Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Corrigé du premier devoir surveillé

Exercice 1.

Les symboles p et q désignent des propositions logiques.

1. Écrire la table de vérité de la proposition $p \Rightarrow q$.

   D'après le cours, la table est la suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. Écrire la proposition $\neg(p \Rightarrow q)$ sans utiliser le connecteur $\Rightarrow$ (donc en n'utilisant que les connecteurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$).

   On vérifie facilement que $\neg(p \Rightarrow q)$ et $p \wedge \neg q$ ont pour table de vérité

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

   La proposition $\neg(p \Rightarrow q)$ est donc équivalente à la proposition $p \wedge \neg q$.

3. Simplifier la proposition $\neg((p \vee \neg q) \Rightarrow q)$.

   D'après ce qui précède, $\neg((p \vee \neg q) \Rightarrow q)$ équivaut à $(p \vee \neg q) \wedge \neg q$. Cette dernière est vraie si et seulement si $\neg q$ est vraie et $p \vee \neg q$ est vraie. Mais si $\neg q$ est vraie, alors $p \vee \neg q$ est vraie. Donc $(p \vee \neg q) \wedge \neg q$ est équivalente à $\neg q$.

4. Écrire la proposition $\neg(p \Leftrightarrow q)$ sans utiliser les connecteurs $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$.

   Il est bien connu que $p \Leftrightarrow q$ équivaut à $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ et que la négation de $\wedge$ est $\vee$. Donc $\neg(p \Leftrightarrow q)$ équivaut à $\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, c'est-à-dire à $\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$ ou encore à $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

Exercice 2. On considère les trois sous-ensembles suivants de $E = \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$:

A l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs,

B l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 6,

C l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 9.

1. Déterminer l'ensemble $A \cap (B \cup C)$.

   Par définition, $B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$ et $C = \{0, 9, 18, 27\}$. Cela entraine immédiatement que $B \cup C = \{0, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30\}$, et $A \cap (B \cup C) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$.

2. Quels sont les éléments de l'ensemble $B \backslash C$? Ceux de $A \backslash (B \backslash C)$?

   On a $B \backslash C = \{6, 12, 24, 30\}$ et $A \backslash (B \backslash C) = \{0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 28\}$.

3. L'ensemble $A \backslash (B \backslash C)$ est-il égal à $(A \cap C) \cup (A \backslash B)$?

   On a $A \cap C = \{0, 18\}$, $A \backslash B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\}$ et donc
   $(A \cap C) \cup (A \backslash B) = \{0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 28\} = A \backslash (B \backslash C)$.

4. L'égalité $A\backslash(B\backslash C) = (A \cap C) \cup (A\backslash B)$ est-elle vraie pour n'importe quels ensembles A, B et C ? Justifier votre réponse par une démonstration.

   Montrons d'abord l'inclusion $A\backslash(B\backslash C) \subset (A\cap C)\cup(A\backslash B)$: soit $x \in A\backslash(B\backslash C)$. Cela signifie que $x \in A$ mais que $x \notin B\backslash C$. Si $x \in C$ alors, comme $x \in A$, $x \in A \cap C$. Si $x \notin C$ alors $x \notin B$ car sinon on aurait $x \in B$ et $x \notin C$, c'est-à-dire $x \in B\backslash C$, absurde. Donc $x \in A\backslash B$. Dans tous les cas, $x \in (A\cap C)\cup(A\backslash B)$, ce qui prouve l'inclusion.

   Montrons maintenant l'inclusion réciproque : $(A \cap C) \cup (A\backslash B) \subset A\backslash(B\backslash C)$, ce qui signifie simplement que $A \cap C \subset A\backslash(B\backslash C)$ et $A\backslash B \subset A\backslash(B\backslash C)$.

   Soit $x \in A\cap C$, donc $x \in A$ et $x \in C$. En particulier, $x \notin B\backslash C$ car les éléments de $B\backslash C$ n'appartiennent pas à C. On en déduit que $x \in A\backslash(B\backslash C)$, d'où la première inclusion.

   Soit $x \in A\backslash B$, donc $x \in A$ et $x \notin B$. En particulier, $x \notin B\backslash C$ car les éléments de $B\backslash C$ appartiennent à B. On en déduit que $x \in A\backslash(B\backslash C)$, d'où la seconde inclusion.

   Conclusion : les ensembles $A\backslash(B\backslash C)$ et $(A \cap C) \cup (A\backslash B)$ sont égaux.

   <u>Démonstration alternative</u> : en notant $\overline{B}$ le complémentaire de B dans E , et en utilisant les propriétés classiques de de $\cap$ et $\cup$ on obtient

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Exercice 3. Jetons un oeil à la figure 1, qui représente un très beau graphe. Les lettres sont appelées "sommets" du graphe et les traits "arêtes" du graphe. On notera S l'ensemble des sommets.

On définit la proposition $p(x, y, l)$ par « il existe un chemin du sommet x au sommet y de longueur l »(la longueur étant le nombre d'arêtes empruntées pour aller de x à y). Par exemple, la proposition $p(A, O, 3)$ est vraie, parce qu'on peut aller de A à O en passant par E et J, donc en suivant trois arêtes successives. La proposition $p(A, O, 4)$ est également vraie, puisque l'on peut aussi aller de A à O en passant par D, E et J.

Exprimer les phrases suivantes sous forme d'une proposition logique à l'aide de quantificateurs, de connecteurs et de la proposition p :

1. Entre deux sommets quelconques du graphe, il existe toujours un chemin de longueur 4.

   $\forall x \in S, \forall y \in S,\ p(x, y, 4)$.

2. On peut aller de A à n'importe quel autre sommet du graphe par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.

   $\forall x \in S, \exists l \leqslant 3,\ p(x, A, l)$.

3. On ne peut pas toujours aller d'un sommet quelconque du graphe à un autre par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.

   $\exists x \in S, \exists y \in S, \forall l \leqslant 3, \neg p(x, y, l)$.

Parmi ces trois propositions, lesquelles sont vraies (on ne demande pas de justification) ?

On vérifie que l'on ne peut pas aller de L à G par un chemin de longueur 4, donc la première proposition est fausse. La deuxième proposition est clairement vraie. Comme il n'y a pas de chemin de longueur inférieure ou égale à 3 entre L et E, la troisième proposition est vraie.