**Université de Bordeaux** **Structures Algébriques 1**
**Licence de Sciences et Technologies**
**2016-2017**

# Devoir surveillé n°2

## Éléments de correction

**Exercice 1.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $S_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

Dans $S_4$, on considère l'ensemble $H$ des permutations $\gamma$ qui fixent 4, c'est-à-dire

$$H = \{\gamma \in S_4 \mid \gamma(4) = 4\}.$$

1. Montrer que $H$ est un sous-groupe de $S_4$.
   $H$ est non vide (il contient Id) et si $\gamma$ et $\sigma$ appartiennent à $H$ on a
   $$\sigma\gamma^{-1}(4) = \sigma(\gamma^{-1}(4)) = \sigma(4) = 4$$
   donc $\sigma\gamma^{-1}$ appartient à $H$ (on a utilisé le fait que $\gamma \in H \Leftrightarrow \gamma(4) = 4 \Leftrightarrow 4 = \gamma^{-1}(4)$).
2. Construire un isomorphisme de groupes entre $H$ et $S_3$.
   Si $\gamma \in H$, alors $\gamma(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. L'application qui à $\gamma$ associe sa restriction à l'ensemble $\{1,2,3\}$ fournit alors l'isomorphisme souhaité.
3. Déterminer l'ordre de $H$ et son indice dans $S_4$.
   Comme $H$ est isomorphe à $S_3$, son ordre est égal à celui de $S_3$, soit $3! = 6$. L'indice de $H$ dans $S_4$ est alors égal au quotient des ordres de $S_4$ et de $H$, c'est-à-dire $\dfrac{4!}{3!} = 4$.
4. Le sous-groupe $H$ est-il distingué dans $S_4$ ? (justifiez votre réponse)
   $H$ n'est pas distingué dans $S_4$. En effet, le 3-cycle $\gamma = (1\,2\,3)$ appartient à $H$, mais si on le conjugue avec la transposition $\tau = (1\,4)$ on obtient
   $$\tau\gamma\tau^{-1} = (1\,4)(1\,2\,3)(1\,4) = (4\,2\,3) \notin H.$$
5. Montrer que deux éléments $\alpha$ et $\beta$ de $S_4$ appartiennent à la même classe à gauche modulo $H$ si et seulement si $\alpha(4) = \beta(4)$. En déduire un système de représentants des classes à gauche de $S_4$ modulo $H$.
   Pour que $\alpha$ et $\beta$ appartiennent à la même classe à gauche modulo $H$, il faut et il suffit que $\beta^{-1}\alpha$ appartienne à $H$, c'est-à-dire que $\beta^{-1}\alpha(4) = 4$, ou bien encore, en composant à gauche par $\beta$, que $\alpha(4) = \beta(4)$. Un système de représentants des quatre classes à gauche de $S_4$ modulo $H$ est alors fourni, par exemple, par
   $$\mathrm{Id},\ (1\,4),\ (2\,4),\ \text{ et } (3\,4)$$
   puisque ces quatre permutations appliquent 4 sur ses quatre images possibles, à savoir respectivement 4, 1, 2 et 3.

**Exercice 2.** On considère, dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices $2 \times 2$ réelles et inversibles, les sous-ensembles

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et } ac \neq 0 \right\} \quad \text{et} \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Noter que $K$ est inclus dans $H$.

1. Montrer que $H$ et $K$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

   La matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $H$ et $K$, qui sont donc non vides. Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, son inverse $M^{-1}$ est donné par la formule

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ sont des éléments de $H$, le produit

$$A^{-1}A' = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a'}{a} & \dfrac{b'}{a} - \dfrac{bc'}{ac} \\ 0 & \dfrac{c'}{c} \end{pmatrix}$$

   appartient également à $H$.
   De même, si $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $K$, le produit

$$B^{-1}B' = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' - b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   appartient également à $K$.
   Donc $H$ et $K$ sont bien des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $K$ est distingué dans $H$. Est-il distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ?

   Si $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $K$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ est un élément quelconque de $H$ alors un calcul immédiat montre que

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & b\dfrac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   est bien un élément de $K$. Donc $K \triangleleft H$.
   Mais $K$ n'est pas distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ : par exemple, si on considère l'élément $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $K$, et qu'on le conjugue par l'élément $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on obtient

$$J^{-1}TJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin K.$$

**Exercice 3.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $s_n$ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui à un entier $k$ associe sa classe modulo $n$.

1. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (k, \ell) & \longmapsto & (2k + \ell, 3k + \ell) \end{array}$$

   est un isomorphisme de groupes.

L'application $f$ est clairement un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} f((k,\ell)+(k',\ell')) &= f(k+k',\ell+\ell') \\ &= (2(k+k')+(\ell+\ell'), 3(k+k')+(\ell+\ell')) \\ &= (2k+\ell, 3k+\ell)+(2k'+\ell', 3k'+\ell') \\ &= f(k,\ell)+f(k',\ell'). \end{aligned}$$

Elle est bijective, et l'on peut même expliciter son inverse en résolvant l'équation $f(k,\ell)=(m,n)$ :

$$\begin{aligned} f(k,\ell)=(m,n) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2k+\ell=m \\ 3k+\ell=n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k=n-m \\ \ell=3m-2n \end{cases}. \end{aligned}$$

Cette équation ayant manifestement, pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, une solution unique dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'application $f$ est bien une bijection.

2. On note $s$ l'application

$$s: \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ (k,\ell) & \longmapsto & (s_4(k), s_6(\ell)) \end{array}$$

   (a) Justifier que $s$ est un morphisme de groupes.

   Comme $s_4$ et $s_6$ sont tous les deux des morphismes, on a, pour tous couples $(k,\ell)$ et $(k',\ell')$,

$$\begin{aligned} s((k,\ell)+(k',\ell')) &= s(k+k',\ell+\ell') \\ &= (s_4(k+k'), s_6(\ell+\ell')) \\ &= (s_4(k)+s_4(k'), s_6(\ell)+s_6(\ell')) \\ &= s(k,\ell)+s(k',\ell') \end{aligned}$$

   (b) Montrer que $\varphi = s\circ f$ est un morphisme surjectif.

   $\varphi$ est un morphisme, comme composé de morphismes. Qui plus est, $f$ est surjectif (question 1), et il est clair que $s$ l'est également, à cause de la surjectivité de $s_4$ et $s_6$. Donc l'application $\varphi = s\circ f$ est surjective, comme composée de surjections.

3. Déterminer le noyau de $\varphi$ [*on pourra commencer par calculer* $\varphi(2,0)$ *et* $\varphi(0,12)$].

Remarquons tout d'abord que

$$\varphi(k,\ell) = (s_4(2k+\ell), s_6(3k+\ell)).$$

Par conséquent, un élément $(k,\ell)$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ appartient au noyau de $\varphi$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2k+\ell\equiv 0 \mod 4 \\ 3k+\ell\equiv 0 \mod 6. \end{cases}$$

C'est clairement le cas pour les couples $(2,0)$ et $(0,12)$, donc $\ker\varphi\supset 2\mathbb{Z}\times 12\mathbb{Z}$. Montrons l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\ker\varphi\subset 2\mathbb{Z}\times 12\mathbb{Z}$. Si $2k+\ell\equiv 0 \mod 4$ et $3k+\ell\equiv 0 \mod 6$, alors il existe des entiers $u$ et $v$ tels que

$$\begin{cases} 2k+\ell=4u \\ 3k+\ell=6v \end{cases}$$

auquel cas

$$k = (3k + \ell) - (2k + \ell) = 6v - 4u \in 2\mathbb{Z}$$

et

$$\ell = 3(2k + \ell) - 2(3k + \ell) = 12u - 12v \in 12\mathbb{Z},$$

d'où la conclusion.

4. En déduire un isomorphisme de groupes entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

   Le morphisme $\varphi$ étant surjectif, on peut invoquer le théorème de factorisation des morphismes pour conclure à l'existence d'un isomorphisme de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\ker\varphi$ sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Or $\ker\varphi = 2\mathbb{Z} \times 12\mathbb{Z}$, donc $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\ker\varphi \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \times 12\mathbb{Z})$ qui est lui-même isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, comme on s'en convainc aisément en appliquant le théorème de factorisation au morphisme surjectif

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ (k, \ell) &\longmapsto (s_2(k), s_{12}(\ell)) \end{aligned}$$

   dont le noyau est clairement égal à $2\mathbb{Z} \times 12\mathbb{Z}$.