Décomposition effective de Jordan-Chevalley et ses retombées en enseignement

Danielle Couty, IUT de Tarbes

Jean Esterle, Université Bordeaux I

Rachid Zarouf, IUFM d'Aix-Marseille

Résumé. Cet article concerne la décomposition de Jordan-Chevalley (ou de Jordan) d'une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, qui, dans sa version multiplicative, joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes algébriques. En effet la partie "semisimple" et la partie "unipotente" d'un élément d'un groupe algébrique G appartiennent à G, et cette propriété a été utilisée par le premier auteur dans son étude de la diagonalisation de certaines applications formelles [12] entreprise pendant la préparation de sa thèse sous la direction du second auteur. Le fait que c'est la décomposition de Jordan, et non la réduction de Jordan, qui a joué un rôle important dans [12], a amené le second auteur a repenser l'organisation de ses cours d'algèbre linéaire, en donnant au théorème de décomposition de Jordan un rôle central dans ses cours à l'Ecole d'ingénieurs ESTIA depuis 1997 pour des raisons pédagogiques détaillées dans l'article.

Il y a une autre raison, à la fois théorique et pédagogique, pour donner à la décomposition de Jordan un rôle central dans un cours d'algèbre linéaire. Contrairement à la réduction de Jordan, qui nécessite le calcul des valeurs propres de la matrice, ce qui en bien sûr en général impossible pour $n \geq 5$ et souvent peu pratique pour $n = 3$ ou 4, la décomposition de Jordan est effectivement calculable par une méthode, due à Claude Chevalley, qui s'inspire directement de la méthode de Newton (ou "méthode de la tangente") pour calculer des racines de certaines équations. Cette méthode, qui est bien connue dans les préparations à l'agrégation mais ne semble pas avoir eu jusqu'ici la diffusion qu'elle mérite, a été communiquée en 2006 au troisième auteur pendant son monitorat à l'ESTIA par des responsables de la préparation de l'agrégation à Bordeaux [21] et immédiatement intégrée au cours d'algèbre linéaire [19].

Dans cet article, après une introduction générale détaillant certaines considérations pédagogiques, nous indiquons comment la décomposition de Jordan intervient dans la thèse du premier auteur. Après avoir fait une présentation historique de la réduction de Jordan, en partant des textes originaux de C. Jordan pour aboutir au livre de C. Chevalley *Théorie des groupes de Lie II* de 1951, nous illustrons sur l'exemple d'une matrice 15×15 dont les valeurs propres ne sont pas exactement calculables le calcul d'une décomposition de Jordan par l'algorithme de Newton. Nous montrons ensuite comment ce même algorithme permet de calculer directement une solution polynômiale p d'un système d'équations de congruence telle que $p(A)$ soit diagonalisable et $A - p(A)$ soit nilpotente, ce qui donne aussi la décomposition de Jordan de A.

I. Introduction

Rappelons le théorème bien connu de décomposition de Jordan d'une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$:

Théorème 1.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit p_A son polynôme caractéristique que l'on suppose être scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe unique couple $(D,\, N)$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :*

$$A = D + N,$$

et

$$DN = ND,$$

avec D diagonalisable et N nilpotente.
La matrice D est appelée la **partie diagonalisable** de la matrice A, et la matrice N est appelée la **partie nilpotente** de la matrice A.

C'est cette décomposition de Jordan qui avait été utilisée par le premier auteur dans sa thèse [12] pour étudier la décomposition d'applications formelles, voir la section 2. Le fait que ce soit la décomposition de Jordan, et non le réduction de Jordan faisant intervenir les "blocs de Jordan", qui ait joué un rôle important au niveau de ces recherches, avait amené à l'époque le second auteur à repenser ses cours d'algèbre linéaire. En effet si on réfléchit bien il y a deux applications principales d'un cours d'algèbre linéaire au niveau L2/L3.

1. Le calcul des puissances d'une matrice carrée A
2. Le calcul des exponentielles e^{tA} pour la résolution des systèmes linéaires $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, en utilisant la formule

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

La décomposition de Jordan permet de ramener immédiatement de se ramener pour ces deux calculs au cas des matrices diagonalisables, puisque la partie diagonalisable D et la partie nilpotente N de A commutent. On a alors

$$A^m = \sum_{j=0}^{inf(k,m)} C_m^j D^{m-j} N^j,$$

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = e^{tD}\sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}N^j,$$

où $k \geq 0$ désigne le plus petit entier tel que $N^{k+1} = 0$.

De plus le "théorème de noyaux" traduit simplement le fait que K^n s'écrit comme somme directe des sous-espaces propres de la matrice D. Comme l'unicité de la décomposition implique que les parties diagonalisables et nilpotentes d'une matrice à coefficients réels sont à coefficients réels, on voit aussi que le fait que les matrices réelles symétriques sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ découle du fait que toute matrice réelle symétrique et nilpotente est nulle. Ces considérations avaient conduit le second auteur à donner à la décomposition de Jordan un rôle central dans son cours d'algèbre linéaire à l'Université Bordeaux 1 à la fin des années 80. Les mêmes raisons ont conduit à faire de même avec le cours destiné aux élèves de première année de l'école d'ingénieurs généralistes ESTIA (Ecole Supérieure des Technologies Industrielles Avancées), située au Pays Basque sur la technopole Izarbel à Bidart, devant des promotions de plus de 120 étudiants d'origines variées (divers types de classes préparatoires pour les deux tiers d'entre eux, diplôme de type DUT pour les autres).

On peut aborder le théorème de décomposition de Jordan à partir de considérations simples sur l'arithmétique des polynômes. En effet si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si le polynôme caractéristique p_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$, de sorte que $p_A = \Pi_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ désignant les valeurs propres dinctinctes de A alors la décomposition de Jordan $A = D + N$ de A vérifie la formule $D = p(A)$, où $p \in \mathbb{K}[x]$ est une solution quelconque du système d'équations de congruence :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} p \equiv \lambda_1 \ mod \ (x - \lambda_1)^{n_1} \\ p \equiv \lambda_2 \ mod \ (x - \lambda_2)^{n_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ p \equiv \lambda_k \ mod \ (x - \lambda_k)^{n_k} \end{cases} .$$

Si on connait les valeurs propres de A, les solutions de ce système, qui existent d'après le théorème chinois, peuvent se calculer en utilisant les méthodes usuelles basées sur l'algorithme d'Euclide et l'identité de Bézout. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ est une solution du système ci-dessus, on a par construction

$$(p - \lambda_1)...(p - \lambda_k) \equiv 0 \ mod \ p_A,$$

et le fait que $p(A)$ est diagonalisable résulte du théorème de Cayley-Hamilton et du fait que toute matrice carrée annulée par un polynôme scindé à racines simples sur K est diagonalisable (bien entendu on ne peut effectuer concrètement la diagonalisation que si l'on peut calculer les valeurs propres). D'autre part on a

$$x - p \equiv 0 \ mod(x - \lambda_1)...(x - \lambda_k),$$

et le fait que $(A - p(A))^{max_{1 \leq j \leq k} n_j} = 0$ résulte de nouveau du théorème de Cayley-Hamilton. L'unicité de la décomposition résulte du fait que D et N commutent avec toutes les matrices qui commutent avec A et du fait que toute matrice diagonalisable et nilpotente est bien évidemment nulle.

Il existe une autre raison, à notre avis décisive, pour faire du théorème de décomposition de Jordan le théorème central d'un cours d'algèbre linéaire. En effet **il existe un algorithme efficace (voir le théorème 1.2 ci-dessous), qui ne nécessite pas de calculer les valeurs propres pour obtenir la décomposition de Jordan dans $\mathbb{K}$ d'une matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quand $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. On notera que cette méthode est directement inspirée de la méthode de Newton, ou "méthode de la tangente", qui fournit un schéma d'approximation d'une racine de l'équation $f(x) = 0$. Cette méthode consiste à choisir convenablement x_0 et à poser, pour $m \geq 0$,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Certaines hypothèses bien connues permettent de garantir que la suite $(x_m)_{m \geq 0}$ converge vers une solution x de l'équation $f(x) = 0$. L'idée qui sous-tend l'algorithme ci-dessous est de trouver une solution non triviale D de l'équation matricielle $p_A(D) = 0$, qui se trouve être la partie diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) d'une matrice donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il n'y a aucun problème de convergence ici, car la suite obtenue est stationnaire. On a $D_m = D$ pour m assez grand. Cette utilisation de la méthode de Newton est due à Claude Chevalley, qui l'a introduite dans les années 50, et elle joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes algébriques. L'algorithme en question est décrit dans le théorème suivant.

Théorème 1.2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle dont on note $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; soit p_A le polynôme caractéristique de A. On pose*

$$\widetilde{p_A} = \frac{p_A}{pgcd\,(p_A,\, p'_A)}\,.$$

Soit $n(A)$ un entier positif tel que p_A divise $\widetilde{p_A}^{n(A)}$, et soit $u_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u_A\widetilde{p_A}' \equiv 1\ (mod\, p_A)$. On définit par récurrence une suite $(D_m)_{m\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant

$$\begin{cases} D_0 = A \\ D_{m+1} = D_m - \widetilde{p_A}(D_m)u_A(D_m) \text{ pour } m \geq 0\,. \end{cases}$$

Alors D_m et A ont le même polynôme caractéristique, et $\widetilde{p_A}'(D_m)$ est inversible d'inverse égal à $u_A(D_m)$ pour $m \geq 0$. De plus $\widetilde{p}(D_m) = 0$ et D_m coincide avec la partie diagonalisable sur $\overline{\mathbb{K}}$ de A pour $2^m \geq n(A)$.

On peut donc toujours calculer la décomposition de Jordan, alors que le calcul de la réduction de Jordan (de même que la très taupinale trigonalisation) d'une matrice carrée nécessite la connaissance des ses valeurs propres, ce qui mène à un calcul impossible à réaliser sauf valeur propre évidente pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 5$. Notons que cet algorithme, s'il est bien connu (on le trouvera par exemple proposé en exercice p.62-63 de l'ouvrage récent de A.Boyer et J.Risler [4] , ou encore p.13 de l'ouvrage tout aussi récent de J. Fresnel et M. Matignon destiné à la préeparation à l'agrégation de mathématiques [21], mais aussi dans un document de D. Ferrand [20] relatif à la préparation à l'agrégation de mathématiques au sein de l'Université de Rennes 1), reste curieusement très peu enseigné (le rapport de jury de l'agrégation de 2001 déplore le fait que bon nombre de candidats cette année là n'ont pas su répondre à la question " peut-on calculer la partie diagonalisable et la partie nilpotente d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sans connaitre ses valeurs propres ? ").

Le caractère effectif de la décomposition de Jordan est une motivation pédagogique qui s'ajoute à toutes les considérations évoquées plus haut pour faire de cette décomposition un élément central d'un cours d'algèbre linéaire destiné à des publics d'origine mathématique variée comme les élèves de l'ESTIA, d'autant plus que la méthode de Newton, sous sa version numérique, ne figure pas dans les programmes de mathématiques suivis par la majorité d'entre eux. Les auteurs sont convaincus que cette décomposition et son calcul effectif doivent recevoir l'attention qu'elles méritent et en particulier figurer en bonne place dans la formation des futurs professeurs certifiés.

Notons que certains auteurs attribuent cette décomposition à Dunford. On trouve bien chez N. Dunford une décomposition de type Jordan en théorie spectrale en (voir [18]), mais il ressort plutôt de notre étude historique qu'elle est due à C. Chevalley à qui l'on doit aussi la méthode effective de calcul. Ceci justifie pour nous la terminologie de "décomposition de Jordan-Chevalley."

Après avoir précisé le rôle qu'a joué la décomposition de Jordan dans la thèse du premier auteur, nous donnons un aperçu historique de l'évolution de ce résultat, en partant des premiers articles de Jordan, où apparaît pour la première fois la "forme de Jordan", pour aboutir au au livre de C. Chevalley *Théorie des groupes de Lie II* de 1951. Nous poursuivons cet article en appliquant la méthode de Newton au calcul des valeurs propres d'une matrice 15×15 dont les valeurs propres, de multiplicité 3, ne sont pas calculables et nous concluons en illustrant dans le cas de cette matrice une variante "polynômiale" de la méthode de Newton, enseignée dans la préparation à l'Agrégation de l'ENS Cachan [42], qui permet de calculer une solution polynômiale du système d'équations de congruences associé à cette matrice, ce qui donne un polynôme p de degré 14 tel que la partie diagonalisable D de A soit égale à $p(A)$.

II. Le rôle de la décomposition de Jordan-Chevalley dans l'étude des formes normales d'applications formelles

Le premier auteur s'est intéressé dans [12] au problème de la diagonalisation "d'applications formelles" définies par une famille de séries formelles et plus généralement au problème de l'existence de "formes normales" pour ces "applications formelles" dans le cas non diagonalisable.

Ce sujet est très classique (voir [44], [37], [46], etc.). D'autre part, il est lié au théorème 1.1 dans la mesure où la forme "inversible" de ce dernier, voir [25], qui en est un corollaire, a été utilisée par le premier auteur dans sa thèse [12]. De façon plus précise, notons Δ l'ensemble des séries formelles à coefficients complexes en p variables commutatives $(X_1, ..., X_p)$, sans terme constant, p désignant un entier positif, et pour $k \geq 1$ soit Δ_k l'ensemble des polynômes en p variables commutatives $(X_1, ..., X_p)$ sans terme constant et de degré inférieur ou égal à k . Posons $\mathcal{A} = \Delta^p$. Si $f \in \Delta$, on note $\Pi_k(f) \in \Delta_k$ le polynôme obtenu en tronquant la série f à l'ordre k. De même, si $F = (f_1, ..., f_p) \in \mathcal{A}$, on pose

$$\Pi_k(F) = (\Pi_k(f_1), \Pi_k(f_2), ..., \Pi_k(f_p))\,.$$

On vérifie que l'on a, pour $F, G \in \mathcal{A}, k \geq 1$,

$$\Pi_k\left[\Pi_k(F) \circ \Pi_k(G)\right] = \Pi_k(F \circ G)\,. \tag{1}$$

Soit alors dans $\mathcal{A}$, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_k$ définie par

$$F\, \mathcal{R}_k\, G \Longleftrightarrow \Pi_k(F) = \Pi_k(G)\,.$$

Par (1), $\mathcal{R}_k$ est compatible avec la loi $\circ$. Considérons alors $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}/\mathcal{R}_k$. On peut identifier $\mathcal{A}_k$ avec $\Pi_k(\mathcal{A}) = [\Delta_k]^p$ et $\mathcal{A}_k$ a une structure de monoïde pour la loi $\ominus$ définie pour tout F, G de $\mathcal{A}_k$ par :

$$F \ominus G = \Pi_k(F \circ G)\,.$$

On vérifie que l'on a, pour $f \in \Delta$, $F \in \mathcal{A}$,

$$\Pi_k(f) \ominus \Pi_k(F) = \Pi_k(f \circ F)\,. \tag{2}$$

Si $F \in \mathcal{A}$, $\Pi_1(F)$ est la "différentielle formelle" de F que l'on note $F'(0)$. Il est clair que si F est définie par des séries convergentes sur un voisinage de l'origine, $F'(0)$ est la différentielle de F au sens usuel. On sait que F est inversible pour la loi $\circ$ si et seulement si $\Pi_1(F) \in GL(\mathbb{C}^p)$. Soit $\mathcal{G}$ le groupe des éléments de $\mathcal{A}$ inversibles pour la loi $\circ$, et soit $\mathcal{G}_k$ le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{R}_k$. Alors $\mathcal{G}_k$ est le groupe des éléments de $\mathcal{A}_k$ inversibles pour la loi $\ominus$.

Soit $GL_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. Rappelons qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *unipotente* quand $M - I$ est nilpotente, ce qui signifie que 1 est valeur propre de M de multiplicité n et implique que M est inversible. Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$, et D est inversible si A est inversible, puisque A et D ont le même polynôme caractéristique. En posant $S(A) = D, U(A) = I + ND^{-1}$, on obtient

$$A = S(A)U(A), S(A) \text{ diagonalisable, } U(A) \text{ unipotente}, U(A)S(A) = S(A)U(A), \tag{2}$$

et le couple ci-dessus est unique. Il s'agit là de la forme "inversible" de la décomposition de Jordan: toute matrice inversible est produit d'une matrice unipotente et d'une matrice inversible diagonalisable. On dira que

$S(A)$ est la partie *diagonalisable* et que $U(A)$ est la partie *unipotente* de A. Si H est un sous-groupe arbitraire de $GL_n(\mathbb{C})$, il n'y a pas de raison a priori d'espérer que les parties diagonalisable et nilpotente d'une matrice A de H appartienne encore a H. Par contre le théorème de Jordan-Chevalley dont on peut trouver une démonstration par exemple dans [25], montre que c'est le cas quand H est un groupe algébrique,

Théorème 2.1. *Soit H un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Si H est fermé pour la topologie de Zariski, alors $S(A) \in H$ et $U(A) \in H$ pour toute matrice $A \in H$.*

En particulier le théorème 1.2 fournit une méthode effective de calcul de la décomposition de Jordan-Chevalley de A.

Notons que si $Q \in \mathcal{G}$, il existe $P \in \mathcal{G}$ tel que $P^{-1} \circ Q \circ P = \Pi_1(Q)$. On dira que Q est diagonalisable (resp. nilpotent) si $\Pi_1(Q)$ est diagonalisable (resp. unipotent) et on adopte une terminologie analogue dans $\mathcal{G}_k$ pour $k \geq 1$. Le premier auteur a utilisé dans sa thèse le résultat suivant, qui montre que tout élément de $\mathcal{G}$ (resp. de $\mathcal{G}_k$) admet une décomposition formelle de "type Jordan" en produit d'un élément diagonalisable de $\mathcal{G}$ (resp. de $\mathcal{G}_k$) et d'un élément unipotent de $\mathcal{G}$ (resp. de $\mathcal{G}_k$). La démonstration utilise de manière essentielle le théorème 2.1.

Théorème 2.2.

1. *Pour tout $Q \in \mathcal{G}_k$, il existe un unique couple $(T(Q), V(Q))$ d'éléments de $\mathcal{G}_k$, tels que $T(Q)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{A}_k$, $V(Q)$ unipotent et $Q = T(Q) \ominus V(Q) = V(Q) \ominus T(Q)$.*
2. *De même pour tout élément Q de $\mathcal{G}$, il existe un unique couple $(T(Q), V(Q))$ d'éléments de $\mathcal{G}$, tels que $T(Q)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{A}$, $V(Q)$ unipotent et $Q = T(Q) \circ V(Q) = V(Q) \circ T(Q)$, et on a pour $k \geq 1$*

$$\Pi_k(T(Q)) = T(\Pi_k(Q)), \Pi_k(V(Q)) = V(\Pi_k(Q)).$$

Des versions analogues au théorème 2.1 existent depuis longtemps pour les germes d'automorphismes analytiques de $\mathbb{C}^p$ et jouent un rôle dans la thèse du premier auteur. De même les "formes normales" de germes d'automorphismes analytiques de $\mathbb{C}^p$ jouent un rôle dans la construction d'applications entières injectives $\phi : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$, (phénomène de Fatou-Bieberbach, voir [16]), mais nous n'aborderons pas ces questions ici.

III. De Jordan à Chevalley

Quand on s'intéresse au théorème de réduction canonique d'une matrice ou encore à sa décomposition en produit diagonalisable-unipotente, on rencontre les noms de Jordan, Chevalley. Peut-on retrouver aujourd'hui leur part dans ces résultats mathématiques ? Cela entraîne d'autres questions : Comment ont-ils construit leur culture mathématique ? Á partir de quoi ont-ils inventé, construit du nouveau ?

- 1 -Camille Jordan et les mathématiciens français des années 1920

C'est en 1870 que Camille Jordan publie le *Traité des substitutions et des équations algébriques* [31]. On y trouve page 126 la « forme canonique d'une substitution linéaire » à laquelle le nom de Jordan reste attaché.

Dans la préface de son ouvrage Camille Jordan explique que c'est dans le contexte historique de la résolution algébrique des équations qu'il se place et situe son travail par rapport à la « grande découverte » de Galois :

> « Il était réservé à Galois d'asseoir la théorie des équations sur sa base définitive, en montrant qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions... Le but de cet Ouvrage est de développer les méthodes de Galois et de les constituer en un corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations. »

Joseph Liouville avait publié en 1846 les *Œuvres mathématiques* d'Évariste Galois dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [22]. C'est à Jordan que l'on doit le premier exposé systématique de théorie des groupes : il reprend le travail de Galois tout en l'enrichissant de ses recherches personnelles. Avant le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, il a déjà publié deux mémoires ou "Commentaires" exposant et complétant la théorie de Galois ([29] [30]).

Grâce à lui, Galois sort de l'ombre.

Quand Émile Picard s'exprime, le 23 janvier 1922, à l'Académie, aussitôt après la mort de Camille Jordan, c'est un des points forts qu'il retient :

> « Mais c'est surtout dans la théorie des substitutions et des équations algébriques que Jordan laisse une trace profonde. Dans un Ouvrage considérable sur les Substitutions, il a fait une étude approfondie des idées de Galois... »

A la page VII de la préface du *Traité des substitutions et des équations algébriques*, après avoir expliqué que dans son ouvrage « L'abondance de matières nous a d'ailleurs contraint à supprimer tout développement historique », Camille Jordan fait une dernière référence à ses sources :

> « Parmi les Ouvrages que nous avons consultés, nous devons citer particulièrement, outre les Œuvres de Galois, dont tout ceci n'est qu'un Commentaire, le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. J.-A. Serret. C'est la lecture assidue de ce Livre qui nous a initié à l'Algèbre et nous a inspiré le désir de contribuer à ses progrès. »

Sur J.-A. Serret [1], écoutons ce qu'en disent H. Lebesgue dans [39] et P. Dubreil dans [17] : Alfred Serret enseignait à la Sorbonne depuis 1849, et avait acquis la réputation d'un « professeur incomparable. » En 1855, alors que Camille Jordan entre premier à Polytechnique, il se voit attribuer par J.-A. Serret la note de 19,8 sur 20. Ce fait, rapporté par Lebesgue page 47 de [39] lui fait dire :

> « Ceci nous montre la valeur exceptionnelle du candidat Jordan, et aussi les illusions que se faisait Serret sur la précision de ses examens. »

Plus sérieusement, page 71 de [17], P. Dubreil s'interroge sur la solitude mathématique de Jordan après 1871, quand J.-A Serret subit une attaque foudroyante qui le laisse très diminué. Si les causes de l'isolement de Jordan sont peut-être difficiles à retrouver aujourd'hui, cette solitude a certainement accompagné C. Jordan. On la trouve évoquée dans différents témoignages. G. Julia, en 1961 , dans sa préface des *Œuvres* de Jordan [33], dit :

> « Longtemps, Jordan a travaillé dans une solitude presque totale. Rares étaient ceux qui pouvaient apprécier la valeur de son œuvre. Aujourd'hui ses travaux sont plus actuels que lorsqu'ils ont été écrits, on les voit dans leur vraie lumière et avec une véritable portée. Dans cette lumière, Jordan nous apparaît, avec Galois et Sophus Lie, comme un des trois grands créateurs de la théorie générale des groupes. »

Écoutons aussi les mots de Camille Jordan rapportés par H. Lebesgue pages 50-51 de [39]. En 1912, quand celui-ci lui porte un exemplaire de sa thèse, C. Jordan aurait dit :

> « Persévérez dans la recherche scientifique, vous y éprouverez de grandes joies. Mais il vous faudra apprendre à les goûter solitairement. Vous serez pour les vôtres un sujet d'étonnement. Vous ne serez guère mieux compris du monde savant ; les mathématiciens y ont une place à part et ils ne se lisent même pas toujours les uns les autres. »

Camille Jordan a alors près de 75 ans. Il est possible de supposer que dans cette phrase il fait un résumé de sa propre expérience de mathématicien (Pour d'autres "regards" sur Camille Jordan, on peut consulter [6]).

Quelques 70 ans plus tard, l'histoire de C. Chevalley, bien différente, va s'inscrire dans un courant mathématique très vivant aussi bien en France qu'à l'étranger. Claude Chevalley est né en 1909, entre à l'École Normale Supérieure en 1926. Écoutons Jean Dieudonné parler de cette période page 106 de [15] :

1. Dont le nom est associé au trièdre de Serret-Frenet

« Il est nécessaire de rappeler ici l'état de la recherche mathématique en France, dont la guerre de 14-18 était responsable. En décimant les promotions de normaliens, elle avait réduit à presque rien le nombre de jeunes mathématiciens qui eussent dû s'engager dans la recherche et guider à leur tour les générations d'étudiants des années 1920-1930. Cette tâche était retombée sur des mathématiciens plus âgés, au prestige incontestable, mais qui, à une ou deux exceptions près, n'étaient plus du tout au courant de l'évolution des mathématiques depuis la mort de H. Poincaré en 1912. » (voir aussi [14] p.7.)

En disant cela, Jean Dieudonné ne parle pas en tant qu' historien, mais bien en tant qu'acteur, puisqu'il est né lui-même en 1906 et entre à l'École Normale Supérieure en 1924. Il dit d'ailleurs que, dans ces années là, il rencontrait régulièrement au séminaire Hadamard « Herbrand et Chevalley que les cours de la Sorbonne n'intéressaient guère ».

Alors, comment ont-ils enrichi leurs connaissances ? Toujours dans le même article, quelques lignes plus loin, J. Dieudonné nous dit :

« C'est donc surtout par la lecture d'ouvrages originaux qu'ils s'instruisirent par eux-mêmes. »

De quels ouvrages s'agit-il, que peut-on en savoir d'après des témoignages ? En 1921, André Weil choisit sur les conseils d'Hadamard les livres qu'il va recevoir lors de la remise des prix à la fin de la math.élem. Parmi eux, les trois volumes du cours d'analyse de C. Jordan. Et A. Weil explique :

« J'ai appris l'analyse dans Jordan »(p.30 [49]).

L'affirmation de Dieudonné sur la nécessité de travailler les textes originaux croise parfaitement celle d'un autre témoin de la même période, Paul Dubreil (né en 1904 - promotion école normale 1923) qui s'interroge, page 78 de [17] :

« Dans les cours que nous suivions à Normale où à la Sorbonne, mes camarades et moi, qu'y eut-il d'un peu orienté vers l'algèbre, la théorie des nombres ou la géométrie algébrique ? »

P. Dubreil donne quelques éléments de réponse puis conclut :

« ....notre formation était insuffisante pour en tirer vraiment profit ».

Quelques lignes plus loin, on apprend :

« Les deux meilleurs rats de bibliothèque de la promotion, de Possel et Honorat, eurent vite fait de dénicher le *Traité des substitutions de Jordan*, ainsi que les mémoires d'Halphen et de Noether sur les courbes algébriques gauches, qui avaient obtenu ex-æquo le prix Steiner [2] de 1882 de l'Académie des Sciences de de Berlin... Au milieu de joyeux commentaires notre curiosité s'éveillait. »

Par ailleurs, en 1961, Jean Dieudonné fait publier les *OEuvres complètes* de Camille Jordan ([32]), y incluant une analyse détaillée des travaux de Jordan. Cela laisse supposer l'intérêt qu'il portait au mathématicien.

Camille Jordan semble être une référence incontournable.

Alors, peut-être peut-on imaginer Claude Chevalley penché lui aussi quelques années plus tard sur le *Traité des substitutions* de C. Jordan, s'associant pendant ses études à l'œuvre de Camille Jordan. Il ne pouvait alors savoir que leurs noms seraient accolés un jour dans un même théorème. Mais, quand Claude Chevalley est à l'École Normale, le théorème de Jordan n'a encore pas pris son nom, n'a toujours pas sa forme actuelle.

- 2 - Etude du théorème de réduction de Jordan de 1870

Avant d'aller plus loin, regardons d'abord du côté de Jordan et de son texte original. Commençons par la définition d'une substitution page 21 du *Traité des substitutions* :

« On donne le nom de substitution à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre de choses que l'on peut représenter par les lettres $a, b, \cdots$ »

Jordan décrit ici une permutation d'un ensemble X, avec X ensemble fini.

Puis vient la notion de groupe, page 22 :

2. Prix créé par le mathématicien suisse Jacob Steiner (1796-1863) qui légua 8000 Thalers à l'Académie royale des sciences de Berlin.

« On dira qu'un système de substitutions forme un groupe (ou un faisceau) si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système. »

C'est pour nous un sous-groupe du groupe symétrique.

Puis, Jordan définit son ordre, son degré :

« L'ordre d'un groupe est le nombre de ses substitutions : son degré est le nombre des lettres soumises à ses substitutions. »

C'est à la page 91 que Jordan nous décrit ce qu'il appelle « l'origine » ou la « génération » du groupe linéaire. Il s'intéresse à toutes les substitutions entre m^n objets ou « lettres » décrites de la manière suivante :

« Soient m et n deux entiers quelconques ; $l_{0,0,\ldots}$, $l_{x,x',\ldots}$, $\cdots$ des lettres en nombre m^n, caractérisées par n indices, variables chacun de 0 à $m-1$ $(mod.m)$. »

C'est à partir de la page 114 que se déroule son exposé sur la « forme canonique d'une substitution linéaire ». Il définit d'abord le groupe F constitué de l'ensemble des substitutions qui remplacent la lettre dont les indices sont $x, x', \cdots$ par celle dont les indices sont $x+\alpha, x'+\alpha', \cdots (\mod m)$ et que l'on note $A_{\alpha,\alpha'\ldots}$=$|x, x', \cdots x+\alpha, x'+\alpha', \cdots|$. Il cherche ensuite la forme générale des substitutions permutables à ce groupe F et trouve les substitutions notées : $|x, x', \cdots ax+bx'+\cdots, a'x+b'x'+\cdots, \cdots|$ dont le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots \\ a' & b' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ est premier à m. Il construit ainsi un ensemble de substitutions et dit page 92 :

« Ces dernières substitutions ... forment évidemment un groupe, que nous appellerons *le groupe linéaire de degré* m^n. »

Nous reconnaissons bien en filigrane le groupe linéaire, même si depuis les notations ont évolué.

Cette exposition du groupe linéaire peut paraître étonnante, mais il faut se rappeler que, dans son ouvrage, C. Jordan veut « construire un corps de doctrine » et non pas reprendre le chemin de l'histoire. Or, c'est ce chemin qui l'a conduit à voir l'importance du groupe linéaire. Pour le retrouver, il faut revenir à la lecture de son *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* de 1867 ([29]) qui précède le *Traité des substitutions*. Dans la *Lettre à M.Liouville* ([28]) qui introduit son mémoire, il cite deux théorèmes de Galois :

« 1) Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance exacte d'un nombre premier.

2) Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires. »

Un des buts de Jordan dans l'article de 1867 est de trouver une démonstration de ces théorèmes, perdue ou dont il ne « reste que quelques lambeaux sans suite ». De la notion d'équation, il passe, comme Galois, à celle de groupe de l'équation, notion qu'il introduit page 111 du mémoire et dont il donne une définition précise page 258 du *Traité des substitutions*. Puis démontre (page 118 du mémoire) le Théorème IV :

« Tout groupe résoluble [3] L peut-être considéré comme le dernier terme d'une série de groupes partiels : F, G, H,... jouissant des propriétés suivantes : 1) chacun de ces groupes est contenu dans le suivant ; 2) il est permutable à toutes les substitutions L ; deux quelconques de ses substitutions sont échangeables entre elles, aux substitutions près du groupe précédent. »

Il étudie ensuite dans un deuxième chapitre de l'article le cas des groupes primitifs [4] . Il énonce puis démontre à partir de la page 128 du mémoire le Théorème II :

3. Groupes résolubles : ceux qui caractérisent des équations solubles par radicaux. (Mémoire page 111)
4. Définition page 34 du *Traité des substitutions*

« Soit L est un groupe résoluble primitif entre p^n lettres, p étant premier... les substitutions du premier groupe partiel F... seront toutes de la forme $\left|\begin{array}{ll} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \\ z & z+\alpha'' \\ \ldots & \ldots \end{array}\right|$ en sous-entendant la condition de prendre à la place des indices $x+\alpha, y+\alpha', z+\alpha'', ...,$, lorsqu'ils dépassent p, le reste qu'ils donnent étant divisés par ce nombre. »

C'est bien F tel qu'il est décrit dans le *Traité des substitutions* page 91 dans le cas où m est un nombre premier [5].

On trouve donc en utilisant le 2) du théorème IV que tout groupe primitif L résoluble d'ordre p^n, p étant premier, est permutable à ce premier groupe partiel F. Il cherche alors la forme des substitutions vérifiant cette condition et trouve les substitutions de la forme $|x, x' \cdots ax+bx'+\cdots, a'x+b'x'+\cdots, \cdots|$ qu'il reconnait comme étant linéaires. C'est ainsi que Jordan démontre son théorème III page 131 :

« Les substitutions du groupe primitif L sont toutes de la forme linéaire. »

On vient de voir dans le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* de 1867 une "construction" de L comme étant formé des substitutions permutables à ce groupe F. Cette "génération" du groupe linéaire est reprise dans le *Traité des substitutions* et sert d'introduction au groupe linéaire.

C'est donc en lisant le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* de 1867 que l'on découvre l'explication de la présentation un peu étrange du groupe linéaire dans le *Traité des substitutions* .

La source de l'intérêt de Camille Jordan pour le groupe linéaire se trouve dans l'étude des équations : c'est un groupe construit pour vérifier le fait que le premier groupe partiel F vérifie la condition 2) du théorème IV, étape importante dans la recherche des groupes résolubles. S'il ne le dit pas au livre II du traité, c'est parce qu'il élimine à ce moment de son exposé toute référence aux problèmes des équations, les deux premiers livres de son ouvrage étant uniquement consacrés aux notions sur les congruences et les substitutions. S'il a choisi d'expliquer quand même la fin de la démonstration du théorème III (qui ne parle que de substitutions), c'est bien parce que ce théorème est central dans la raison de son étude des groupes linéaires. (Pour compléter la question des "Origines" du groupe linéaire dans les textes de Jordan, voir [5] page 193-194.).

Le mode de présentation a donc changé entre le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* et le *Traité des substitutions* . Le *Mémoire* est un article dans lequel Jordan expose ses « recherches actuelles » ([28] page 106) alors que dans le *Traité*, Jordan a adopté une position plus didactique. C'est dans ce mouvement de réorganisation des notions abordées qu'il va étudier en détail le groupe linéaire dont l'importance capitale lui est apparue dans le contexte de la résolution des équations. Et nous trouvons dans le *Traité des substitutions* , pour la première fois, page 114, « la forme canonique des substitutions linéaires » dans le cas d'un groupe linéaire de degré p^n (p étant premier). Il s'agit pour Jordan de ramener une substitution donnée A, « par une transformation d'indices, à une forme aussi simple que possible ». Il énonce le théorème qui donne la « forme canonique » de A pages 125 et 126 après une longue démonstration. Nous ne reviendrons pas sur cette démonstration, commentée à l'aide d'exemples et dans le langage contemporain dans l'encart 5, p.182 de [5]. Arrêtons nous cependant un moment sur l'énoncé du théorème tel qu'il apparaît dans le texte original.

5. Dans le mémoire de 1867, C. Jordan démontre que le degré de tout groupe résoluble primitif est p^n, avec p premier, résultat énoncé page 125.

157. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit*

$$A = | \; x, x', \ldots \quad ax + bx' + \ldots, \; a'x + b'x' + \ldots, \ldots \; |$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de o *à* $p - 1$;

Soient F, F',... *les facteurs irréductibles de la congruence de degré n*

$$\begin{vmatrix} a - K & a' & \ldots \\ b & b' - K & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p};$$

l, l',... leurs degrés respectifs; m, m',... leurs degrés de multiplicité;

On pourra remplacer les n indices indépendants x, x',... par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :

1° *Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs* F, F',... *et contenant respectivement lm, l'm',... indices;*

2° *Soient* $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$ *les racines de la congruence irréductible* $F \equiv 0$ (mod. p); *les lm indices du système correspondant à* F *se partagent en l séries correspondantes aux racines* $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$:

3° *Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire* K_0 : *ils constituent une ou plusieurs suites* $y_0, z_0, u_0, \ldots$; $y'_0, z'_0, \ldots; \ldots$ *telles, que* A *remplace les indices* $y_0, z_0, u_0, \ldots$ *d'une même suite respectivement par* $K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), K_0(u_0 + z_0), \ldots$;

4° *Les indices de la* $r+1^{\text{ième}}$ *série sont les fonctions* $y_r, z_r, u_r, \ldots$; $y'_r, z'_r, \ldots; \ldots$, *respectivement conjuguées des précédentes, que l'on forme en y remplaçant* K_0 *par* K_r: A *les remplace respectivement par* $K_r y_r, K_r(z_r + y_r), K_r(u_r + z_r), \ldots; \ldots$

Cette forme simple

$$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), K_0(u_0 + z_0), \ldots, K_0 y'_0, \ldots \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1 + y_1), K_1(u_1 + z_1), \ldots, K_1 y'_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_0, \ldots & K'_0 v_0, \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array} \right|$$

à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indices convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.

Plaçons nous dans le cas où $p = 5$ et $n = 3$. Nous associons maintenant à la substitution notée par Jordan :
$|x, x', x", ax + bx' + cx", a'x + b'x' + c'x", a"x + b"x' + c"x"|$
la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ d'une application linéaire, les coefficients étant dans $Z/5Z$. L'ensemble de ces matrices est bien pour nous le groupe linéaire $M_n(F_5)$ isomorphe à $GL_n(F_5)$ (avec $n = 3$). A l'époque de Jordan, les notions de corps, d'espace vectoriel ne sont pas encore dégagées et il travaille sans l'allégement que représentent le langage, les images de vecteurs et de matrices. Pour définir un élément du groupe linéaire ci-dessus, il nous suffit aujourd'hui de connaître l'image d'une base de trois éléments $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Par contre, pour Camille Jordan, apparaissent les 5^3 indices représentés par les lettres $x, x', x"$ (chacune variant dans $Z/5Z$), indices revenant d'ailleurs sans cesse dans la démonstration. Par ailleurs, on voit bien apparaître dans l'énoncé le polynôme caractéristique sous la forme $\begin{vmatrix} a-K & a' & \cdots \\ b & b'-K & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \equiv 0 \ (mod.p)$ ainsi que la "forme de Jordan" qui est, elle, décrite à la fin de l'énoncé sous le terme « forme *canonique* ».

Il est malgré tout surprenant pour un regard actuel de ne trouver aucune référence à la notion de matrice dans le *Traité des substitutions* alors même que le terme de "matrice de Jordan" est entré dans le vocabulaire courant du mathématicien. Sans entrer dans la longue histoire de la notion de matrice, dont une étude historique s'appuyant sur des méthodes quantitatives est faite dans [7] on peut rappeler que dès 1858 Arthur Cayley publie sur la théorie des matrices. Il existe aussi en France une pratique du "calcul des tableaux" et on trouve par exemple dans H. Poincaré en en 1884 le tableau suivant $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ introduit par la phrase :

> « Convenons d'écrire les coefficients d'une substitution quelconque sous la forme d'un Tableau à double entrée. »[43]

Mais cette écriture n'est pas habituelle. En 1900, quand L. Dickson généralise dans [13] la réduction canonique d'une substitution linéaire, il fait bien sûr référence à la démonstration de C. Jordan du *Traité des substitutions* et, comme lui, n'utilise aucune notation matricielle.

-3- Le mouvement vers l'Allemagne

Revenons maintenant aux "successeurs" de Jordan dans les années 1920. Au delà des ouvrages originaux, dans cette génération de mathématiciens, c'est en sortant du cercle mathématique français qu'un renouveau va arriver. Un mouvement vers l'Allemagne se met en place. A. Weil obtient en 1926 une bourse Rockfeller [6] et partage son temps entre Göttingen, Francfort, Berlin.... Il rencontre de nombreux mathématiciens, dont Carl Siegel, Gösta Mittag-Leffler, Emmy Noether... D'elle, il dit :

> « C'est là...et dans les conversations avec son entourage que je m'initiai à ce qu'on commençait à appeler " l'algèbre moderne" et surtout aux idéaux dans les anneaux de polynômes. » ([49] p.52)

Il entraîne dans son sillage d'autres mathématiciens comme P. Dubreil (en 1929-1931), J. Herbrand (en 1930-31), C.Chevalley (en 1931-32). Nous retrouvons donc Claude Chevalley en Allemagne et c'est là qu'il prépare« sa thèse sur la théorie des corps de classes, qui était alors le couronnement de la théorie des nombres algébriques »([15] p.106). Ces années passées en Allemagne par A. Weil et C. Chevalley vont bien sûr participer à la bonne place

6. Fondation créée en 1913 par John D. Rockfeller dans le but de favoriser le progrès scientifique dans tous les pays du monde. Les mathématiciens purent longtemps bénéficier du programme de bourses de voyage qu'elle instaura.

du *Moderne Algebra*[7] de B.L. Van der Waerden ([48]) dans les débuts de Bourbaki. J. Dieudonné dit de ce livre qu'il rassemble « en un tout cohérent et particulièrement clair l'acquit du demi-siècle précédent » et « va servir de tremplin aux développements ultérieurs »(page 122 du tome I de [14]). D'ailleurs, que dit cet ouvrage sur le théorème qui nous occupe ? Dans le *Moderne Algebra* de Van der Waerden, on trouve le théorème de réduction de Jordan sous sa forme matricielle. C'est dans le deuxième tome, page 138, au §109 « Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper » (forme normale d'une matrice sur un corps commutatif), qu'il en est question :

Si A est la matrice d'une application linéaire et dans le cas d'un corps algébriquement clos, il est démontré qu'on peut trouver une forme normale $\begin{pmatrix} A_1 & . & . & . & . \\ . & A_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & A_r \end{pmatrix}$, chaque bloc étant sous forme réduite.

Dans ce traité, il est dit que l'on a obtenu « die dritte normalform » (la troisième forme normale). Il n'est pas fait référence au nom de C. Jordan. Cela viendra après. Un peu plus tard, en 1932, dans le le livre de H.W. Turnbull et A.C. Aitken, on trouve présentée « The Classical Canonique Form » (notée C page 58 et qui n'est autre que "notre" forme de Jordan). Un plus loin, page 80, les auteurs, dans une note historique, nous disent :

> « The Classical Form C is first found in C. Jordan, *Traité des substitutions*, page 114. »

Peu à peu, l'habitude se prend d'associer cette forme normale et le nom de Jordan. On trouve par exemple dans C.C. Mac Duffee en 1943 ce théorème écrit sous la même forme et cette fois l'énoncé se termine par la phrase :

> « This is the familiar Jordan normal form of a matrix with complex elements. » (c'est le théorème 65 dans le livre de C.C. Mac Duffee [40].)

Il parait clair que le théorème est alors " baptisé".

-4- Mouvement vers les Etats -Unis

Pendant que le théorème se propage dans sa forme matricielle et avec le nom de Jordan, Claude Chevalley poursuit son chemin mathématique. Après deux années passées en France, il est invité en 1938 pour une année académique au prestigieux Institute for Advanced Study de Princeton. Quand la guerre éclate en 1939, il est le seul savant français dans le pays et l'ambassadeur de France lui conseille d'y rester. L'Université de Princeton lui offre un poste de professeur. Il a alors 30 ans.

Dans cette période, de nombreux savants ont été amenés à quitter l'Europe à cause de la situation politique. Les mathématiciens Richard Courant et Felix Bernstein fuient l'Allemagne pour les Etats-Unis, respectivement en 1933 et 1934. Richard Courant obtiendra un poste à New-York et Félix Bernstein enseignera dans différentes universités américaines dont New-York. Albert Einstein, John von Newmann, puis Kurt Gödel deviennent des membres permanents de l'Institute for Advanced Study. Emil Artin émigre en 1937 et, après quelques années dans l'Indiana, obtient un poste à Princeton en 1946. Depuis 1933, l'IAS abrite également Hermann Weyl que la montée du national-socialisme a lui aussi contraint à fuir l'Allemagne . Ils y seront rejoints en 1940 par Carl Siegel qui a réussi à quitter l'Allemagne en passant par la Norvège. La même année Jacques Hadamard fuit la France pour les Etats -Unis, puis c'est le tour d' André Weil en 1941 (voir [45], [15], [1]). Celui-ci obtient un poste au collège de Haverford, dans la banlieue de Philadelphie, situé non loin de Princeton. Claude Chevalley l'aide dans son installation et lui propose de partager son bureau à Princeton ([49] page 186).

Cette émigration massive influence fortement le développement de l'école mathématique américaine à cette époque et Claude Chevalley accompagne ce mouvement. De cette période, J. Dieudonné dit à la page 108 de [15] :

7. Ce livre dont la première édition en 1930 sera suivi de 8 rééditions au cours du XXième siècle a pour sous titre :« Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. »

> « Chevalley eut la chance de toujours rester en contact avec certains des meilleurs mathématiciens travaillant alors aux Etats-Unis. Auprès d'eux et de leurs élèves, son esprit toujours en éveil, son savoir et sa curiosité encyclopédique firent merveille. »

Viendront après quelques années à Columbia University à New-York à partir de 1948, puis le retour en France en 1955. Dans ces années là, Claude Chevalley publie :

Theory of Lie groups I en 1946.

Ce volume « est demeuré pendant plus de vingt ans le seul ouvrage où l'on pouvait s'initier à la théorie » (d'après J. Dieudonné [15], page 108).

Théorie des groupes de Lie Tome II (sous titre : groupes algébriques) en 1951.

Ce deuxième tome, qui ne prolonge pas vraiment le premier, est présenté par Claude Chevalley en ces termes :

> « Le présent ouvrage constitue dans une certaine manière une suite à mon ouvrage *Theory of Lie groups*, publié à la Princeton University Press en 1944 [8]. Cependant, les sujets traités ici sont très différents de ceux abordés dans *Theory of Lie groups* et les démonstrations des principaux théorèmes contenus dans ce volume ne dépendent pas de la théorie générale des groupes de Lie. »

C. Chevalley n'est évidemment pas seul à travailler sur ces questions. On peut trouver une étude approfondie de ce domaine mathématique dans le livre *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups* qu'Armand Borel a consacré au « first century of the history of Lie groups and algebraic groups » ([3] page IX). Complètement contemporains des travaux de C. Chevalley, citons ceux d' E.R. Kolchin qui publie en 1946 sur les groupes algébriques et fait appel dans ses travaux à la "forme normale de Jordan" ([34] p. 9, [35] p. 776).

On n'est jamais bien loin de Jordan et de son théorème...

-5- Etude de la décomposition de Jordan dans Chevalley

Ouvrons maintenant le deuxième tome de C. Chevalley, page 71, paragraphe *Espaces vectoriels à opérateurs*, théorème 7 :

> « Soit X un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait K. Il est alors possible, d'une manière et d'une seule, de représenter X comme somme d'un endomorphisme semi-simple S et d'un endomorphisme nilpotent N qui commutent entre eux ; S et N peuvent être représentés comme polynômes en X à coefficients dans K. »

Clairement la" réduction" de Jordan est remplacée par la "décomposition" de Jordan.

Dans ce livre le but de Chevalley n'est pas d'écrire la matrice sous une « forme aussi simple que possible » comme le recherchait Camille Jordan. Il utilise son énoncé pour pouvoir démontrer le théorème final de l'ouvrage, théorème 18 page 184, sur les groupes algébriques linéaires :

> « Tout groupe algébrique d'automorphismes de V qui contient s contient aussi u et v ».

(avec $s = uv$, u et v étant les composantes semi-simple et nilpotente de l'automorphisme s, V étant un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0).

Et après ? Pourquoi parlera-t-on du théorème de Jordan-Chevalley ?

Dès 1956, Armand Borel écrit un important article sur les groupes algébriques [2]. A la première page de l'introduction, on lit :

> « On sait que tout automorphisme g d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait k s'écrit d'une façon et d'une seule comme produit $g_s.g_u$ d'un automorphisme g_s semi-simple (i.e. à diviseurs élémentaires) et d'un automorphisme g_u unipotent (i.e. à valeurs propres égales à 1) commutant entre eux. »

8. C'est la date qui est donnée là par Claude Chevalley, alors que le livre a été édité en 1946

Comme chez C. Chevalley, dans ce contexte des groupes algébriques, la "décomposition de Jordan" (écrite ici sous forme multiplicative et pour les automorphismes) prime. Le début du chapitre I *Généralités* de l'article reprend toutes les notions de base de géométrie algébrique. On y trouve référence à C. Chevalley et en particulier au livre *Théorie des groupes de Lie Tome II.* Un des théorèmes centraux de l'article d' A. Borel (théorème 8-4 page 47) n'est autre que le théorème 18 de C. Chevalley sur les groupes algébriques cité plus haut. Et A. Borel cite en référence E.R. Kolchin [35] et C. Chevalley [10] en caractéristique 0.

Un peu plus tard, le théorème de "décomposition de Jordan" apparait à nouveau au Séminaire Chevalley de l' École Normale Supérieure (années universitaires 56/57 et 57/58 dans une partie rédigée par A. Grothendieck). On peut le voir dans la réédition du texte du séminaire ([11] p.47-48). Page 47, x est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et le théorème, précédé cette fois de la phrase d'introduction « Rappelons le fait bien connu » s'énonce :

> « x peut se mettre de façon unique sous la forme $x_s + x_n$, somme d'un endomorphisme semi-simple x_s et d'un endomorphisme nilpotent x_n qui commutent (appelés partie semi-simple et partie nilpotente de x). »

C'est bien le même que dans [10] (la forme multiplicative pour un automorphisme apparaît quelques lignes plus loin). La démonstration n'y est pas reprise.

Ainsi, peu à peu, c'est sous cette forme que le théorème va devenir référence et prendre le nom de Jordan-Chevalley quand il en est question dans la théorie des groupes algébriques. C'est ce que l'on peut voir par exemple dans les ouvrages de James E. Humphreys, page 17 dans [24] ou page 95 dans [25]. Dans le deuxième livre, c'est tout le paragraphe reprenant les théorèmes 7 et 18 de C.Chevalley qui prend le nom de *Jordan-Chevalley Decomposition.* James E. Humphreys dit par ailleurs du Séminaire 56-58 de C. Chevalley qu'il s'y est formé sur ce sujet :

> « This seminar became known as the " bible" for many years. »[26]

Cet avis est aussi celui donné en 2004 par Pierre Cartier dans l'*Avertissement au lecteur* qui ouvre la réédition du Séminaire Chevalley :

> « Beaucoup de collègues consultés m'ont exprimé l'opinion que, malgré un large choix d'excellents ouvrages sur les groupes algébriques, le Séminaire Chevalley représentait, cinquante ans après sa rédaction, un des endroits où apprendre la théorie. »

Et si nous revenions sur la démonstration de ce théorème dans C. Chevalley telle qu'elle apparait dans le tome II ? Nous avons besoin pour la lire de connaître la construction du polynôme f telle qu'elle est faite par Claude Chevalley dans la proposition[9] 5 qui précède le théorème 7. On se place dans le cas où X est un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait K. On suppose connu un polynôme F à coefficients dans K, tel que $F(X) = 0$ (par exemple le polynôme caractéristique de X). A la page 71 de [10], on lit :

> « Ecrivons $F = cF_1{}^{e_1}...F_h{}^{e_h}$ où $c \in K$, $F_1, ...F_h$ sont des polynômes irréductibles relativement premiers entre eux deux à deux, et $e_1, ...e_h$ des exposants $>$0. Soit $f = F_1...F_h$ et soit e le plus grand des exposants e_i $(1 \leq i \leq h)$. Le polynôme f^e est alors divisible par F d'où $(f(X))^e = 0$. »

Il est intéressant de se plonger dans la lecture du théorème tel qu'il fut rédigé par Claude Chevalley.

9. Cette proposition s'énonce : Soit X un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait K. Pour que X soit semi-simple, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme f à coefficients dans K, relativement premier à son polynôme dérivé, tel que $f(X) = 0$.

Théorème 7. — *Soit* X *un endomorphisme d'un espace vectoriel* V *de dimension finie sur un corps parfait* K. *Il est alors possible, d'une manière et d'une seule, de représenter* X *comme somme d'un endomorphisme semi-simple* S *et d'un endomorphisme nilpotent* N *qui commutent entre eux ;* S *et* N *peuvent être représentés comme polynomes en* X *à coefficients dans* K.

Soit P l'algèbre des polynomes en une variable U à coefficients dans K. On voit comme au début de la démonstration de la prop. 5 qu'on peut trouver un polynome $f \in P$ relativement premier à son polynome dérivé f' et un exposant $e > 0$ tels que $(f(X))^e = 0$. Il existe des polynomes h et h_1 à coefficients dans K tels que $f'h + fh_1 = 1$, d'où $f'h \equiv 1 \pmod{f}$. Si $p = p(U)$ est un élément quelconque de P, nous poserons $s(p) = p(U - f(U)h(U))$; il est clair que s est un homomorphisme de P dans lui-même. Faisant usage de la formule de Taylor, on a

$$s(f) \equiv f(U) - f'(U)f(U)h(U) = f(U)(1 - f'(U)h(U)) \pmod{(f(U)h(U))^2},$$

d'où il résulte que $s(f) \equiv 0 \pmod{f^2}$. Il en résulte immédiatement par récurrence sur m que $s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^{2^m}}$. Nous choisirons un entier m tel que $2^m \geqslant e$; on a alors $s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^e}$. On a $s(U) = U - f(U)h(U)$, d'où, pour tout $p \in P$, $s(p) = p(s(U))$, et par suite, pour tout entier $k > 0$, $s^k(p) = p(s^k(U))$. On a $s(U) \equiv U \pmod{f}$, d'où, par récurrence, $s^k(U) \equiv U \pmod{f}$ pour tout $k > 0$. Ceci dit, posons $S = (s^m(U))(X)$; on a

$$f(S) = (f(s^m(U)))(X) = (s^m(f))(X),$$

d'où $f(S) = 0$ puisque $s^m(f)$ est divisible par f^e. Puisque $U - s^m(U)$ est divisible par f, on a $(X - S)^e = 0$; si donc nous posons $N = X - S$, N est nilpotent. Les endomorphismes S et N sont des polynomes en X, et par suite commutent l'un avec l'autre. D'autre part, S est semi-simple en vertu de la prop. 5.

Soient maintenant S′ un endomorphisme semi-simple et N′ un endomorphisme nilpotent qui commute avec S′ tels que $X = S' + N'$. On a donc $S - S' = N' - N$. Or S′, qui commute avec N′, commute avec $X = S' + N'$, et par suite avec S qui est un polynome en X ; on voit de même que N′ commute avec N. Il résulte de la prop. 4 que $S - S' = N' - N$ est à la fois semi-simple et nilpotent, d'où $S - S' = N' - N = 0$ en vertu du lemme 2, ce qui achève la démonstration du th. 7.

Dans cette démonstration, Claude Chevalley construit explicitement le polynôme à une variable U, noté $s^m(U)$ dans son texte, tel que $s^m(U)(X)$ soit la partie diagonalisable (ou semi-simple) de l'endomorphisme X. C'est ce schéma de démonstration que l'on retrouve dans les constructions de polynômes, comme celle exposée dans le théorème 5-1 de l'article, constructions qui s'appuient sur la "méthode de Newton". On peut ainsi obtenir un polynôme permettant de calculer la partie diagonalisable et la partie unipotente d'une matrice sans connaître ses valeurs propres. Cette méthode est présentée page 3 de l'article, détaillée et justifiée dans les dernières parties de l'article.

En 1951, dans son livre, Claude Chevalley ne s'arrête pas sur le fait que f peut se calculer sans connaître les valeurs propres de l'endomorphisme x. On a en effet $f = \frac{p_X}{pgcd(p_X, p'_X)}$ où p_X est le polynôme caractéristique de X (voir théorème 1-2). C'est pourtant ce qui va permettre d'en déduire une méthode effective de calcul de x_s et x_n, même quand les valeurs propres ne sont pas calculables (voir l'illustration du théorème 5.1).

De toutes façons, quand il est question de groupes algébriques , cette démonstration de C. Chevalley n'est pas reprise, ni par A. Borel, ni par A. Grothendieck, ni par J.E. Humphreys. Mais son ouvrage n'est pas destiné à un étudiant de premier cycle.

-6- L'enseignement du "théorème de Jordan" en premier cycle :

En effet, en parallèle de cette histoire du théorème de Jordan-Chevalley dans le cadre des groupes algébriques, l'histoire de l'enseignement du théorème de Jordan est toute autre. Donnons quelques exemples dans les années 1960-70. Dans les ouvrages destinés à l'enseignement, c'est le théorème de réduction de Jordan qui est au premier plan. Le « théorème de Jordan »dans l'ouvrage de R. Godement de 1964, page 448, s'énonce :

> « Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et u un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> a) Toutes les valeurs propres de u sont dans K, ie le polynôme p_u a toutes ses racines dans K.
>
> b) il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & . & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_r \end{pmatrix}$
>
> où chaque U_i est une matrice réduite à coefficients dans K. »

La décomposition de Jordan apparaît seulement en exercice page 636 à la fin du livre.

En 1965 Serge Lang adopte le même point de vue page 398 de son manuel *Algebra* ([36]) en décrivant la forme canonique de Jordan :

> « Let k be algebraically closed, and E be a finite dimensional non-zero vector space over k. Let $A \in End_k(E)$. Then there exists a basis of E over k such that the matrix of A with respect to this basis consists of blocks, and each block is of the type described in the theorem. »

(Ce sont bien sûr les classiques blocs de Jordan)

La décomposition de Jordan trouve sa place, page 406, dans les exercices.

Dans l'ouvrage de Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès de 1978 ([38]), l'accent est mis là aussi sur la réduction de Jordan qui apparait sous ce titre, page 358, et dans le chapitre XI *Réduction des matrices carrées et application*, avec toutefois un rapide détour par la forme $u = \Delta + v$ avec Δ diagonalisable et v nilpotent.

Ainsi, même si la décomposition de Jordan date de 1951, elle n'a pas amené de traduction très visible dans l'enseignement en premier cycle dans les vingt années qui suivent. C'est seulement dans l'enseignement récent en L_2 que cette décomposition prend un rôle plus central (voir par exemple [19] [20] [21]). Elle s'inscrit pourtant dans la continuité de la démonstration du théorème énoncé par Claude Chevalley au début des années cinquante. C'est ce que l'on peut voir maintenant dans les parties IV et V en s'intéressant aux méthodes effectives de calcul du polynôme p et de la matrice D (partie diagonalisable de la matrice A) tels que $D = p(A)$. On se place bien sûr dans un cas où les valeurs propres de la matrice ne sont pas exactement calculables.

IV. La méthode de Newton avec Maple

Au cours de ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$, $n = 15$ et on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{C})$ définie ci-dessous, dont nous allons montrer à l'aide de Maple que sa décomposition est calculable par l'algorithme de Newton alors que ses valeurs propres ne le sont pas.

$$A = \begin{pmatrix} -239 & -219 & -201 & -182 & -164 & -149 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\ 22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 321 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\ -416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -209 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\ 183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 67 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\ -326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -109 & -88 & -66 & -44 & -22 \\ 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 121 & 80 & 40 \\ -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -59 & -30 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 12 \\ -217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -219 & -215 & -202 & -188 & -166 & -125 & -88 & -53 & -23 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\ 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\ -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\ 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26 \end{pmatrix}.$$

Son polynome caractéristique p_A , qui se calcule à l'aide de la commande "charpoly" sous Maple, est :

$$p = p_A = \left(x^5 - 9x^4 - 245x^3 - 1873x^2 - 5634x + 43486\right)^3 .$$

Il est possible de calculer, avec la commande "fsolve", des valeurs approchées de chacune des valeurs propres complexes de A c'est à dire des racines de$p$. On trouve 5 valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^5$, chacune ayant un ordre de muliplicité triple dans p :

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx -9.105387869 \\ \lambda_2 \approx -4.140449458 - 6.991743391.i \\ \lambda_3 \approx -4.140449458 + 6.991743391.i \\ \lambda_4 \approx 3.107109622 \\ \lambda_5 \approx \ 23.27917716 \end{cases} .$$

Toujours avec Maple et relativement au théorème 1.2, on calcule d'abord le pgcd d de p et de son polynome dérivé grace à la commande "gcd", puis on divise p par d pour trouver $\widetilde{p}$. On trouve successivement :

$$d = pgcd(p,\, p^{'}) = x^{10} - 18x^9 - 409x^8 + 664x^7 + 82471x^6 + 1106154x^5 + 5486041x^4 +$$

$$-203176x^3 - 131156600x^2 - 490000248x + 1891032196\,,$$

et

$$\widetilde{p} = \frac{p}{d} = x^5 - 9x^4 - 245x^3 - 1873x^2 - 5634x + 43486.$$

En particulier, on se rend compte que

$$p = \widetilde{p}^3,$$

et que l'on peut choisir

$$n(p) = 4,$$

c'est a dire $m = 2$, ce qui signifie que deux itérations dans l'algorithme de Newton seront suffisantes pour trouver la partie diagonalisable D de A :

$$D_2 = D\,.$$

Pour pouvoir faire tourner l'algorithme, on a besoin du polynôme dérivé de $\widetilde{p}$ qui se calcule sous Maple à l'aide de la commande "diff". On trouve :

$$\widetilde{p}' = 5x^4 - 36x^3 - 735x^2 - 3746x - 5634\,.$$

Puis, on en déduit u_p tel que $u_p\widetilde{p}' \equiv 1\ (mod\, p)$, à l'aide de la commande "gcdex" . Enfin, à l'aide de la commande "subs", on calcule $u_p(A)$, $\widetilde{p}(A)$ et

$$D_1 = A - u_p(A)\widetilde{p}(A)\,.$$

De même, on calcule D_2 à l'aide de la formule

$$D_2 = D_1 - u_p(D_1)\widetilde{p}(D_1)\,.$$

On trouve ainsi la partie diagonalisable D de la matrice A relativement à sa décomposition de Jordan-Chevalley.

$$D_2 = D = \begin{pmatrix}
-240 & -220 & -202 & -183 & -165 & -150 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\
22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 320 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\
-416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -210 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\
183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 66 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\
-326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -110 & -88 & -66 & -44 & -22 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\
-266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\
128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 11 \\
-216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -218 & -214 & -201 & -187 & -165 & -124 & -87 & -52 & -22 \\
12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\
212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\
-116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\
33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26
\end{pmatrix},$$

puis, par différence, sa partie nilpotente N :

$$N = A - D = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

V. Un calcul direct sur les polynômes

On a vu dans l'introduction que l'on peut calculer la décomposition de Jordan-Chevalley en résolvant un système de congruences. Plus précisément si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si le polynôme caractéristique p_A de A est scindé sur K, de sorte que $p_A = \Pi_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ désignant les valeurs propres dinctinctes de A alors la décomposition de Jordan-Chevalley $A = D + N$ de A vérifie la formule $D = h(A)$, où $h \in \mathbb{K}[x]$ est une solution quelconque du système d'équations de congruence :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} h \equiv \lambda_1 \ mod \ (x-\lambda_1)^{n_1} \\ h \equiv \lambda_2 \ mod \ (x-\lambda_2)^{n_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ h \equiv \lambda_k \ mod \ (x-\lambda_k)^{n_k} \end{cases} .$$

Ceci donne un moyen de calculer la décomposition de Jordan d'une matrice quand on a pu calculer ses valeurs propres, ce qui n'est bien entendu pas le cas en général. Par contre il est possible quand K est de caractéristique nulle de calculer une solution du système $(\mathcal{S})$ en traduisant l'algorithme de Newton par un calcul direct sur les polynômes, sans avoir besoin de calculer les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_k$.Cette méthode est enseignée dans le cadre de la préparation à l'agrégation de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan [42].

Théorème 5.1. *Soit $p \in \mathbb{K}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, et $(\lambda_i)_{i=1}^{k}$ la suite des racines de p appartenant a la clôture algebrique $\overline{\mathbb{K}}$ du corps $\mathbb{K}$. On suppose que pour tout $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ et que l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme p est n_i:*

$$p = \Pi_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{n_i}, \ \ avec \ \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

On considère le polynôme $\widetilde{p}$ défini par:

$$\widetilde{p} = \frac{p}{pgcd\,(p,\, p')} = \Pi_{i=1}^{k} (x-\lambda_i) .$$

On s'intéresse au système de congruences suivant:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} h \equiv \lambda_1 \ mod \ (x-\lambda_1)^{n_1} \\ h \equiv \lambda_2 \ mod \ (x-\lambda_2)^{n_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ h \equiv \lambda_k \ mod \ (x-\lambda_k)^{n_k} \end{cases} .$$

On définit la suite $(q_m)_{m \geq 0}$ de $\mathbb{K}[x]$ par:

$$\begin{cases} q_{m+1} = q_0 \circ \pi(q_m) \\ q_0 = x - \widetilde{p}v \end{cases} ,$$

où pour tout entier naturel m, $\pi(q_m)$ est le reste de la division euclidienne de q_m par p, (en d'autres termes, la classe de q_m modulo p) et où v est tel que $(u,\, v)$ est un couple de polynômes réalisant l'identité de Bezout entre les deux polynômes $\widetilde{p}$ et $\widetilde{p}'$ qui sont premiers entre eux:

$$u\widetilde{p} + v\widetilde{p}' = 1.$$

Soit m_0 *le plus petit entier naturel tel que* $2^{m_0+1} \geq max\{n_i : 1 \leq i \leq n\}$. *Alors pour tout* $m \geq m_0$,

$$\pi(q_m) \text{ est solution de } (\mathcal{S}).$$

Preuve. On va reprendre les notations de la preuve originale de Chevalley reproduite page 15. Avec ces notations, on a, pour tout polynôme q

$$s(q) = q \circ q_0. \tag{2}$$

Donc $\tilde{p}(s^m(x)) = s^m(\tilde{p}) \equiv 0 \mod \tilde{p}^{2^m}$, et $s^m(x) \equiv x \bmod \tilde{p}$.

Pour $i \neq j$ on a $s^m(x) - \lambda_j \equiv x - \lambda_j \equiv \lambda_i - \lambda_j + (x - \lambda_i) \bmod \tilde{p}$, donc $s^m(x) - \lambda_j$ est premier avec $x - \lambda_i$. Par conséquent $\pi_{j \neq i}(s^m(x) - \lambda_j)$ est premier avec $(x - \lambda_i)^{2^m}$.

Comme $\tilde{p}^{2^m} = (x - \lambda_1)^{2^m} ... (x - \lambda_k)^{2^m}$ divise $\tilde{p}(s^m(x)) = (s^m(x) - \lambda_1)...(s^m(x) - \lambda_k)$, on voit que l'on a pour $1 \leq i \leq k$, $m \geq 1$,

$$s^m(x) \equiv \lambda_i \mod (x - \lambda_i)^{2^m}.$$

Une récurrence évidente montre que $q_m \equiv s^m(x) \mod p$. Comme $\mathrm{pgcd}((x - \lambda_i)^{2^m}, p) = (x - \lambda_i)^{inf(2^m, n_i)}$ on obtient

$$s^m(x) \equiv \lambda_i \mod (x - \lambda_i)^{inf(2^m, n_i)},$$

et par conséquent q_m est solution du système $\mathcal{S}$ pour $m \geq m_0$. □

On peut donc calculer la décomposition de Jordan en résolvant le système $(\mathcal{S})$ par l'algorithme donné par le théorème 5.1. Avec les notations du théorème 5.1, la partie diagonalisable D de A est alors donnée par la formule $D = \pi(q_{m_0})(A)$, m_0 désignant le plus petit entier naturel tel que $2^{m_0+1} \geq max\{n_i : 1 \leq i \leq n\}$,

Illustration.

On suppose que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$. Prenons l'exemple de la matrice $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{C})$ étudiée au paragraphe III. Elle donne $k = 5$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$. Par conséquent $m_0 = 1$. Voici le pôlynome $\pi(q_1)$ trouvé par Maple:

$$-\frac{16477745599437338839632862158855 9}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^{14}$$

$$+\frac{4696495785239673852290048403064815}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^{13}+$$
$$+\frac{1904832784435747945567751656823474}{192303074127438195482110354612058431032117841}x^{12}+$$
$$-\frac{9315661262682828283674390878700185 7}{7692122965097527819284414184482337241284713 64}x^{11}+$$
$$-\frac{94788804608407615653197845627115521 5}{192303074127438195482110354612058431032117841}x^{10}+$$
$$-\frac{134225331044956775638702555509762875765}{3076849186039011127713765673792934896513885456}x^{9}+$$
$$+\frac{143730752058862541635377275945772321475 5}{3076849186039011127713765673792934896513885456}x^{8}+$$

$$+\frac{5160755602829187090655465367051014084185}{38460614825487639096422070922411686206423568 2}x^7+$$
$$+\frac{883915408036735072058939076768746842566791}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^6+$$
$$+\frac{3913459854154300022640900141580672168912059}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^5+$$
$$-\frac{4125757581287724475079189681241424637007729}{3076849186039011127713765673792934896513885456}x^4+$$
$$-\frac{1202955633870054250571522565744213358793813}{415790430545812314555914280242288499528903 44}x^3+$$
$$-\frac{20178588629570575350989517677986373726372409 9}{15384245930195055638568828368964674482569427 28}x^2+$$
$$+\frac{181198065258374969525176213518762504150588853 5}{15384245930195055638568828368964674482569427 28}x+$$
$$+\frac{1040926769591787693101439601278755401419987857}{7692122965097527819284414184482337241284713 64}.$$

Une valeur approchée de $\pi(q_1)$ se calcule à l'aide de la commande "evalf" et vaut :

$$\pi(q_1) \approx -.2677697964.10^{-13}x^{14} + 0.7631988930.10^{-12}x^{13}+$$
$$+0.9905368352.10^{-11}x^{12} - 0.1211065047.10^{-9}x^{11}+$$
$$-0.4929136211.10^{-8}x^{10} - 0.4362428021.10^{-7}x^9+$$
$$+0.4671361623.10^{-6}x^8 + 0.00001341828680.x^7+$$
$$+0.0001436397032.x^6 + 0.0006359524984.x^5+$$
$$-0.001340903415.x^4 - .02893177778.x^3+$$
$$-0.1311639759.x^2 + 1.177815709.x + 1.353237298\,.$$

La matrice $\pi(q_1)(A)$ coincide avec la partie diagonalisable D de A dans sa décomposition de Jordan- Chevalley.

Algorithme sous Maple

Le Théorème 5.1 se traduit par la procédure "chinois" ci-dessous, procédure qui donne une solution au système de congruence $(\mathcal{S})|$.

chinois:=proc (P)

local u, v, d, g, q, q0, p, pprime, ptilde, ptildeprime, m, delta;

```
    p:=P;
    pprime:=diff(p, x);
    d:=gcd(p, pprime);
    ptilde:=quo(p, d, x);
    ptildeprime:=diff(ptilde, x);
    gcdex(ptilde, ptildeprime, x, 'u', 'v');
    q0:=rem(x-v*ptilde, p, x); > m:=0;
    while delta<>0 do
    m:=m+1;
    q:=subs(x = q0, q0);
    q:=rem(q, p, x);
    q:=sort(q,x);
    delta:=q-q0;
    q0:=q; > od;

RETURN(q);

end:
```

La procédure “Jordan” qui suit, est une traduction du corollaire 5.3 et calcule à l'aide de la procédure “chinois” ci-dessus, la décomposition de Jordan d'une matrice A.

```
Jordan:=proc(A)

local m, p, p0, d, n;

    m:=evalm(A);
    p:=charpoly(m,x);
    p0:=chinois(p);
    d:=evalm(subs(x=m,p0));
    n:=evalm(m-d);
    print(d,n);

end:
```

References

[1] M. Audin , *Publier sous l'occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences*, Revue d'Histoire des Mathématiques, **15** (2009), 1-57.

[2] A. Borel, *Groupes linéaires algébriques*, Ann. of Math. **64** (1956), 20-80.

[3] A. Borel, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, History of Mathematics, vol. 21, American Math. Soc. and London Math. Soc., Providence R.I. and London, 2001.

[4] A. Boyer et J. Risler, Mathématiques pour la licence : Groupes, anneaux, corps, Dunod, 2006.

[5] F. Brechenmacher, *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, Thèse, Ecole des Hautes Études en Sciences sociales, Paris, 2006.

[6] F. Brechenmacher, *Regards croisés sur Camille Jordan*, Matapli, **78** (2006), 57-67.

[7] F. Brechenmacher, *Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques*, prépublication.

[8] A. Cayley, *A Memoir on the Theory of Matrices*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **148** (1858),17-37.

[9] C. Chevalley, Theory of Lie groups. Tome I, Princeton University Press, 1946.

[10] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie. Tome II. Groupes Algébriques, Paris. Hermann 1951

[11] C. Chevalley, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples*, Collected works. Vol.3, Springer, 2005.

[12] D. Couty, *Formes réduites des automorphismes analytiques de* $\mathbb{C}^n$ *à variété linéaire fixe et répulsive,* Lecture Notes in Math, 1404, Springer, Berlin, 1989, 346-410.

[13] L.E. Dickson, *Canonical Form of a linear Homogeneous Substitution in a Galois Field*, Amer. J. Math. **22** (1900), 121-137.

[14] J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann, 1978.

[15] J. Dieudonné, *Claude Chevalley*, Transformations Groups, **4** (1999), 105-118.

[16] P.G. Dixon et J. Esterle, *Michael's problem and the Fatou-Bieberbach phenomenon*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Vol.15, N.4 (1986), 127-187.

[17] P. Dubreil, *L'algèbre, en France, de 1900 à 1935*, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, **3** (1982), 69-81.

[18] N. Dunford, *Spectral operators*, Pacific J. Math. **4** (1954), 321-354.

[19] X. Dussau, J. Esterle, F. Zarouf et R. Zarouf, ESTIA première Année, Mathématiques, Cours d'algèbre linéaire, Edition 2010.

[20] D. Ferrand, *Une méthode effective pour la décomposition de Dunford*, Préparation à l'agrégation, Université de Rennes, 2003.

[21] J. Fresnel, M. Matignon, Algèbre et géométrie : Un recueil d'exercices, Université Bordeaux I, 2006.

[22] E. Galois, *OEuvres mathématiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 1 **11** (1946), 381-444.

[23] R. Godement, Cours d'Algèbre, Hermann, 1964

[24] J.E. Humphreys , Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, GTM 9, Springer, New-York, 1972.

[25] J.E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate texts in Mathematics, vol. 21, Springer- Verlag, 1975.

[26] J. E. Humphreys, *courrier personnel*, 2010.

[27] C. Jordan, *Commentaires sur le Mémoire de Galois*, C. R. Acad. Sc. Paris **LX** (1865), 770-774.

[28] C. Jordan, *Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations*, Journal de mathématiques pures et appliquées, (1867), 105-108.

[29] C. Jordan, *Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, Journal de mathématiques pures et appliquées (1867).109-139.

[30] C. Jordan, *Commentaire sur Galois*, Math. Ann. **1**, (1869),142-160.

[31] C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1870.

[32] C. Jordan, Oeuvres de Camille Jordan, Gauthier-Villars, Paris, 1961.

[33] G. Julia, *Préface des œuvres de Camille Jordan*, Gauthier-Villars, Paris, 1961.

[34] E.R. Kolchin, *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations*, Ann. of Math. (2) **49** (1948),1-42.

[35] E.R. Kolchin, *On certain concepts in the theory of algebraic matric groups*, Ann. of Math.(2) **49** (1948), 774-789.

[36] S. Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1965.

[37] L. Leau, *Etude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables,* Ann. Fac. Sci. Toulouse **11** (1897), 1-110.

[38] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès Jean-Marie, Cours de mathématiques, Algèbre, Dunod Université, 1978.

[39] H. Lebesgue, Notices d'Histoire des Mathématiques, Dunod, 1958.

[40] C.C. Mac Duffee, Vectors and Matrices, The Mathematical Association of America, The collegiate Press: Menasha, Wisconsin, 1943.

[41] E. Picard, *Travaux mathématiques de Jordan*, C.R. Acad. Sci. Paris **174** (1922), 210-211.

[42] C. Picaronny, *Effectivité de la décomposition de Dunford*, Préparation à l'agrégation 2006/2007, ENS Cachan, Cours d'algèbre.

[43] H. Poincaré, *Sur les nombres complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris **99** (1884), 740-742.

[44] H. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes,* J. de Math. **6** (1890), 313-365.

[45] N. Schappacher, Questions politiques dans la vie des mathématiques en Allemagne, 1918-1935, La science du Troisième Reich (sous la direction de J.Olff-Nathan), Seuil, 1993.

[46] S. Sternberg, *Local contractions and a theorem of Poincaré* Amer. J. Math. **79** (1957), 809-823.

[47] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices, Blackie and Son, London and Glasgow, 1932.

[48] B.L. Van der Waerden, Moderne Algebra II, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1931.

[49] A. Weil, Souvenirs d'apprentissage, Birkhäuser,1991.

Danielle Couty, IMT Toulouse, UMR 5219, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex 9, France

E-mail address : danielle.couty@iut-tarbes.fr

Jean Esterle, , Université de Bordeaux, IMB, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

E-mail address : Jean.Esterle@math.u-bordeaux1.fr

Rachid Zarouf, CMI-LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39, rue F.-Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

E-mail address : rzarouf@cmi.univ-mrs.fr