	Année universitaire 2016-2017 S1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques Fondamentales **Code UE :** Mathématiques et Informatique 4TMQ401 **Épreuve : Structures Algébriques 1** 4 mai 2017 : 14h30 (durée : 3h) *Documents interdits* Responsable de l'épreuve : Renaud Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

L'épreuve se compose de cinq exercices indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont inversibles pour la multiplication est un groupe, la loi de groupe étant induite par la multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout entier naturel a les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) a et n sont premiers entre eux,
   (b) la classe de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible pour la multiplication,
   (c) il existe un entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv 1 \mod n$.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
3. Quel est le chiffre des unités du développement en base 10 de

$$1234567^{1234567}\ ?$$

Exercice 2.

1. Si K est un corps, montrer qu'un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible dans $K[X]$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans K. Le résultat est-il vrai pour les polynômes de degré 4 ?
2. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^4 + X^2 + 1$.
3. En déduire la factorisation de A et B en produit de polynômes irréductibles respectivement dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps à deux éléments. Quelle est la factorisation en produits d'irréductibles dans $K[X]$ du polynôme $X^4 + X^2 + 1$?

Exercice 3.

1. Quel est le plus petit entier naturel n tel qu'il existe un groupe non commutatif d'ordre n ? Justifiez votre réponse.

2. Montrer que S_3 et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Soient $R = \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note $R^\times$ l'ensemble de ses éléments inversibles pour la multiplication.

1. En considérant le produit d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par sa comatrice $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, établir l'équivalence
$$A \in R^\times \Leftrightarrow \det A = \pm 1.$$

2. Soit $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in R \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

   (a) Montrer que S est un sous-anneau commutatif de R.

   (b) Montrer que S est intègre [*on pourra utiliser la propriété de multiplicativité du déterminant*].

   (c) Soit
$$\begin{array}{rccc} \phi : & S & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} & \longmapsto & a \mod 2 \end{array}$$
   Montrer que ϕ est un morphismes d'anneaux surjectif et que son noyau est un idéal engendré par un élément que l'on déterminera.

Exercice 5. On note S_3 le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,3\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\sigma \in S_3$ et tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$, on pose
$$\sigma \cdot x = x_1 e_{\sigma(1)} + x_2 e_{\sigma(2)} + x_3 e_{\sigma(3)} \tag{1}$$

1. Montrer que ceci définit une action à gauche du groupe S_3 sur l'ensemble $\mathbb{R}^3$.

2. Une action d'un groupe G sur un ensemble E non vide est dite *transitive* si elle possède une seule orbite, c'est-à-dire si
$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \exists g \in G \mid g \cdot x = y$$
   Est-ce le cas de l'action (1) ci-dessus ?

3. Déterminer l'ensemble des points fixes pour cette action, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de $\mathbb{R}^3$ qui sont tels que $\sigma \cdot x = x$ pour tout σ dans S_3.

4. Plus généralement, déterminer le stabilisateur d'un élément $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de $\mathbb{R}^3$ ainsi que le cardinal de son orbite sous cette action [*il y a plusieurs cas à distinguer*].