommet y de longueur l » (la longueur étant le nombre d'arêtes empruntées pour aller de x à y). Par exemple, la proposition $p(A, O, 3)$ est vraie, parce qu'on peut aller de A à O en passant par E et J , donc en suivant trois arêtes successives. La proposition $p(A, O, 4)$ est également vraie, puisque l'on peut aussi aller de A à O en passant par D , E et J .

Exprimer les phrases suivantes sous forme d'une proposition logique à l'aide de quantificateurs, de connecteurs et de la proposition p :

1. Entre deux sommets quelconque du graphe, il existe toujours un chemin de longueur 4.
2. On peut aller de A à n'importe quel autre sommet du graphe par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.
3. On ne peut pas toujours aller d'un sommet quelconque du graphe à un autre par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.

Parmi ces trois propositions, lesquelles sont vraies (on ne demande pas de justification) ?

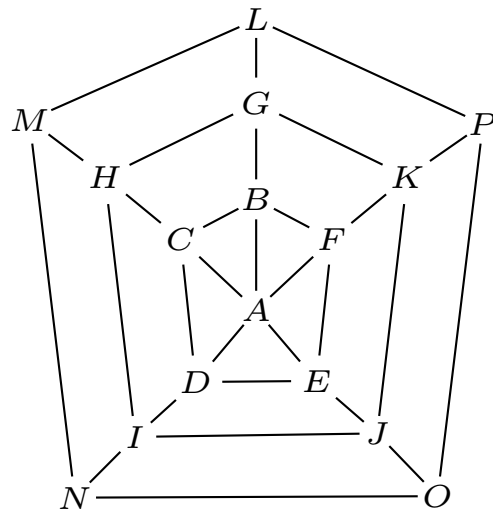


FIGURE 1 – Un graphe à 16 sommets