Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2016-2017

Structures Algébriques 1

Devoir surveillé

3 mars 2017, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Exercice 1. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{C}$. Il s'agit d'un groupe pour la multiplication des matrices, propriété qu'on utilisera dans la suite *sans la redémontrer*. Dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et on pose $G = \{I,-I,A,-A,B,-B,C,-C\}$.

1. Dresser la table de multiplication de G et en déduire que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
2. Le groupe G est-il cyclique ? Abélien ? Justifier.
3. Énumérer tous les sous-groupes de G. *On prendra soin de justifier que la liste obtenue est complète.*

Exercice 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$. La permutation identité, qui applique chaque élément sur lui-même, est notée Id.

1. Dans S_6, on considère les éléments $\alpha = (1\ 2)(4\ 5)$ et $\beta = (1\ 6\ 5\ 3\ 2)$. Calculer $\beta\alpha\beta^{-1}$.
2. Soit $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\in S_6$. Calculer γ^2, γ^3, γ^4, γ^5 et γ^6. Déterminer l'ensemble des entiers $m\in\mathbb{Z}$ tels que γ^m soit un cycle de longueur 6.
3. Montrer que S_5 ne contient pas d'élément d'ordre 8.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre d'éléments α de S_n tels que $\alpha^3=\mathrm{Id}$ est impair.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ des nombres complexes non nuls est un groupe pour la multiplication *(on ne demande pas de le redémontrer).*

Si z_1, z_2, …, z_k sont des nombres complexes non nuls, le sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ qu'ils engendrent est noté $\langle z_1,z_2,\dots,z_k\rangle$.

Enfin, pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$U_n = \left\{z\in\mathbb{C} \mid z^n = 1\right\}.$$

1. Montrer que U_n est un sous-groupe cyclique d'ordre n de $\mathbb{C}^\times$, engendré par $e^{2i\pi/n}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels, dont on note respectivement d et m le PGCD et le PPCM. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ un multiple commun de a et de b. On pose $\rho = e^{2i\pi/n}$.
   Montrer que
   $$<\rho^a> \cap <\rho^b> = <\rho^m> \quad \text{et} \quad <\rho^a,\rho^b> = <\rho^d>.$$
3. Montrer que la réunion de tous les U_n est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. Est-il de type fini (c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments) ? Justifier.