

# Master de Mathématiques approfondies

*première année*

Devoir surveillé du mardi 04 mars 2008, *durée 3 heures*

## Théorie Algébrique des Nombres

*Avertissement* : Il sera attaché la plus grande importance à la précision et la rigueur des raisonnements.

### Exercice

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels étrangers,  $k$  un corps (commutatif) et  $A$  l'anneau  $k[X^a, X^b]$ .

1. Vérifier que  $A$  est un anneau intègre et préciser son corps des fractions.
2. Montrer que  $A$  est noethérien (*on pourra considérer les inclusions  $k[X^a] \subset A \subset k[X]$* ).
3. Vérifier que tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$  est maximal (*on pourra utiliser, après l'avoir démontré, le fait qu'une algèbre intègre de dimension finie sur un corps est un corps*).
4. L'anneau  $A$  est-il un anneau de Dedekind ? Quelle est sa clôture intégrale ?

### Problème

1. Montrer que le polynôme  $P(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$  et qu'il possède trois racines réelles. On note  $\theta$  l'une d'elles et on considère l'extension  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .
2. On note  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$  et  $A = \mathbb{Z}[\theta]$  le sous-anneau de  $\mathcal{O}_K$  engendré par  $\theta$ . Vérifier que  $A$  et  $\mathcal{O}_K$  sont libres sur  $\mathbb{Z}$ , puis que leurs discriminants sont liés par la relation :

$$\text{Disc}_A = (\mathcal{O}_K : A)^2 \text{Disc}_{\mathcal{O}_K}. \quad (1)$$

3. Montrer directement que l'on a :  $\text{Disc}_{\mathbb{Z}[\theta]} = 81$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $(\mathcal{O}_K : A)$  ?
4. Soit  $S = 3^{\mathbb{N}}$  la partie multiplicative de  $\mathbb{Z}$  engendrée par 3. Dédurre de ce qui précède que  $S^{-1}\mathcal{O}_K = S^{-1}\mathbb{Z}[\theta]$  (*on pourra, au choix, comparer les discriminants de  $S^{-1}\mathcal{O}_K$  et  $S^{-1}\mathbb{Z}[\theta]$ , ou montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $3^m\mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}[\theta] \subset \mathcal{O}_K$* ).  
Conclure que tout élément  $x \in \mathcal{O}_K$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = a + b(\theta + 1) + c(\theta + 1)^2 \quad (2)$$

avec  $a, b$  et  $c$  dans  $S^{-1}\mathbb{Z}$ .

5. Soit  $x \in \mathcal{O}_K$ . Démontrer que  $x$  est inversible dans  $\mathcal{O}_K$  si et seulement si l'on a  $N_{K/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$ .
6. On considère l'idéal principal  $\mathfrak{p} = (\theta + 1)\mathcal{O}_K$ . De l'identité  $(\theta + 1)^3 = 3\theta(\theta + 2)$ , que l'on établira, déduire que  $\mathfrak{p}^3 = 3\mathcal{O}_K$  et que l'idéal  $\mathfrak{p}$  est premier.
7. Pour tout  $x$  dans  $K^\times$  on définit la  $\mathfrak{p}$ -valuation de  $x$ , notée  $v_{\mathfrak{p}}(x)$ , comme étant l'exposant de  $\mathfrak{p}$  dans la décomposition de l'idéal fractionnaire  $x\mathcal{O}_K$  en produit d'idéaux premiers. Montrer que l'on a :  $v_{\mathfrak{p}}(x + y) \geq \inf(v_{\mathfrak{p}}(x), v_{\mathfrak{p}}(y))$ , avec égalité pour  $v_{\mathfrak{p}}(x) \neq v_{\mathfrak{p}}(y)$ .
8. Soit alors  $x = a + b(\theta + 1) + c(\theta + 1)^2$  (avec  $a, b, c \in S^{-1}\mathbb{Z}$ ) un élément non nul de  $\mathcal{O}_K$ . Utiliser ce qui précède pour prouver que les  $\mathfrak{p}$ -valuations de  $a, b$  et  $c$  sont positives ou nulles.
9. Conclure à l'égalité  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ . Quels sont les premiers de  $\mathbb{Z}$  qui se ramifient dans  $\mathcal{O}_K$  ?
10. Déterminer la décomposition de l'idéal  $2\mathcal{O}_K$  en produit d'idéaux premiers ; donner de même celle de l'idéal  $5\mathcal{O}_K$ .