
 <p>UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies</p> <p><b>DEVUIP</b> Service scolarité</p>	<p style="text-align: center;"><b>ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012/2013</b> <b>DST D'AUTOMNE</b></p> <p><b>PARCOURS : MISMI</b>                      <b>Code UE : M1MI1002</b></p> <p><b>Épreuve : Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique</b></p> <p><b>Date : 17/01/2013</b>                      <b>Heure : 8h30</b>                      <b>Durée : 1h30</b></p> <p>Documents : Non autorisés. Responsable de l'épreuve : R. Coulangeon</p>	 <p>Département D L Licence</p>
---	---	--

*La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.*

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants.

**Exercice 1.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n > 0$  on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

**Exercice 2.** On considère la relation binaire  $\approx$  sur  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$x \approx y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. A-t-on  $\frac{2}{3} \approx \frac{4}{3}$  ?
2. A-t-on  $\frac{2}{3} \approx -\frac{4}{3}$  ?
3. Montrer que la relation  $\approx$  est une relation d'équivalence.
4. Quelle est la classe d'équivalence de 0 pour la relation  $\approx$  ?

**Exercice 3.**

1. Écrire le développement (formule du binôme) de  $(x+y)^3$  et  $(x+y)^5$ .
2. Soient  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs. En utilisant la question précédente, montrer que

$$(x+y)^5 \equiv x^5 + y^5 \pmod{5}.$$

**Exercice 4.** On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs et  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres de la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

1. L'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par  $f(n) = \frac{1}{n+1}$  est-elle injective ? Surjective ? Justifiez vos réponses.
2. Soit  $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par  $\varphi(m, n) = \frac{m}{n+1}$ .
  - (a) Décrire l'image réciproque de  $\{1\}$  par  $\varphi$ . S'agit-il d'un ensemble fini ?
  - (b) L'application  $\varphi$  est-elle injective ? Surjective ?

Suite au dos de la page →

**Exercice 5.** Répondre par VRAI ou FAUX (sans commentaire) à chacune des questions suivantes (notation : +1 par réponse correcte et -1 par réponse incorrecte ; la note de l'exercice sera la somme des points obtenus si elle est positive, et 0 sinon) :

1. La proposition  $(\neg(P \Rightarrow P)) \Rightarrow P$  est une tautologie.

2. La proposition

$$\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} (x > y) \Rightarrow (x + y < 5)$$

est vraie.

3. Pour tous ensembles  $A$  et  $B$ , on a  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ .

4. Sur l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , la relation

$$A \ll B \text{ si } \text{Card } A \leq \text{Card } B$$

est une relation d'ordre.