**Université Bordeaux 1**
**Licence de Sciences et Technologies**
**2012-2013**

**Fondamentaux pour**
**les Mathématiques et l'Informatique**
**M1MI1002**

# Deuxième devoir surveillé

**19 Novembre 2012, Durée 1h00**
**Documents non autorisés.**

*Les 3 exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.**

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on appelle factorielle de $n$ le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Soit

$$S_n = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \cdots + n \cdot (n!), \qquad n \geqslant 1.$$

1. Ecrire $S_n$ en utilisant le signe $\sum$.

2. Calculer $n!$ puis $S_n$ pour $n \leqslant 5$ et remplir le tableau suivant

| $n$ | $n!$ | $S_n$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

3. Conjecturer une relation simple entre $S_n$ et $(n+1)!$. La démontrer par récurrence.

**Exercice 2.**

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x^2, \frac{1}{x^2})$.

1. Calculer $f(-1)$. La fonction $f$ est-elle injective ?

2. Soit $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $yz = 1$. Quels sont les antécédents de $(y, z)$ par $f$ ?
   En déduire que l'image de $\mathbb{R}^*$ par $f$ est $\{(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid yz = 1\}$.
   La fonction $f$ est-elle surjective ?

**Exercice 3.**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On note $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ les ensembles des parties de $A$ et $B$ respectivement. Soient

$$E = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y)\}$$

et

$$E_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y) = k\}.$$

1. Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{c, d, e\}$.
   a. Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $E_0$, $E_1$, $E_2$, et $E_3$.
   b. Quel est le cardinal de $E$ pour ce choix de $A$ et $B$ ?
2. On suppose maintenant que A et B sont finis, de cardinaux respectifs $m$ et $n$ tels que $m \leq n$.
   a. Question de cours : quel est le nombre de parties de $A$ à $k$ éléments $(0 \leqslant k \leqslant m)$ ?
   b. Soit $k$ un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant m$. Donner une expression du cardinal de $E_k$ en termes de coefficients binomiaux.
   c. En déduire une expression du cardinal de $E$.

**FIN**