Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Corrigé du DST

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n > 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ .$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété "$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$".

- Initialisation : pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{k=1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Hérédité : soit n un entier strictement positif tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a alors

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k}{2^k} = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} \right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

ce qui entraîne que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Exercice 2. On considère la relation binaire $\approx$ sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$x \approx y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. A-t-on $\frac{2}{3} \approx \frac{4}{3}$?
   Non, car $\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.
2. A-t-on $\frac{2}{3} \approx -\frac{4}{3}$?
   Oui, car $\frac{2}{3} - \frac{-4}{3} = 2$ appartient à $\mathbb{Z}$.
3. Montrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence.
   La relation $\approx$ est :
   - **réflexive**, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$,
   - **symétrique**, puisque pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, les nombres $x - y$ et $y - x$ sont opposés et donc simultanément entiers ou non,
   - **transitive**, car pour tous x, y et z dans $\mathbb{R}$, on a $x - z = (x - y) - (y - z)$, et donc $x - z$ est entier dès que $x - y$ et $y - z$ le sont.

   C'est donc une relation d'équivalence.
4. Quelle est la classe d'équivalence de 0 pour la relation $\approx$? La classe de 0 est constituée des réels x tels que $x - 0$ soit entier, c'est-à-dire de l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathcal{C}l(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 0 \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Exercice 3.

1. Écrire le développement (formule du binôme) de $(x+y)^3$ et $(x+y)^5$.

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k y^{3-k} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k y^{5-k} = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

2. Soient x et y deux entiers relatifs. En utilisant la question précédente, montrer que

$$(x+y)^5 \equiv x^5 + y^5 \mod 5.$$

Dans le développement de $(x+y)^5$, tous les coefficients sauf ceux de x^5 et y^5 sont divisibles par 5. Par conséquent, si x et y sont des entiers,

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \equiv x^5 + y^5 \mod 5.$$

Exercice 4. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(n) = \frac{1}{n+1}$ est-elle injective ? Surjective ? Justifiez vos réponses.

L'application f est *injective*. En effet, si n et m sont deux entiers ayant même image par f, on a alors $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{m+1}$, d'où $n = m$. Elle n'est en revanche *pas surjective*, car (par exemple) 2 n'a pas d'antécédent (l'équation $f(n) = 2$ conduit à $\frac{1}{n+1} = 2$, soit $n = -\frac{1}{2}$, qui n'est pas dans $\mathbb{N}$).

2. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $\varphi(m,n) = \frac{m}{n+1}$.

(a) Décrire l'image réciproque de $\{1\}$ par φ. S'agit-il d'un ensemble fini ?

Par définition de l'image réciproque, on a

$$\varphi^{-1}(\{1\}) = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid \varphi(m,n) \in \{1\}\} = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid \varphi(m,n) = 1\}.$$

L'équation $\varphi(m,n) = 1$ équivaut à $\frac{m}{n+1} = 1$, soit $m = n+1$. En conclusion,

$$\varphi^{-1}(\{1\}) = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid m = n+1\} = \{(n+1,n)\,,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

C'est un ensemble infini.

(b) L'application φ est-elle injective ? Surjective ?

D'après la question précédente, φ n'est *pas injective*, puisque 1 a une infinité d'antécédents. Elle est en revanche *surjective* : en effet, tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul ; un tel nombre $\frac{a}{b}$ est l'image par φ du couple $(a, b-1)$ qui appartient bien à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ puisque b est un *entier naturel non nul*.

Exercice 5. Répondre par VRAI ou FAUX (sans commentaire) à chacune des questions suivantes (notation : +1 par réponse correcte et -1 par réponse incorrecte ; la note de l'exercice sera la somme des points obtenus si elle est positive, et 0 sinon) :

1. La proposition $(\neg(P \Rightarrow P)) \Rightarrow P$ est une tautologie.
   VRAI : $P \Rightarrow P$ est toujours vraie, donc $\neg(P \Rightarrow P)$ toujours fausse, et $(\neg(P \Rightarrow P)) \Rightarrow P$ toujours vraie ($Q \Rightarrow P$ est vraie si Q est fausse).
2. La proposition
   $$\exists x \in \mathbb{N} \;\; \forall y \in \mathbb{N} \;\; (x > y) \Rightarrow (x + y < 5)$$
   est vraie.
   VRAI : $x = 2$, par exemple, convient, puisque si y est un entier naturel strictement inférieur à 2, on a bien $x + y = 2 + y < 4 < 5$.
3. Pour tous ensembles A et B, on a $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
   VRAI.
4. Sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, la relation
   $$A \ll B \text{ si } \operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$$
   est une relation d'ordre.
   FAUX : l'*antisymétrie* est mise en défaut car, par exemple, si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, on a bien $A \ll B$ et $B \ll A$, puisque $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$, mais A et B ne sont pas égaux.