université de BORDEAUX	**Année universitaire 2016-2017** DEUXIÈME SESSION **Parcours :** Mathématiques Fondamentales **Code UE :** Mathématiques et Informatique 4TMQ401 **Épreuve : Structures Algébriques 1** 22 juin 2017 : durée : 3h *Documents interdits* Responsable de l'épreuve : Renaud Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

L'épreuve se compose de cinq exercices indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Dans S_6, on considère les permutations

$$\alpha = (1\,3\,6)(2\,4), \text{ et } \beta = (1\,4\,5\,2).$$

1. Déterminer les décompositions en produits de cycles à supports disjoints de α, β, $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$.

2. Déterminer l'ordre et la signature de α, β, $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$.

Exercice 2. (*Résolution d'équations dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

1. Soient a et b deux entiers premiers entre eux.
   (a) Rappeler pourquoi il existe un entier a' tel que $aa' \equiv a'a \equiv 1 \mod b$.
   (b) Si c est un entier quelconque, décrire l'ensemble des entiers x tels que $ax \equiv c \mod b$, en fonction de b, c et a'.
   Application : déterminer l'ensemble des entiers a tels que $2a \equiv 9 \mod 11$.

2. Soit P un polynôme non nul à coefficients dans un anneau A.
   (a) *Question de cours :* que peut-on dire du nombre de racines de P dans A si A est intègre ?
   (b) Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/73\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soient G et H deux groupes et f un morphisme de G dans H. Dans les trois premières questions, on notera multiplicativement les lois de groupe de G et H.

1. Soit K un sous-groupe de G.
   (a) Montrer que $f(K)$ est un sous-groupe de H.
   (b) On suppose de plus que f est surjectif et que K est un sous-groupe distingué de G. Montrer qu'alors, $f(K)$ est un sous-groupe distingué de H.

2. Soit $g \in G$ un élément d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(g)$ est fini et divise celui de g.

3. On suppose dans cette question que G et H sont finis. Montrer que pour tout $g \in G$, l'ordre de $f(g)$ est un diviseur commun de l'ordre de G et de l'ordre de H.

4. On considère dans cette question les groupes *additifs* $G = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $H = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$. Décrire tous les morphismes de groupes de G dans H.

Exercice 4. Soit A un anneau *commutatif*, dont on note 0 l'élément neutre additif et 1 l'élément neutre multiplicatif. On suppose en outre que A n'est pas réduit à $\{0\}$.

On dit qu'un élément $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul n tel que $a^n = 0$.

Dans la suite, on note N l'ensemble des éléments nilpotents de A et $A^\times$ le groupe des éléments inversibles pour la multiplication.

1. Déterminer N et $A^\times$ dans les cas suivants :
   (a) $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   (b) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   (c) $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
2. Les groupes $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ sont-ils cycliques ?
3. Montrer que si x et y sont nilpotents alors $x+y$ est nilpotent.
4. Montrer que N est un idéal de A.
5. Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1-a$ est inversible.
   [*Considérer le produit* $(1-a)(1+a+\cdots+a^k)$, *pour un entier naturel k bien choisi*]

Exercice 5.

On considère un groupe G d'ordre 143 opérant sur un ensemble X de cardinal 108. Le but de l'exercice est de montrer que cette action possède nécessairement des points fixes (on rappelle qu'un point x de X est fixe sous l'action de G si son orbite est réduite à un point, c'est-à-dire si $\forall g \in G,\ g \cdot x = x$)

1. Quelles sont les cardinaux possibles pour les orbites de l'action de G sur X ?
2. Supposons, par l'absurde, que cette action ne possède pas de point fixe et notons a et b le nombre d'orbites de cardinal 13 et 11 respectivement.
   (a) Appliquer la formule des classes pour obtenir une équation liant a et b.
   (b) Conclure en montrant que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.