Chapitre 4

Relations binaires sur un ensemble.

De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble E est une proposition qui lie entre eux certains éléments de cet ensemble. Plus proprement, une *relation binaire* $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$. Si $(x, y) \in \mathcal{G}$ on dit que x est en relation avec y et on le note "$x\mathcal{R}y$".

Exemple : si $E = \mathcal{P}(F)$, ensemble des parties d'un ensemble F, on peut définir la relation d'inclusion entre éléments de E. Si A et B sont deux parties de F, on dit que "A est inclus dans B" et on écrit "$A \subset B$" si les éléments de A appartiennent tous à B.

L'exemple ci-dessus possède en outre les propriétés caractéristiques de ce que l'on appelle une *relation d'ordre*. Pour définir cette notion, on introduit un peu de vocabulaire

– une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *réflexive* si

$$\forall x \in E \qquad x\mathcal{R}x \tag{4.1}$$

– une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est transitive si

$$\forall x, y, z \in E, \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z \tag{4.2}$$

– une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est symétrique si

$$\forall x, y \in E, \qquad (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x) \tag{4.3}$$

– une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \tag{4.4}$$

4.1 Relations d'ordre

Définition 4.1. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E qui est réflexive, transitive et antisymétrique est appelée relation d'ordre sur E.

La plupart des relations d'ordre sont notées $\leq$ ou $\preceq$ (à l'exception notable de l'inclusion et de la divisibilité). Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preceq$ est dit *ordonné*, et on utilise la notation $(E, \preceq)$ pour s'y référer. Deux éléments x et y d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preceq$ sont dits *comparables* si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Si tous les éléments de E sont deux à deux comparables la relation d'ordre est dite *totale*.

4.1.1 Exemples

1. la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{Q}$).
2. la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ (ou dans $\mathbb{Z}^*$) : $m \mid n$ si il existe $q \in \mathbb{N}^*$ (resp. $\mathbb{Z}^*$) tel que $n = qm$.
3. la relation d'inclusion entre parties d'un ensemble E.

Les deux derniers exemples ne sont pas des ordres totaux.

On définit maintenant les notions (cruciales) de *majorant*, *minorant*, *borne supérieure* et *borne inférieure*.

Définition 4.2. Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1. Un élément m de E est un *minorant* de A si $\forall x \in A, m \preceq x$.
2. Un élément M de E est un *majorant* de A si $\forall x \in A, x \preceq M$.

Une partie admettant un majorant (resp. minorant) est dite majorée (resp. minorée). Une partie majorée et minorée est dite bornée.

Un élément d'une partie A de E est le *plus grand élément* (ou le *maximum*) de A s'il majore tous les éléments de A. De même, un élément d'une partie A de E est le *plus petit élément* (ou le *minimum*) de A s'il minore tous les éléments de A.

Définition 4.3. Soient $(E, \preceq)$ en ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, cet élément est appelé *borne supérieure* et est noté $\sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, cet élément est appelé *borne inférieure* et est noté $\inf A$.

Remarque. Si A admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$. De même, si A admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$. Les réciproques sont fausses !

4.2 Relations d'équivalence.

Définition 4.4. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation binaire qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition 4.5. La classe d'équivalence d'un élément x de E , notée $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$, est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x.

$$\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition 31.
1. $\forall x \in E, \quad x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$.
2. $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(y) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ssi y appartient à $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$.
3. Si $y \notin \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$ alors $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(y) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = \emptyset$.

On déduit de ce qui précède que l'ensemble des classes d'équivalence de E forme une partition de E. Inversement, toute partition d'un ensemble définit une relation d'équivalence.

Définition 4.6. L' ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$, est l'ensemble des classes d'équivalence de E suivant $\mathcal{R}$:

$$E/\mathcal{R} = \{\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) \mid x \in E\}$$

4.2.1 Exemples

1. L'égalité sur un ensemble quelconque est une relation d'équivalence.
2. Le parallélisme sur un ensemble de droites (dans un plan) est une relation d'équivalence.
3. La relation d'*équipollence* entre couples de points du plan ($(A, B) \equiv (C, D)$ si $ABDC$ est un parallélogramme, ou, ce qui revient au même, si $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu [1]
4. Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, alors la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$\forall\ (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y] \Leftrightarrow [f(x) = f(y)]$$
est une relation d'équivalence sur E. Ainsi toute application induit une relation d'équivalence sur son ensemble de départ.

4.2.2 Un exemple fondamental : les congruences.

Définition 4.7. Soit n un entier naturel non nul. On dit que deux entiers relatifs a et b sont *congrus modulo* n ou encore que a est *congru* à b *modulo* n si n divise $a - b$. On notera $a \equiv b \bmod n$ ou $a \equiv b\ [n]$.

Théorème 32. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si a, b et c appartiennent à $\mathbb{Z}$ alors :

$$\begin{aligned}
&a \equiv a \bmod n \\
&a \equiv b \bmod n \iff b \equiv a \bmod n \\
&a \equiv b \bmod n \text{ et } b \equiv c \bmod n \Rightarrow a \equiv c \bmod n
\end{aligned}$$

Autrement dit la relation de congruence est une**relation d'équivalence** sur l'ensemble des entiers. La classe d'équivalence d'un entier k est l'ensemble $k + n\mathbb{Z} := \{k + nq, q \in \mathbb{Z}\}$

Définition 4.8. L'ensemble quotient pour la relation de congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 33. Chaque classe de congruence modulo n admet un unique représentant $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En particulier, on a

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, 1 + \mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + \mathbb{Z}\}$$

Si le contexte ne prête pas à confusion, on pourra adopter la notation $\bar{k}$ pour la classe de k modulo n, auquel cas l'ensemble quotient peut s'écrire

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, n \bar{-} 1\}\,.$$

Proposition 34. Soit n un entier naturel non nul. On note a, b, a' et b' 4 entiers relatifs. On a les propriétés suivantes : si $a \equiv b \bmod n$ et $a' \equiv b' \bmod n$ alors

$$a + a' \equiv b + b' \bmod n \qquad a - a' \equiv b - b' \bmod n \qquad aa' \equiv bb' \bmod n$$

1. Attention, comme toujours avec la géométrie "élementaire", selon ce qu'on autorise comme prérequis, il n'est pas si facile de justifier que c'est bien une relation d'équivalence !

Remarque : On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition, la soustraction et la multiplication définies sur $\mathbb{Z}$. Attention ce n'est pas vrai pour la division en général on ne pourra pas simplifier directement une équation du type $2x \equiv 2y \mod n$. Ces remarques permettent donc de munir l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une addition et d'une multiplication. Pour illustrer cette construction, on donne ci-dessous les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$