Contents

Introduction

Interpolation libre ou interpolation liée?

En 1916, G. Pick [26] et ensuite en 1919, R. Nevanlinna [19], étudiaient le problème visant à caractériser les suites $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{C}$ telles qu'il existe une fonction f holomorphe dans $\mathbb{D}$ qui interpole les valeurs w_k aux points λ_k, c'est-à-dire $f(\lambda_k) = w_k$, $k = 1, \ldots, n$, sous la condition supplémentaire $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$. Ce problème est maintenant connu sous le nom d'interpolation de Nevanlinna-Pick et une solution pour ce problème était donnée par R. Nevanlinna et G. Pick.

Nous pouvons classer cette question parmi les études ayant pour but de trouver une fonction appartenant à un sous-ensemble M de l'espace des fonctions holomorphes sur un domaine ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{C}^N$), qui interpole une suite de valeurs $\{w_i\}_{i\in I}$ appartenant à un ensemble $l \subset \mathbb{C}^I$, dans les points $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \Omega$. Nous allons appeler ce type d'interpolation *interpolation classique*. Ces problèmes d'interpolation deviennent de plus en plus délicats lorsque l'on élargit l'ensemble l et lorsque l'on restreint l'ensemble M.
Dans le cas de l'interpolation de Nevanlinna-Pick, la difficulté principale résulte de la restriction de l'ensemble M.
Les questions qui se posent dans les problèmes d'interpolation sont les suivantes :

> 1) Quels sont les ensembles Λ tels que l'interpolation est possible (dans un sens que nous allons préciser plus tard)?

Si nous choisissons par exemple $\Omega = \mathbb{D}$, $\Lambda = \{1/(n+1)\}_{n\geq 1}$ et $w_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, nous n'allons certainement pas trouver une fonction holomorphe qui oscille entre -1 et $+1$ au voisinage de zéro.

> 2) Quelles sont les suites $M-$interpolables, c'est-à-dire quelles sont les suites $\{w_i\}_{i\in I} \subset l$ telles qu'il existe $f \in M$ avec $f(\lambda_i) = w_i$, $i \in I$?

Nous allons utiliser les notations $f|_\Lambda = \{f(\lambda_i)\}_{i\in I}$ et $X|_\Lambda = \{f|_\Lambda : f \in X\}$. Ainsi la question 2) revient alors à donner une description de $X|_\Lambda$.
Il n'est pas évident de séparer ces deux questions ; la solution du problème de Nevanlinna-Pick, par exemple, montre que les liens entre les points $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ et les données $\{w_i\}_{i\in I}$ peuvent être très étroits. Par rapport aux problèmes que nous allons traiter ici, on peut appeler ce type d'interpolation *interpolation "liée"*.

Qu'est-ce alors qu'une *interpolation libre*?
Notre ensemble M sera dès lors un espace de Banach de fonctions holomorphes X_+, que nous allons considérer comme le sous-espace des fonctions analytiques d'un espace de Banach de fonctions mesurables X sur Ω.
Nous prenons l'exemple $l = l^\infty = \{(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} : \sup_{n\geq 1} |a_n| < \infty\}$ et $X_+ = H^\infty = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^\infty} < \infty\}$, ce qui nous ramène en plein milieu de l'histoire. En effet, en 1958, L. Carleson [5] donnait une caractérisation des suites $\Lambda \in \mathbb{D}$ permettant ce que l'on appelle maintenant une *interpolation libre classique* dans H^∞, c'est-à-dire, si $f \in H^\infty$ interpole les valeurs $\{w_n\}_{n\geq 1}$ dans les points $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$, alors pour toute suite $\{v_n\}_{n\geq 1}$ vérifiant $|v_n| \leq |w_n|$, $n \geq 1$, il existe une fonction $g \in H^\infty$ qui interpole $\{v_n\}_{n\geq 1}$ dans $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. Effectivement, il a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $H^\infty|_\Lambda = l^\infty$. Nous appellerons une suite Λ permettant une interpolation libre classique dans H^∞ une suite de Carleson et nous écrirons $\Lambda \in (C)$.

Evidemment, la réponse à la question de savoir si ce résultat permettait une généralisation au cas $H^p = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{H^p} = \sup_{0<r<1} 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p\, dt < \infty\}$ ne tardait pas à être donnée. En 1961, H. S. Shapiro et A. L. Shields [28] ont généralisé le résultat à H^p en interpolant les problèmes duaux H^∞ et H^1 (ici interpolation entre les espaces de Banach). Ils ont révélé la même condition que L. Carleson dans le cas H^∞ comme condition nécessaire et suffisante pour avoir interpolation libre classique dans H^p, interpolation qui est réalisée maintenant dans un espace de suites pondéré $l^p(1-|\lambda_n^2|) = \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n^2|)|a_n|^p < \infty\}$. De nos jours, l'apparition du poids n'est d'ailleurs plus surprenante étant donné que, dans le cas intuitif de l'espace de Hilbert H^2, nous avons $\|k_\lambda\|_{H^2} = (1-|\lambda^2|)^{-1/2}$, où k_λ est le noyau reproduisant de H^2 (c'est-à-dire $< f, k_\lambda >= f(\lambda)$, $f \in H^2$). Nous verrons plus tard le rôle important de ce noyau dans l'interpolation classique.

Dans les années suivantes, beaucoup d'auteurs ont abordé le problème d'interpolation classique dans d'autres espaces X de fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, comme par exemple l'algèbre $A^{-\infty}$, les espaces A^{-n}, les espaces de Bergman, les espaces de Lipschitz, etc. Ce domaine n'est toujours pas épuisé. Même des espaces connus depuis longtemps — comme par exemple les espaces de Bergman — résistent toujours aux tentatives des spécialistes visant à donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir interpolation libre classique.

Vers 1978, dans les travaux de V. I. Vasyunin et N. K. Nikolski, une nouvelle définition d'interpolation a vu le jour. Une définition qui a aussi inspiré une nouvelle approche complètement différente du problème, une approche par la théorie des opérateurs.
Cette nouvelle approche est motivée dans le cas de l'espace de Hilbert par le développement en série de Fourier (cf. [20]). En effet, si H est un espace de Hilbert séparable, il possède une base orthonormale $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, et on peut donc identifier H à l'espace l^2 via $f \longmapsto (< f, \varphi_n >)_{n\geq 1}$, $H^2 \longrightarrow l^2$, où $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire de H, et nous obtenons ainsi une interpolation des coefficients de Fourier.
Nous pouvons appliquer un raisonnement similaire si nous avons un système biorthogonal $(\{\varphi_n\}_{n\geq 1}, \{\psi_k\}_{k\geq 1})$, c'est-à-dire $< \varphi_n, \psi_k >= \delta_{n,k}$, $n, k \geq 1$, complet dans H (raisonnement qui reste d'ailleurs aussi valable dans un système dual (X, X^*)). Nous posons ici $\delta_{n,k} = 1$ si $n = k$ et $\delta_{n,k} = 0$ sinon (symbole de Kronecker). Pour obtenir interpolation classique, il suffit

maintenant d'avoir une famille $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ qui vérifie $< f, \varphi_n >= f(\lambda_n)$, $n \geq 1$. Ceci est possible si l'espace H possède un noyau reproduisant k_λ. Si $\{k_{\lambda_n}\}_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle telle que $(\{\psi_k\}_{k\geq 1}, \{k_{\lambda_n}\}_{n\geq 1})$ est un système biorthogonal, alors $f \longmapsto (< f, k_{\lambda_n} >)_{n\geq 1}$, $H^2 \longrightarrow l^2(\|\psi_n\|^2)$ est une bijection, et interpolation par rapport au système biorthogonal devient interpolation (libre) classique. En choisissant d'autres systèmes biorthogonaux $(\{\psi_k\}_{k\geq 1}, \{\varphi_n\}_{n\geq 1})$, nous obtenons d'autres types d'interpolation, comme par exemple avec $\varphi_l = \partial^l / \partial \overline{\lambda}^l k_\lambda$, $l \geq 1$, dans H^2, nous pouvons interpoler les dérivées $l-$ièmes de f. Ceci nous amène à l'interpolation de type Hermite, c'est-à-dire que l'on impose des valeurs non seulement à la fonction, mais aussi à ses dérivées.
Si on cherche un cadre général pour ce type d'interpolation, on remarque que la différence entre la fonction f et son développement de Taylor $T = \sum_{k=0}^{l-1} 1/k! f^{(k)}(\lambda)(z-\lambda)^k$ est un zéro de multiplicité l, ce que l'on peut donc écrire sous la forme $f - T \in b_\lambda^l H^2$, où b_λ est le facteur de Blaschke $b_\lambda(z) = (\lambda - z)/(1 - \overline{\lambda} z)$.
Et maintenant, avec cette formulation abstraite, pourquoi ne pas remplacer b_λ^l par une fonction quelconque?
Et pourquoi ne pas remplacer T par une fonction H^2 quelconque?
Ainsi, on a obtenu une nouvelle définition d'interpolation généralisée : on dira que la fonction interpole la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ par rapport à la suite de fonctions $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$, si on a

$$f - f_n \in \vartheta_n X_+, \quad n \geq 1.$$

Pour des raisons techniques, on choisit souvent pour ϑ_n, $n \geq 1$, des fonctions intérieures, c'est-à-dire $\vartheta_n \in H^\infty$ et $|\vartheta_n| = 1$ $p.p.$ $\mathbb{T}$ (si X_+ est défini sur $\mathbb{D}$). Cette définition était utilisée pour la première fois dans [21] (voir aussi [29]). Pour ce type d'interpolation il y a maintenant plusieurs façons de définir la liberté. Dans cette thèse, je vais étudier les problèmes qui sont liés à l'interpolation libre généralisée, en particulier, comme dans le cas de l'interpolation classique (liée ou libre), les deux questions suivantes :

> 1) Quelles sont les suites de fonctions intérieures $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ telles que l'interpolation libre généralisée est possible (dans un sens que nous allons préciser plus tard)?

Et

> 2) Quelles sont les suites X_+-interpolables par rapport à $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire quelles sont les suites $(f_n)_{n\geq 1} \subset X$ telles qu'il existe $f \in X_+$ avec $f - f_n \in \vartheta_n X_+$, $n \geq 1$?

Dans [29], V. I. Vasyunin a donné une caractérisation complète des suites $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ permettant une interpolation libre généralisée des données scalaires $f_n \equiv a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, avec $\sup_{n\geq 1} |a_n| < \infty$, ce qui entraîne, en notre langage, l'interpolation libre au sens faible dans H^∞, ce qui veut dire que si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est H^∞-interpolable, alors toute suite $(\mu_n f_n)_{n\geq 1}$ avec $(\mu_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ est aussi H^∞-interpolable. Ce résultat fut ensuite étendu par N. K. Nikolski [21] aux données $(f_n)_{n\geq 1} \subset H^\infty$ avec $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_{H^\infty} < \infty$.
Pourquoi V. I. Vasyunin et N. K. Nikolski se sont-ils intéressés à ce type d'interpolation? Et quel est le rôle de l^∞? Afin de voir ceci, nous rappelons que, d'après le théorème de Lorch-Grinblyum, la famille $(X_n)_{n\geq 1}$ de sous-espaces de X est une base inconditionnelle dans X si et seulement si l^∞ est l'espace des multiplicateurs dans X_+ (pour les définitions, voir paragraphe

1.2). Ainsi, si $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n \in X_n$, $n \geq 1$, alors pour $(\mu_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$, il existe $g \in X$ avec $g = \sum_{n\geq 1} \mu_n f_n$. Pour arriver à l'interpolation libre généralisée, il nous faut donc une base inconditionnelle $(X_n)_{n\geq 1}$ qui vérifie de plus $(\sum_{k\geq 1} f_k) - f_n \in \vartheta_n X_+$. Nous verrons qu'une telle base est étroitement liée à la base $(K^X_{\vartheta_n})_{n\geq 1} = (X_+ \cap \vartheta_n X_-)_{n\geq 1}$ (où X_- est la partie antianalytique de X).
En fait, la caractérisation des suites permettant une interpolation libre généralisée au sens faible de V. I. Vasyunin n'est rien d'autre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(K^{L^2}_{\vartheta_n})_{n\geq 1}$ soit une base inconditionnelle dans $K^{L^2}_\theta$, $\theta = \prod_{n\geq 1} \vartheta_n$. Son résultat et sa généralisation de N. K. Nikolski permettent maintenant de caractériser les suites d'interpolation libre généralisée dans H^2 et H^∞, ce qui répond à la première question dans ces espaces.

Dans le *premier chapitre* de ma thèse, je vais adapter leur raisonnement au cas des espaces H^p, $1 < p \leq \infty$. Dans un cadre général, les liens entre l'interpolation libre au sens faible et les bases inconditionnelles seront établies dans le corollaire 1.3.5, un résultat qui est basé sur l'étude des treillis des sous-espaces invariants de $P_+\bar{z}$ dans X_+.
Le raisonnement de N. K. Nikolski pour caractériser les bases inconditionnelles dans le cas H^2 sera généralisé à H^p. En effet, ceci nécessite une généralisation du théorème du relèvement du commutant que nous allons réaliser, avec la même méthode utilisée dans [22], à l'aide d'une généralisation du théorème de Nehari.
La caractérisation des suites d'interpolation libre généralisée au sens faible dans H^∞ de V. I. Vasyunin fera le lien entre les bases inconditionnelles dans $K^{L^p}_\theta$, $1 < p < \infty$, et l'interpolation libre généralisée au sens faible dans H^p.
Ainsi nous obtenons dans le théorème 1.4.1, d'une façon analogue au cas de l'interpolation classique, la même condition nécessaire et suffisante pour l'interpolation libre généralisée au sens faible dans H^p comme dans H^∞. Dans la suite, nous allons appeler cette condition la *condition de Carleson généralisée* et nous la noterons (CG) (on la rencontre parfois aussi sous le nom de *condition de Carleson-Vasyunin* (CV) pour rappeler la contribution de V. I. Vasyunin à la découverte de cette condition).

Une fois cette condition établie, nous allons donner dans le *deuxième chapitre* une caractérisation de l'espace des données RX_+ pour $X_+ = H^p$, où R est l'opérateur de restriction généralisé

$$\begin{array}{rcl} R : X_+ & \longrightarrow & l^\infty\left(X_+/\vartheta_n X_+\right) \\ f & \longrightarrow & (f + \vartheta_n X_+)_{n\geq 1}. \end{array}$$

Nous remarquons que, grâce à $\|f_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+} \leq \|f_n\|_{X_+}$ et la définition de $l^\infty(X/\vartheta_n X)$, l'opérateur R est toujours continu. En effet, pour un espace de suites l, nous écrirons en général

$$(f_n)_{n\geq 1} \in l\left(X_+/\vartheta_n X_+\right) \Longleftrightarrow \left(\|f_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+}\right) \in l.$$

Dans le cas $X_+ = H^p$, $1 < p \leq \infty$, nous allons démontrer, que R est bien défini et surjectif sur $l^p\left(H^p/\vartheta_n H^p\right)$ si et seulement si $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition de Carleson généralisée (corollaire 2.2.2). Ce résultat fut conjecturé sans preuve par N. K. Nikolski et S. V. Khrushchëv en 1986 [23].

Le *troisième chapitre* sera consacré à la caractérisation de l'espace des traces $H^p|_\Lambda$. Ici nous

allons rejoindre les travaux de V. I. Vasyunin, qui, en effet, a donné en 1984, en utilisant la caractérisation de l'espace des données pour H^∞, la caractérisation de l'espace $H^\infty|_\Lambda$ lorsque Λ est une réunion finie de suites de Carleson. De la même façon nous allons exploiter la caractérisation de l'espace des données RH^p, $1 < p < \infty$, obtenue aux deuxième chapitre. On verra que l'on peut identifier l'espace des traces $H^p|_\Lambda$ à l'espace $l^p(H^p/\vartheta_n H^p)$ si $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$, ϑ_n étant des produits de Blaschke convenables. En particulier, si Λ est une réunion finie de suites de Carleson, il existe une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de produits de Blaschke qui vérifie (CG) et $\sup_{n\geq 1} \dim H^p/B_n H^p < \infty$ et telle que les zéros de $\prod_{n\geq 1} B_n$ coïncident avec Λ. Dans cette situation on peut caractériser uniformément la norme $\|\cdot\|_{H^p/B_n H^p}$ en fonction des données locales, c'est-à-dire $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\sigma_n}$ (avec σ_n l'ensemble des zéros de B_n), ce qui fournira la caractérisation explicite des traces $H^p|_\Lambda$ dans le théorème 3.3.1 et le corollaire 3.3.3.
Nous remarquons qu'une autre caractérisation des traces $H^p|_\Lambda$ fut indépendamment trouvé par J. Bruna, A. Nicolau et K. Øyma [4].
Nous allons appliquer la caractérisation de $H^p|_\Lambda$ dans le cas particulier $p = \infty$ à l'étude de l'algèbre H^∞/BH^∞, si B est un produit de Blaschke dont les zéros forment une réunion finie de suites de Carleson. En particulier, nous obtenons une caractérisation des éléments inversibles dans cette algèbre.

L'étude des problèmes d'interpolation dans H^p sera complétée dans le *quatrième chapitre* par une discussion de l'opérateur d'interpolation. Le résultat sur les éléments inversibles de l'algèbre H^∞/BH^∞ nous permettra, à l'aide d'un résultat de S. A. Vinogradov, de construire explicitement un opérateur linéaire et continu d'interpolation.
Nous allons montrer que l'existence de cet opérateur dans H^∞ n'est possible que si Λ est une réunion finie de suites de Carleson.

Dans le *cinquième chapitre*, nous allons modifier la construction de l'opérateur d'interpolation, étudié au quatrième chapitre, pour obtenir une description des traces de l'espace $H^\infty_\omega = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : |f(z)| \leq c_f \omega(|z|)\}$ (sous certaines condition sur le poids ω).

Le *sixième chapitre* sera consacré à l'étude des espaces de traces $X|_\Lambda$ pour d'autres espaces X de fonctions holomorphes sur les réunions finies de suites de Carleson. En particulier nous obtenons une caractérisation des traces de l'espace de Bergman.

Certaines démonstrations techniques de quelques-uns des résultats auxiliaires sont reportées dans une *annexe* pour le confort de la lecture.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :
1) Si $1 < p < \infty$, alors q sera l'exposant conjugué

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

2) le produit scalaire est donné par

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\, dt.$$

Nous allons marquer la fin de preuve d'un lemme par $\square$ et celle d'un théorème ou corollaire par $\blacksquare$.

Chapter 1

La condition de Carleson généralisée

Dans ce paragraphe nous allons donner les définitions de l'interpolation libre au sens faible (cf. [21]) et démontrer que la condition de Carleson généralisée est nécessaire et suffisante pour ce type d'interpolation. Dans ce but, nous reprenons les idées qui étaient développées pour le cas $p = 2$ dans [20], [21] et [29]. La démarche consiste tout d'abord à étudier les liens entre l'interpolation libre et les bases inconditionnelles. Ensuite nous allons caractériser ces bases inconditionnelles à l'aide des projections spectrales correspondantes. Le théorème du relèvement du commutant nous donne une formulation explicite et une estimation de la norme de ces projections. Cette estimation des normes avec la définition de l'interpolation libre nous permettra de ramener l'interpolation libre (des fonctions) dans H^p à l'interpolation libre (des idempotents de l^∞) dans H^∞. V. I. Vasyunin [29] a donné une condition nécessaire et suffisante — la condition de Carleson généralisée — dans ce cas et donc, d'après ce qui précède, aussi pour l'interpolation libre dans H^p.

1.1 Interpolation libre généralisée

Soit $Hol(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H^\infty = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$ et

$$X_+ \subset Nev = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : f = f_1/f_2 \ avec\ f_1, f_2 \in H^\infty\},$$

tel que $H^\infty X_+ \subset X_+$. Dans tout ce qui suit, $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions intérieures (c'est-à-dire $\vartheta_n \in H^\infty$ et $|\vartheta_n| = 1$ *p.p.* $\mathbb{T}$) et nous supposons que $\theta = \prod_{n\geq 1} \vartheta_n$ converge dans H^2.

Définition 1.1.1 *On dit qu'une fonction $f \in X_+$ interpole une suite $(f_n)_{n\geq 1} \subset X_+$ par rapport à $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$, si*

$$f - f_n \in \vartheta_n X_+, \quad pour\ tout\ n \geq 1.$$

Dans ce cas on dit aussi que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est interpolable par rapport à $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$.

Dans la suite, nous dirons seulement que $(f_n)_{n\geq 1}$ est interpolable, si la suite $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est connue d'après le contexte.
Nous définissons la liberté faible de l'interpolation de la façon suivante.

Définition 1.1.2 *On dit que $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre (généralisée) au sens faible, si la suite $(\mu_n f_n)_{n\geq 1}$ est interpolable pour $\mu \in l^\infty$ et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ interpolable.*

Remarques
1.) Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. Nous posons $\vartheta_n = b_{\lambda_n} = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\frac{\lambda_n - z}{1-\overline{\lambda}_n z}$ (facteur de Blaschke) et $f_n(z) \equiv a_n$ pour $(a_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$. D'après le résultat de L. Carleson [5], $(b_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens faible si et seulement si Λ vérifie la condition de Carleson, c'est-à-dire

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} \prod_{\mu\neq\lambda} |b_\mu(\lambda)| = \delta > 0.$$

Si une suite Λ vérifie cette condition, nous écrivons $\Lambda \in (C)$, et nous appelons Λ une *suite de Carleson*. On utilise aussi le terme *suite d'interpolation pour H^∞*. La constante δ sera appelée *constante de Carleson*.
2.) Dans le deuxième chapitre, nous allons donner un autre type d'interpolation approprié aux espaces de type $l\,(X_+/\vartheta_n X_+)$.

1.2 Bases inconditionnelles

Soit $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Banach Y. On la suppose complète dans Y et faiblement topologiquement libre, c'est-à-dire $Y_n \cap \mathcal{L}in\,(Y_k : k \neq n) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$. Soit $\mathcal{E}_n$ la projection spectrale associée à Y_n qui est bien définie sur l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}in\,(Y_k : k \geq 1)$ par l'équation $\mathcal{E}_n(\sum_{k\geq 1} y_k) = y_n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n|_{Y_n} &= I, \\ \mathcal{E}_n|_{Y_k} &= 0 \quad k \neq n. \end{aligned}$$

Les projections $\mathcal{E}_n$ sont continues si et seulement si la suite $\mathcal{Y}$ est topologiquement libre, c'est-à-dire si et seulement si $dist(y/\|y\|, span\,(Y_k : k \neq n)) \geq \delta_n > 0$ pour tout $y \in Y_n$, $y \neq 0$, et $n \geq 1$ (nous désignons en général par $span\,(Y_n : n \geq 1)$ l'enveloppe linéaire fermée de la famille $(Y_n)_{n\geq 1}$). Si ceci est le cas, la paire $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}')$, où $\mathcal{Y}' = (\mathcal{E}_n^* Y^*)_{n\geq 1}$, $\mathcal{E}_n^*$ étant les projections adjointes, s'appelle biorthogonale. Soit aussi $\mathcal{E}_\sigma = \sum_{n\in\sigma} \mathcal{E}_n$ pour un ensemble fini $\sigma \subset \mathbb{N}$. Nous avons le résultat suivant (cf. [20]), qui généralise le théorème de Lorch-Grinblyum (cf. [22] pour les références).

Théorème 1.2.1 *Soient $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}'$ deux familles biorthogonales de sous-espaces, complètes dans Y, respectivement Y^*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle,
2) $\sup_{\sigma\in\mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty$,
3) $M(\mathcal{Y}) \supset \{L_\mu : L_\mu|_{Y_n} = \mu_n I, \mu \in l^\infty\} \quad (\simeq l^\infty)$.

Ici $M(\mathcal{Y}) = \{T \in \mathcal{B}(Y) : TY_n \subset Y_n,\ \text{pour } n \geq 1\}$ est l'ensemble des multiplicateurs de la famille $(Y_n)_{n\geq 1}$, $\mathcal{B}(Y)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de Y et $\mathcal{K}$ est l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Remarque
1) Si $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle dans un espace réflexif Y, alors $\mathcal{Y}'$ l'est aussi dans Y^* (cf. par exemple [27]).
2) Pour les définitions des bases inconditionnelles (ou décompositions de Schauder inconditionnelles) voir aussi [17].

Nous donnons une caractérisation plus proche de notre problème d'interpolation :

Lemme 1.2.2 *Soient $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\geq 1}$ une base dans l'espace de Banach Y et $\mathcal{E}_n$ les projections spectrales associées. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle.
2) Pour tout $x \in Y$ et $\mu \in l^\infty$, il existe un unique élément $y \in Y$ tel que

$$\mathcal{E}_n y = \mu_n \mathcal{E}_n x, \quad \text{pour tout } n \geq 1. \tag{1.1}$$

Preuve
D'après le théorème 1.2.1, $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle si et seulement si pour tout $\mu \in l^\infty$ l'opérateur L_μ est borné. Le lemme sera alors démontré si cette condition est équivalente à 2). Supposons donc que l'on ait 2) et définissons l'opérateur $T_\mu : Y \longrightarrow Y$, qui à $x \in Y$ associe l'élément y selon 2). Cet opérateur est alors bien défini et linéaire. La continuité de T_μ est une conséquence du théorème du graphe fermé. Il reste donc à démontrer que $T_\mu|_{Y_n} = \mu_n I_n$ où I_n est l'identité sur Y_n. Prenons alors $x \in Y_n \subset Y$ et posons $y = T_\mu x$. Par définition, l'élément y vérifie $\mathcal{E}_k y = \mu_k \mathcal{E}_k x$, $k \geq 1$ et en particulier, pour $k \neq n$, $\mathcal{E}_k y = 0$. Grâce à la complétude de $\mathcal{Y}$, l'élément y appartient donc à Y_n, et ainsi $y = \mathcal{E}_n y = \mu_n \mathcal{E}_n x = \mu_n x$.
Réciproquement, si $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle, alors, d'après le théorème 1.2.1, T_μ est borné quel que soit $\mu \in l^\infty$. Remarquons que $\mathcal{E}_n$ et T_μ commutent : $\mathcal{E}_n T_\mu x = T_\mu \mathcal{E}_n x$; en effet, ceci se démontre directement sur l'ensemble dense $\mathcal{L}in\,(Y_n : n \geq 1)$ dans Y. Nous posons alors $y = T_\mu x$ pour $x \in Y$ et nous obtenons $\mathcal{E}_n y = \mathcal{E}_n T_\mu x = T_\mu \mathcal{E}_n x = \mu_n \mathcal{E}_n x$. $\square$

C'est ce lemme qui nous permettra d'établir les liens entre les bases inconditionnelles et l'interpolation.

1.3 Lien entre l'interpolation et les bases inconditionnelles

Dans tout ce paragraphe nous comprenons la dualité par rapport au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ défini dans l'introduction. Pour approcher le problème abstrait dans un espace X, nous aurons besoin d'un certain nombre de propriétés :

1) Nous supposons que l'on peut identifier l'espace X et son dual X^* à des sous-espaces vectoriels de $L^1(\mathbb{T})$ et que la dualité entre X et X^* s'exprime dans la dualité $< \cdot, \cdot >$.

2) L'espace X est un espace idéal, c'est-à-dire que pour $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in X$, nous avons

$$|g| \leq |f| \quad p.p.\,\mathbb{T} \quad \text{implique} \quad g \in X \quad \text{et} \quad \|g\|_X \leq \|f\|_X.$$

Soit $Y = X,\, X^*$.

3) Les polynômes trigonométriques $\mathcal{P}$ sont denses dans Y.

Et

4) La projection de Riesz

$$\begin{array}{rcl} P_+ : \mathcal{P} & \longrightarrow & Y \\ \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \end{array}$$

est continue.

Nous définissons $P_- = I - P_+$, et nous posons

$$Y_+ = P_+ Y, \quad Y_- = P_- Y.$$

Soit $A \dot{+} B = Y$ la somme directe de deux sous-espaces $A, B \subset Y$. Alors en général, si P est une projection continue dans l'espace Y, nous avons la décomposition $Y = PY \dot{+} (I-P)Y = PY \dot{+} \mathit{ker}\, P$, d'où l'identification naturelle et l'encadrement important de la norme quotient :

$$\begin{aligned} PY &\simeq Y/\mathit{ker}\, P, \\ \frac{1}{\|P\|}\|Pu\|_Y &\leq \|u\|_{Y/\mathit{ker}\, P} \leq \|Pu\|_Y. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nous remarquons que l'on a $(P_+|_X)^* = P_+|_{X^*}$ à l'aide de la dualité $< \cdot, \cdot >$, et $(\mathit{im}\, P) = (\mathit{ker}\, P^*)_\perp$. Ainsi, grâce à $\mathit{ker}\, P_+ = (X_+)^\perp$, on peut identifier $(X_+)^* = X^*/(X_+)^\perp \simeq (X^*)_+$, ce qui justifie l'écriture X^*_+, que nous allons utiliser dans la suite.

Grâce aux conditions 1)-4), nous obtenons immédiatement les propriétés suivantes :

5) La multiplication par une fonction ψ essentiellement bornée est une opération continue (de norme inférieure ou égale à $\|\psi\|_{H^\infty}$) car X est idéal.

6) Pour une fonction intérieure θ, les espaces θY, θY_+ et θY_- sont fermés.

7) La projection $P_\theta = \theta P_- \overline{\theta} : Y_+ \longrightarrow Y_+$ est bien définie et continue.

Nous définissons $K_\theta^Y = P_\theta Y_+$, et nous obtenons

Lemme 1.3.1 *Si Y vérifie les hypothèses 1)-4) et si θ est une fonction intérieure, alors*

$$K_\theta^Y = Y_+ \cap \theta Y_-.$$

Preuve
Prenons $f \in K_\theta^Y = P_\theta Y_+$, alors il existe $g \in Y_+$ telle que $f = \theta P_- \overline{\theta} g \in \theta Y_-$. De plus

$f = \theta P_- \overline{\theta} g = \theta(I - P_+)\overline{\theta} g = g - \theta P_+ \overline{\theta} g \in Y_+$ d'où l'inclusion "$\subset$".
Pour l'inclusion inverse, nous vérifions que P_θ est l'identité sur $Y_+ \cap \theta Y_-$. En effet, si $g \in Y_+ \cap \theta Y_-$, alors $g \in Y_+$ et $g = \theta h$ avec $h \in Y_-$. Ainsi $P_\theta g = \theta P_- \overline{\theta} \theta h = \theta P_- h = \theta h = g \in Y_+ \cap \theta Y_-$.
□

Nous dirons qu'une fonction intérieure θ_1 divise une autre fonction intérieure θ_2, et nous écrirons $\theta_1 | \theta_2$, s'il existe une fonction intérieure θ telle que $\theta_1 \theta = \theta_2$ (on peut trouver cette définition dans [22]).
Nous allons énoncer quelques propriétés des espaces $K^Y_{\vartheta_n}$ dans le

Lemme 1.3.2 *Soient Y un espace vérifiant les conditions 1)-4) et θ, θ_i, $i \geq 1$, des fonctions intérieures. Alors*
a) Tous les sous-espaces invariants de $P_+ \bar{z}$ sont de la forme K^Y_θ avec une fonction intérieure θ.
b) $K^Y_{\theta_1} \cap K^Y_{\theta_2} = \{0\}$ si et seulement si pgcd $(\theta_1, \theta_2) = 1$. En effet nous avons plus généralement $K^Y_{\theta_1} \cap K^Y_{\theta_2} = K^Y_\theta$ avec $\theta =$ pgcd (θ_1, θ_2).
c) span $(K^Y_{\theta_i} : i \geq 1) = K^Y_\theta$ avec $\theta =$ ppcm $(\theta_i : i \geq 1)$.
d) Si $(\vartheta_n)_{n \geq 1}$ est d'interpolation libre au sens faible, alors pgcd $(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1$, $n \neq k$.

Remarque
Les propriétés a)-c) étaient démontrées dans [22] pour le cas $Y = X = X^* = L^2$ et la propriété d) dans [29] pour $X = H^\infty$. Nous allons reprendre ces preuves dans le cas général.

Preuve
Le théorème sur les sous-espaces invariants des espaces idéaux de Banach (cf. [22]) affirme que, sous les conditions 1)-4), les sous-espaces invariants de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante $f(z) \longmapsto z f(z)$ dans X^* sont de la forme θX^*_+ avec une fonction intérieure θ. Comme la dualité (X, X^*) est donnée par le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, nous obtenons que justement les sous-espaces de la forme $(\theta X^*_+)^\perp = X_+ \cap \theta X_-$ sont les sous-espaces invariants de l'adjoint $P_+ \bar{z}$
Les propriétés b) et c) en sont une conséquence immédiate, par exemple si θ_1 et θ_2 sont des fonctions intérieures, alors $K^Y_{\theta_1}$ et $K^Y_{\theta_2}$ sont invariants par rapport à $P_+ \bar{z}$, et ainsi aussi leur intersection $K^Y_{\theta_1} \cap K^Y_{\theta_2}$. Celle-ci s'écrit alors K^Y_θ avec une fonction intérieure θ. Puisque $K^Y_\theta \subset K^Y_{\theta_1}$, $K^Y_{\theta_2}$, nous avons $\theta | \theta_1, \theta_2$. Et donc $\theta | \theta' =$ *pgcd* (θ_1, θ_2). Or ceci entraîne $K^Y_\theta \subset K^Y_{\theta'}$. Et nous concluons $K^Y_\theta \subset K^Y_{\theta'} = K^Y_{\theta'} \cap K^Y_{\theta'} \subset K^Y_{\theta_1} \cap K^Y_{\theta_2} = K^Y_\theta$ (ce raisonnement était fait dans [22] dans le cas $X_+ = H^2$).
Etudions donc la propriété d). Supposons qu'il existe $n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, avec *pgcd* $(\vartheta_n, \vartheta_k) \neq 1$ et posons $\vartheta =$ *pgcd* $(\vartheta_n, \vartheta_k)$. Comme $1 \in X_+$ d'après les propriétés 3) et 4), la suite $(1)_{n \geq 1}$ est interpolable. Grâce à l'interpolation libre au sens faible, la suite $(\delta_{l,k})_{n \geq 1}$ est également interpolable et il existe donc une fonction $f \in X_+$ telle que $f - 1 \in \vartheta_n X_+ \subset \vartheta X_+$ et $f - 0 \in \vartheta_k X_+ \subset \vartheta X_+$. Ceci entraîne $1 \in \vartheta X_+$. Par conséquent, il existe $g \in X_+$, telle que $1 = \vartheta g$, ce qui entraîne $\overline{\vartheta} = g$. Or $g \in X_+$ est analytique et donc $\overline{\vartheta}$ aussi, ce qui n'est possible que si $\vartheta = 1$. Ceci est en contradiction avec notre hypothèse. □

Soit maintenant $\theta = \prod_{n \geq 1} \vartheta_n$ où ϑ_n sont premières entre elles (*pgcd* $(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1$, $n \neq k$), et posons

$$X_n = K^X_{\vartheta_n}.$$

D'après l'assertion c) du lemme 1.3.2, la famille $(X_n)_{n\geq 1}$ est complète dans K^X_θ. Pour traduire (1.1) en interpolation libre au sens faible, il faut trouver une base $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\geq 1}$, dont les projections spectrales vérifient $ker\,\mathcal{E}_n \subset \vartheta_n X$. En effet il s'avérera que la base duale $(X'_n)_{n\geq 1} = (\mathcal{E}^*_n(K^X_\theta)^*)_{n\geq 1}$ a cette propriété. Afin de vérifier ceci, il faut calculer $(K^X_\theta)^*$. Par définition on avait $K^X_\theta = P_\theta X_+ = P_\theta P_+ X = PX$ si on pose $P = P_\theta P_+$. Nous remarquons qu'en tant que produit de deux projections définies sur $Y = X, X^*$, P est aussi définie sur X^* et vérifie de plus $(P|X)^* = P|X^*$ Puisque $K^X_\theta \subset X$ et X^* s'identifie à l'aide du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ à un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\left(K^X_\theta\right)^* = X^*/\left(K^X_\theta\right)^\perp = X^*/\left(PX\right)^\perp = X^*/ker\,P|_{X^*} \simeq PX^* = K^{X^*}_\theta. \tag{1.3}$$

La dernière équivalence est une conséquence de 1.2.
On peut maintenant démontrer la

Proposition 1.3.3 *Soit X un espace réflexif et supposons que $\mathcal{X}$ soit topologiquement libre. Dans K^X_θ nous avons :*

$$\begin{aligned} ker\,\mathcal{E}^*_n &= \vartheta_n X^*_+ \cap \theta X^*_- \subset \vartheta_n X^*_+, \\ Im\,\mathcal{E}^*_n &= \vartheta'_n X^*_+ \cap \theta X^*_-, \end{aligned}$$

où $\vartheta'_n = \theta/\vartheta_n$.

Preuve

$$\begin{aligned} ker\,\mathcal{E}^*_n &= \overline{(\mathcal{E}_n K^X_\theta)}^\perp = \overline{(P_{\vartheta_n} X_+)}^\perp = ker\,P_{\vartheta_n}|_{K^{X^*}_\theta} = \vartheta_n X^*_+ \cap \theta X^*_-. \\ \overline{Im\mathcal{E}^*_n} &= (ker\,\mathcal{E}_n)^\perp = (span\,(K^X_{\vartheta_k} : k \neq n))^\perp = (K^X_{\vartheta'_n})^\perp = (P_{\vartheta'_n} X_+)^\perp = ker\,P_{\vartheta'_n}|_{K^{X^*}_\theta} \\ &= \vartheta'_n X^*_+ \cap \theta X^*_-. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}^*_n$ est une projection continue, son image est fermée, ce qui démontre la proposition.
■

Remarque
Comme les $X'_n = \vartheta'_n X^*_+ \cap \theta X^*_-$ sont des sous-espaces invariants de $P_\theta z$ dans $K^{X^*}_\theta$, nous pouvons appliquer le même raisonnement qu'on utilise pour démontrer la propriété c) du lemme 1.3.2 (pour X_n) aussi pour X'_n, ce qui justifie la complétude de $\mathcal{X}' = (X'_n)_{n\geq 1}$ dans $K^{X^*}_\theta$.

La proposition que nous venons de démontrer nécessite la continuité des projections spectrales. Le résultat suivant nous montre que ceci est une conséquence de l'interpolation libre au sens faible.

Lemme 1.3.4 *Soit X un espace réflexif. Si $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens faible dans X^*_+, alors $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ est topologiquement libre.*

Preuve
Nous avons déjà observé (cf. lemme 1.3.2 (d)), que l'interpolation libre au sens faible entraîne $pgcd\,(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1$, $n \neq k$. Le système $\mathcal{X}$ est donc faiblement topologiquement libre (d'après lemme 1.3.2 (b)). Il suffit donc de démontrer la continuité des projections spectrales. Dans ce but, nous remarquons d'abord que $f \in X_+^*$ interpole la suite $(P_{\vartheta_n} f)_{n\geq 1} \subset X_+^*$ et qu'il existe ainsi d'après l'interpolation libre au sens faible une fonction $g \in X_+^*$ telle que $g - \mu_n P_{\vartheta_n} f \in \vartheta_n X_+^*$ pour $\mu \in l^\infty$, et puisque $ker\, P_{\vartheta_n} = \vartheta_n X_+^*$, on a aussi $g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geq 1$.
Pour $P_\theta g$ nous avons toujours $P_\theta g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geq 1$, et $P_\theta g$ est en effet l'unique fonction qui résout le problème d'interpolation dans $K_\theta^{X^*}$. Ainsi, pour $\mu \in l^\infty$, l'opérateur

$$\begin{aligned} M_\mu : K_\theta^{X^*} &\longrightarrow K_\theta^{X^*} \\ f &\longmapsto g, \end{aligned}$$

qui à $f \in K_\theta^{X^*}$ associe la fonction $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geq 1$, est bien défini. On se persuade facilement de sa linéarité et la continuité est une conséquence du théorème du graphe fermé. Choisissons $\mu = (\delta_{nk})_{k\geq 1}$ et étudions M_μ. On vérifie que $g = M_\mu f = 0$ pour $f \in \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^*$ et $M_\mu f = f$ pour $f \in \vartheta_n' X_+^* \cap \theta X_-^*$. M_μ est donc en effet égal à $\mathcal{E}_n^*$, d'où la continuité de $\mathcal{E}_n^*$ et donc celle de $\mathcal{E}_n$. □

On applique maintenant (1.1) à la base duale et les égalités $\mathcal{E}_n^* y = \mu_n \mathcal{E}_n^* x$ se traduisent grâce à la proposition précédente en interpolation libre au sens faible.

Corollaire 1.3.5 *Soit X un espace réflexif vérifiant les conditions 1)-4) et θ une fonction intérieure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) $(X_n)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle dans K_θ^X,
2) $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'interpolation libre au sens faible dans X_+^*.

Preuve
Nous avons déjà remarqué que dans un espace réflexif, $(X_n)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle si et seulement si $(X_n')_{n\geq 1}$ l'est.
Soient alors $f, f_n \in X_+^*$ telles que $f - f_n \in \vartheta_n X_+^*$ et $\mu \in l^\infty$. Quitte à considérer $P_\theta f$, $P_\theta f_n$ — qui vérifient aussi $P_\theta f - P_\theta f_n \in \vartheta_n X_+^*$ — , nous pouvons supposer que $f, f_n \in K_\theta^{X^*}$ et nous avons donc $\mathcal{E}_n^* f = \mathcal{E}_n^* f_n$. D'après le lemme 1.2.2 (cf. aussi théorème 1.2.1), il existe $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $\mathcal{E}_n^* g = \mu_n \mathcal{E}_n^* f_n$, ce qui implique que pour tout $n \geq 1$ on a $g - \mu_n f_n \in ker\, \mathcal{E}_n^* \subset \vartheta_n X_+^*$.
Pour la reciproque, nous observons d'abord que d'après la remarque faite après la proposition 1.3.3, $\mathcal{X}'$ est complète, et d'après le lemme 1.3.4 que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont topologiquement libres. Afin de démontrer que $\mathcal{X}'$ est une base inconditionnelle, à l'aide du lemme 1.2.2, il suffit donc de vérifier que pour $\mu \in l^\infty$ et $f \in K_\theta^{X^*}$, il existe $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $\mu_n \mathcal{E}_n^* f = \mathcal{E}_n^* g$, $n \geq 1$. Soit alors $f \in K_\theta^{X^*}$. Si on pose $f_n = \mathcal{E}_n^* f$, alors $f - f_n \in \vartheta_n X_+^*$. L'interpolation libre au sens faible entraîne pour toute suite $\mu \in l^\infty$ l'existence d'une fonction $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $g - \mu_n f_n \in \vartheta_n X_+^*$. Puisque g et f_n appartiennent à $K_\theta^{X^*}$, on a $g - \mu_n f_n \in \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^* = ker\, \mathcal{E}_n^*$ et donc $\mathcal{E}_n^* g = \mu_n \mathcal{E}_n^* f_n = \mu_n \mathcal{E}_n^* f$. D'où le corollaire. ■

1.4 La condition de Carleson généralisée dans le cas $X = L^p$

Soit $X = L^p(\mathbb{T})$ et $H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy, c'est-à-dire $f \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $f \in Hol\,(\mathbb{D})$ et

$$\|f\|_{H^p}^p = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p \, dt < \infty.$$

Il est connu que l'on peut identifier $H^p(\mathbb{D})$ à $H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, n < 0\}$. Nous écrirons donc simplement H^p et remarquons aussi que $H^p = P_+ L^p(\mathbb{T})$, si $1 < p < \infty$. Nous posons $K_\theta^p = K_\theta^{L^p} = H^p \cap \theta H_-^p$ ($= P_\theta H^p$ pour $1 < p < \infty$) et nous allons caractériser les suites d'interpolation libre au sens faible dans H^p pour $1 < p \leq \infty$.
Soit toujours $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intérieures et $\theta = \prod_{n\geq 1} \vartheta_n$. Dans [29], V. I. Vasyunin a introduit la condition suivante : s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$|\theta(z)| \geq \delta \inf_{n\geq 1} |\vartheta_n(z)|, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.4}$$

nous dirons que $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ vérifie la *condition de Carleson généralisée* (ou condition de Carleson-Vasyunin) et nous écrirons $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. Nous utilisons aussi la formulation suivante de la condition (CG) :

$$(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG) \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{n\geq 1} \inf_{z\in\mathbb{D}} (|\vartheta_n(z)| + \prod_{k\neq n} |\vartheta_k(z)|) > 0. \tag{1.5}$$

Nous appellerons δ la constante de Carleson généralisée. La condition (CG) généralise la condition de Carleson. En effet, si on prend $\vartheta_n = b_{\lambda_n}$, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, on obtient (cf. par exemple [20])

$$(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG) \Longleftrightarrow \Lambda \in (C).$$

Avec cette notation nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 1.4.1 *Soit $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intérieures et $1 < p \leq \infty$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes*
1) $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$,
2) Il existe $c < \infty$ telle que pour $\mu \in l^\infty$ où $\mu_k^2 = \mu_k$, il existe $f_\mu \in H^\infty$ avec $f_\mu - \mu_n \in \vartheta_n H^\infty$ et $\|f_\mu\| \leq c$,
3) $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens faible pour H^p,
4) Si $p < \infty$: $(K_{\vartheta_n}^q)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle.
5) $(K_{\vartheta_n}^r)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle pour $1 < r < \infty$.

Remarques
Pour $p = 2$, l'équivalence entre 1),2) et 4) est contenue dans la section 3.4 de [29] et entre les quatre premières conditions dans [21]. Remarquons aussi que la condition (CG) implique toujours l'interpolation libre au sens faible (même dans un sens plus fort) dans un espace X, qui vérifie $H^\infty X \subset X$ (ce qui était remarqué dans [22], p. 233). En effet, si $f, f_n \in X$ sont telles que $f - f_n \in \vartheta_n X$ pour tout $n \geq 1$, et si $\mu \in l^\infty$, alors $gf - \mu_n f_n \in \vartheta_n X$ pour $n \geq 1$,

où $g \in H^\infty$ est la fonction qui vérifie $g - \mu_n \in \vartheta_n H^\infty$ $(n \geq 1)$. Cette fonction g existe d'après [29]. Finalement nous remarquons que l'implication 1) $\Longrightarrow$ 4) pour $1 < p < \infty$ était démontrée dans [20] pour le cas particulier $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$ avec $\sup_{n\geq 1} k_n < \infty$ et que l'équivalence entre 1) et 3) dans le cas $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, $\mu \in l^\infty$ avec $\mu_n^2 = \mu_n$, sous la seule hypothèse $(b_{\lambda_n}^{k_n})_{n\geq 1} \in (CG)$, est démontrée dans [34].

Dans la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du théorème du relèvement du commutant que nous allons généraliser du cas hilbertien H^2 au cas H^p. Dans ce but, nous reprenons la démonstration de [22] basée sur le théorème de Nehari.

Soit $M_\theta = P_\theta z|_{K_\theta^q}$ la compression du shift à K_θ^q et $\{M_\theta\}' = \{A : K_\theta^q \longrightarrow K_\theta^q : M_\theta A = AM_\theta\}$ le commutant de M_θ.

Théorème 1.4.2 (Relèvement du commutant) *Soient θ une fonction intérieure, $1 < q < \infty$ et $K_\theta^q = H^q \cap \theta H_-^q$, $M_\theta = P_\theta z|_{K_\theta^q}$. Si A (continu) commute avec M_θ, alors il existe une fonction $\varphi_0 \in H^\infty$ telle que*

$$A = P_\theta \varphi_0|_{K_\theta^q} \quad (= \varphi_0(M_\theta))$$
$$\text{et} \qquad \frac{1}{\|P_-\|}\|\varphi_0\|_{H^\infty} \leq \|A\| \leq \|\varphi_0\|_{H^\infty}$$

Preuve
De façon analogue à la preuve qui était donnée dans [22], nous démontrons que $A \in \{M_\theta\}'$ si et seulement si $A_* = \overline{\theta} AP_\theta$ est un opérateur de Hankel. Nous appliquons une généralisation du théorème de Nehari pour caractériser les opérateurs de Hankel et nous en déduisons une estimation de la norme de A.
Soit donc θ une fonction intérieure et $A : K_\theta^q \longrightarrow K_\theta^q$ un opérateur continu qui commute avec $M_\theta = P_\theta z|_{K_\theta^q}$. Posons $A_* = \overline{\theta} AP_\theta$ sur H^q.
D'après l'hypothèse nous avons $M_\theta A = AM_\theta$, ce qui est donc équivalent à $P_\theta zA|_{K_\theta^q} = AP_\theta z|_{K_\theta^q}$. Comme $P_\theta z|_{\theta H_-^q} = 0$, nous pouvons prolonger cette égalité à H^q : $P_\theta zAP_\theta = AP_\theta z$. En multipliant par $\overline{\theta}$ on obtient $P_- \overline{\theta} zAP_\theta = \overline{\theta} AP_\theta z$. Grâce à la définition de A_* et puisque $\overline{\theta}$ et z commutent, nous obtenons l'équation de Hankel pour A_* :

$$P_- zA_* = A_* z.$$

(Ce raisonnement a été effectué dans [22] pour le cas H^2 ; nous remarquons qu'il est absolument indépendant de p).
Ainsi nous obtenons un opérateur $A_* : H^q \longrightarrow H_-^q$ continu par hypothèse, qui vérifie l'équation de Hankel. L'étude du commutant de M_θ est donc ramenée à l'étude d'un opérateur de Hankel. Dans [13], il était déjà remarqué que le théorème de Nehari reste valable dans H^p, $1 < p < \infty$. En effet, la preuve qui était proposée dans [22] pour le cas $q = 2$, s'adapte parfaitement au cas $1 < q < \infty$. Nous nous contentons ici de donner l'énoncé de ce résultat.

Théorème 1.4.3 (Nehari) *Soit $1 < q < \infty$ et $\Gamma : H^q \longrightarrow H_-^q$ un opérateur qui vérifie l'équation de Hankel*

$$P_- z\Gamma = \Gamma z.$$

Alors Γ *est continu si et seulement si l'on trouve* $\psi \in L^\infty$ *telle que pour toute fonction* $f \in H^q$*, on a*

$$\Gamma f = P_-\psi f.$$

De plus, on peut choisir ψ *telle que*

$$\|\Gamma\| = dist\,(\psi, H^\infty).$$

Par hypothèse, $A_* : H^q \longrightarrow H^q_-$ est continu ce qui implique maintenant l'existence d'une fonction $\psi \in L^\infty$ telle que $A_* f = \overline{\theta} A P_\theta f = P_-\psi f$ pour $f \in H^q$. Comme A_* s'annule sur θH^q, on a plus particulièrement $\psi \in \overline{\theta} H^\infty$, c'est-à-dire il existe une fonction $\varphi \in H^\infty$ telle que $\psi = \overline{\theta}\varphi$. Ceci donne $A_* = \overline{\theta} A P_\theta = P_-\psi = P_-(\overline{\theta}\varphi)$, d'où

$$AP_\theta = \theta P_-(\overline{\theta}\varphi) = P_\theta \varphi.$$

Et par conséquent, pour $f \in K^q_\theta$, $Af = AP_\theta f = P_\theta \varphi f$, ce qui démontre

$$A|_{K^q_\theta} = P_\theta \varphi|_{K^q_\theta}.$$

Il reste la discussion de la norme de A. Grâce au théorème de Nehari (dans sa forme généralisée), on avait pour ψ :

$$\|A_*\| = dist\,(\psi, H^\infty) = dist\,(\overline{\theta}\varphi, H^\infty) = dist\,(\varphi, \theta H^\infty) = \|\varphi\|_{H^\infty/\theta H^\infty}.$$

Puisque θH^∞ est fermé dans H^∞, il existe $\varphi_0 \in \varphi + \theta H^\infty$ qui réalise la distance minimale $\|\varphi_0\|_{H^\infty} = \|\varphi\|_{H^\infty/\theta H^\infty}$. Or $\varphi - \varphi_0 \in \theta H^\infty \subset \theta H^q = ker\, P_\theta$, donc $A|_{K^q_\theta} = P_\theta\varphi|_{K^q_\theta} = P_\theta\varphi_0|_{K^q_\theta}$ avec $\|\varphi_0\|_{H^\infty} = \|A_*\|$.
Nous en déduisons la norme de A. Soit $f \in K^q_\theta$, alors

$$\|Af\|_{L^q} = \|\overline{\theta} A P_\theta f\|_{L^q} = \|A_* f\|_{L^q} \leq \|A_*\|\, \|f\|_{H^q},$$

d'où $\|A\| \leq \|A_*\| = \|\varphi_0\|_{H^\infty}$.
Pour $f \in H^q$, on obtient

$$\|A_* f\|_{L^q} = \|\overline{\theta} A P_\theta f\|_{L^q} = \|AP_\theta f\|_{L^q} \leq \|A\|\, \|P_\theta f\|_{H^q} \leq \|A\|\, \|P_\theta\|\, \|f\|_{H^q},$$

d'où $\|\varphi_0\|_{H^\infty} = \|A_*\| \leq \|A\|\, \|P_\theta\| \leq \|A\|\, \|P_-\|$. Nous obtenons finalement

$$\frac{1}{\|P_-\|}\|\varphi_0\|_{H^\infty} \leq \|A\| \leq \|\varphi_0\|_{H^\infty}.$$

■

Preuve du théorème 1.4.1
L'équivalence entre 1) et 2) est une conséquence de la section 3.4 de [29] (cette équivalence est en fait indépendante de p) et, d'après la remarque, comme $H^\infty H^p \subset H^p$, la condition 1) implique la condition 3).
Nous allons distinguer les cas $p = \infty$ et $p < \infty$:
Pour $p = \infty$, l'implication 3) $\Longrightarrow$ 2) est une conséquence du théorème 2.3 de [29], ce qui achève

la preuve dans ce cas.
Dans le cas $p < \infty$, on obtient l'équivalence entre 3) et 4) à l'aide du corollaire 1.3.5. Nous allons démontrer que la condition 4) entraîne la condition 2). Nous procédons de la même façon que dans [20] ou [22] où le cas $p = q = 2$ a été considéré. Supposons alors que $(K^q_{\vartheta_n})_{n\geq 1}$ soit une base inconditionnelle. De ce fait, les projections spectrales sont continues. La compression du shift $M_\theta = P_\theta z|_{K^p_\theta}$ vérifie

$$\mathcal{E}_n M^*_\theta = M^*_\theta \mathcal{E}_n, \tag{1.6}$$

car $K^q_{\vartheta_n} = \mathcal{E}_n K^q_\theta$ sont des sous-espaces invariants de $M^*_\theta = P_+ \bar{z}|_{K^q_\theta}$ (cf. lemme 1.3.2), ce qui implique

$$\mathcal{E}^*_n \in \{M_\theta\}' .$$

Nous appliquons le théorème du relèvement du commutant à $\mathcal{E}^*_\sigma$. Cet opérateur appartient à $\{M_\theta\}'$ et par conséquent il existe $\varphi_\sigma \in H^\infty$ telle que $\mathcal{E}^*_\sigma = P_\theta \varphi_\sigma|_{K^p_\theta}$ et $\frac{1}{\|P_-\|}\|\varphi_\sigma\|_{H^\infty} \leq \|\mathcal{E}^*_\sigma\| \leq \|\varphi_\sigma\|_{H^\infty}$. On passe à l'adjoint pour obtenir

$$\mathcal{E}_\sigma = P_+ \overline{\varphi}_\sigma|_{K^q_\theta} \tag{1.7}$$
$$\text{et} \quad \|\mathcal{E}_\sigma\| = \|\mathcal{E}^*_\sigma\|. \tag{1.8}$$

Comme $\mathcal{E}_\sigma|_{K^q_{\vartheta_n}} = I$ pour $n \in \sigma$ et $\mathcal{E}_\sigma|_{K^q_{\vartheta_n}} = 0$ pour $n \notin \sigma$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma - 1 \quad &\in \quad \vartheta_n H^\infty \quad \text{pour} \quad n \in \sigma \\ \varphi_\sigma \quad &\in \quad \vartheta_n H^\infty \quad \text{pour} \quad n \notin \sigma. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Donc φ_σ interpole la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$, qui est égale à 1 pour $n \in \sigma$ et 0 sinon. En plus, comme $(K^q_{\vartheta_n})_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle, nous avons

$$\|\varphi_\sigma\| \leq \|P_-\| \sup_{\tau\in\mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\tau\| = c < \infty, \tag{1.10}$$

ce qui démontre 2). Pour achever la preuve, il nous reste donc à démontrer l'équivalence entre la condition 5) et les autres conditions. Or 5) implique trivialement 4), et 1) étant indépendant de p implique 5) pour n'importe quel $1 < r < \infty$. ∎

Chapter 2

L'espace des données

Le but de ce chapitre est de donner une description de l'espace des suites interpolables dans H^p. Nous appellerons cet espace aussi espace des données.
Après avoir donné dans le premier paragraphe un résultat général sur les suites de fonctions interpolables pour un nouveau type d'interpolation libre, nous allons démontrer dans le deuxième chapitre essentiellement une conjecture de N. K. Nikolski et S. V. Khrushchëv, qui nous permettra de caractériser les suites de fonctions interpolables dans H^p.

2.1 Observations générales

Le rôle central dans notre étude de l'espace des suites de fonctions interpolables est joué par l'opérateur de restriction généralisé :

$$\begin{array}{rcl} R : X_+ & \longrightarrow & l^\infty(X_+/\vartheta_n X_+) \\ f & \longmapsto & (f + \vartheta_n X_+)_{n\geq 1}, \end{array}$$

où $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est toujours une suite de fonctions intérieures et $X_+ \subset Nev$ un sous-espace tel que les $\vartheta_n X_+$ sont des sous-espaces fermés. Nous rappelons la définition générale de l'espace $l(Y_n)$ pour un espace idéal de suites l et une suite d'espaces de Banach $(Y_n)_{n\geq 1}$

$$(f_n)_{n\geq 1} \in l(Y_n) \Longleftrightarrow (\|f_n\|_{Y_n})_{n\geq 1} \in l.$$

Avec l'opérateur R, nous pouvons maintenant identifier

$$(f_n)_{n\geq 1} \subset X_+ \text{ interpolable} \quad \Longleftrightarrow \quad (f_n)_{n\geq 1} \in RX_+.$$

Ainsi nous avons ramené la description de l'espace des suites interpolables à la description de l'image de R qui est évidemment un sous-espace de $l^\infty(X_+/\vartheta_n X_+)$. Une façon naturelle de construire des sous-espaces de $l^\infty\,(X_+/\vartheta_n X_+)$ est donnée par $l(X_+/\vartheta_n X_+)$ avec un espace idéal de suites $l \subset l^\infty$, c'est-à-dire tel que pour $a = (a_n)_{n\geq 1} \in l$ et une suite numérique $b = (b_n)_{n\geq 1}$ avec $|b_n| \leq c\,|a_n|$ (la constante c ne dépendant pas de n ; nous pouvons toujours la supposer égale à 1) on a $b \in l$. Pour ceci nous introduisons un nouveau type d'interpolation plus approprié à ces sous-espaces. Nous allons découvrir que dans le cas $X_+ = H^p$ la condition (CG) est toujours nécessaire et suffisante pour ce type d'interpolation.

Définition 2.1.1 *On dit que la suite $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ de fonctions intérieures est d'interpolation libre au sens des germes si pour une suite interpolable $(f_n)_{n\geq 1}$ et pour toute suite $(g_n)_{n\geq 1} \subset X_+$ vérifiant*

$$\|g_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+} \leq \|f_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+}$$

la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est aussi interpolable.

Le résultat suivant illustre que ce type d'interpolation est canonique pour $RX_+ = l(X_+/\vartheta_n X_+)$.

Lemme 2.1.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(1) $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens des germes.
(2) Il existe $l \subset l^\infty$ un sous-espace vectoriel idéal tel que

$$RX_+ = l\left(X_+/\vartheta_n X_+\right).$$

Remarques
1) Si X vérifie les hypothèses 1)-4) du paragraphe 1.3, ce lemme est une conséquence du lemme 1.2 de [20] appliqué à la base duale $\mathcal{X}' = (\mathcal{E}_n^* K_\theta^{X^*})_{n\geq 1}$. Nous en avons besoin dans un contexte plus général dans la preuve du corollaire 2.2.2, en particulier pour traiter le cas $X_+ = H^\infty$ qui ne vérifie ni la condition 3) ni la condition 4) du paragraphe 1.3. Pour cette raison, nous allons donner une preuve de ce résultat dans un cadre plus général dans l'annexe. Nous remarquons que notre preuve repose sur la même idée que celle du lemme 1.2 de [20].
2) Clairement, l'interpolation libre au sens des germes entraîne interpolation libre au sens faible.

2.2 Le cas concret $X_+ = H^p$

Nous allons démontrer le résultat suivant qui était conjecturé en 1988 par N. K. Nikolski et S. V. Khrushchëv (cf. [23]) :

Théorème 2.2.1 *Si $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$ et $1 < p \leq \infty$, alors*

$$RH^p = l^p\left(H^p/\vartheta_n H^p\right).$$

Remarque
1) En principe, la description de l'espace des données RX_+ est contenue dans le théorème 1.2 de [20]. Elle est valable si on arrive à démontrer que $\mathcal{X}' = (\vartheta_n' X_+^* r \cap \theta X_-^*)_{n\geq 1}$ est une l-base. Nous pourrons déduire de la preuve que dans le cas $X_+ = H^p$, $\mathcal{X}'$ est une l^q-base.
2) Ce théorème est connu pour $p = \infty$ (cf. [21]) et pour le cas hilbertien $p = 2$ (cf. théorème 1.2 de [20] et les remarques qui suivent). Pour le cas $p = 2$, $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, voir aussi le théorème d'interpolation (cf. [22], p.224 et [21]).
3) Un résultat très proche de ce théorème se trouve dans [34] pour le cas $0 < p \leq \infty$ et $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$. En effet, dans cet article, on démontre l'équivalence entre la condition (CG) et l'interpolation libre dans un espace de données plus grand. Ainsi ce résultat permet de montrer que toutes les suites dans $l^p(H^p/b_{\lambda_n}^{k_n} H^p)$ sont interpolables si $(b_{\lambda_n}^{k_n})_{n\geq 1} \in (CG)$.

Avant de justifier ce résultat, nous énonçons le

Corollaire 2.2.2 *Soit $1 < p \leq \infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$,
(2) $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens des germes,
(3) $RH^p = l^p\,(H^p/\vartheta_n H^p)$.

Preuve
$(1) \Longrightarrow (3)$: D'après le théorème 2.2.1.
$(3) \Longrightarrow (2)$: D'après le lemme 2.1.2.
$(2) \Longrightarrow (1)$: L'interpolation libre au sens des germes entraîne interpolation libre au sens faible, et, d'après le théorème 1.4.1, celle-ci est équivalente à $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. ■

Remarque
Ce corollaire mérite quelques commentaires.
Nous aurions effectivement pu nous contenter du théorème 2.2.1 qui nous donne une description des suites interpolables sous la condition (CG) — une condition nécessaire et suffisante pour avoir une interpolation libre raisonnable. Car il nous donne sous la condition (CG) :

$$(f_n)_{n\geq 1} \text{ interpolable} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} \|f_n\|^p_{H^p/\vartheta_n H^p} < \infty.$$

Mais maintenant, nous obtenons que la condition de Carleson généralisée est même nécessaire pour avoir cette caractérisation de l'espace des données. Et à l'aide du théorème 1.4.1 nous pouvons en déduire que l'interpolation libre au sens faible est équivalente à interpolation libre au sens des germes dans l'espace H^p.

Nous allons donner une **esquisse de la preuve**, qui ne se veut point rigoureuse.
Pour $p < \infty$, nous pouvons comparer R à l'opérateur R_p qui projette f sur la base $(\mathcal{E}_n^* K_\theta^p)_{n\geq 1}$ (on interprète $\mathcal{E}_n$ comme définie sur K_θ^q). Ceci est en effet possible grâce à $\mathcal{E}_n^* f - f \in \vartheta_n H^p$. Nous définirons ensuite un opérateur d'interpolation Q_p, qui permettra de démontrer la surjectivité de R. Nous allons démontrer la continuité de ces deux opérateurs au cas $2 \leq p < \infty$ (lemmes 2.2.5, 2.2.6), ce qui démontrera le théorème dans ce cas (à l'aide du lemme 2.2.4). Nous allons ensuite passer au dual pour obtenir les opérateurs $Q'_q = R_p^*$ et $R'_q = Q_p^*$. Un petit calcul montre que R'_q projette $f \in K_\theta^q$ sur $(\mathcal{E}_n K_\theta^q)_{n\geq 1}$ (toujours en interprétant $\mathcal{E}_n$ comme étant définie sur K_θ^q). Or, $\mathcal{E}_n f - f \in ker\,\mathcal{E}_n = K^q_{\vartheta'_n} \not\subset \vartheta_n H^q$. Et donc R'_q ne peut pas être identifié à l'opérateur de restriction généralisé R. Nous allons contourner ce problème à l'aide d'une isométrie sesqui-linéaire (lemme 2.2.7), qui nous permettra de passer de R'_q à R_q et de Q'_q à Q_q.

Nous allons maintenant préciser les détails de la preuve du théorème 2.2.1.
Dans l'esquisse de la preuve, nous pouvons observer l'interaction entre les bases duales $(\mathcal{E}_n K_\theta^q)_{n\geq 1}$ et $(\mathcal{E}_n^* K_\theta^p)_{n\geq 1}$ en supposant dans un premier temps $2 \leq p < \infty$. En effet, nous aurons besoin de ces deux bases sur toute l'échelle $1 < p < \infty$. Or le théorème est connu pour le cas particulier $p = \infty$ (voir la remarque 2), et il suffit donc de considérer le cas $1 < p < \infty$.
Mettons les idées en clair. Prenons encore comme dualité $< \cdot, \cdot >$. Cette dualité nous permet d'identifier $(H^p)^* \simeq H^q$ et à l'aide de l'identification (1.3) nous avons donc $(K_\theta^p)^* \simeq K_\theta^q$ pour une fonction intérieure θ. Nous choisissons en particulier $\theta = \prod_{n\geq 1} \vartheta_n$. D'après le théorème 1.4.1, comme $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$, $(K^p_{\vartheta_n})_{n\geq 1} = (\mathcal{E}_n K_\theta^p)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle et puisque

H^p, $1 < p < \infty$, est réflexif, $(\mathcal{E}_n^* K_\theta^p)_{n\geq 1}$ l'est aussi.
Soit $1 < p < \infty$. Pour bien distinguer les espaces sur lesquels opèrent les projections, nous allons écrire $\mathcal{E}_n^p$ pour $\mathcal{E}_n : K_\theta^p \longrightarrow K_\theta^p$. Nous considérons :

1) K_θ^p et sa base $(K_{\vartheta_n}^p)_{n\geq 1}$ avec les projections correspondantes $\mathcal{E}_n^p$, et

2) K_θ^p et sa base $(Y_n^p)_{n\geq 1} = ((\mathcal{E}_n^q)^* K_\theta^p)_{n\geq 1}$ avec les projections correspondantes $\mathcal{E}_n^{q*} = (\mathcal{E}_n^q)^*$.

Remarques
Soit $1 < p < \infty$.
1) Puisque $\mathcal{E}_n\mathcal{E}_k = \delta_{nk}\mathcal{E}_n$, nous avons pour les suites $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in K_{\vartheta_n}^p$, à support fini $\mathcal{E}_k^p(\sum_{n\geq 1} f_n) = f_k$, et pour $(g_n)_{n\geq 1}$, $g_n \in Y_n^p$, à support fini $\mathcal{E}_k^{q*}(\sum_{n\geq 1} g_n) = g_k$.
2) Sur l'ensemble $K_\theta^p \cap K_\theta^q$, qui est dense dans les espaces K_θ^p et K_θ^q, nous avons $\mathcal{E}_n^p = \mathcal{E}_n^q$ et $\mathcal{E}_n^{p*} = \mathcal{E}_n^{q*}$.
3) Comme K_θ^p possède un complémentaire topologique, nous pouvons prolonger $\mathcal{E}_n^p$ et $\mathcal{E}_n^{q*}$ par zéro sur θH^p : $\mathcal{E}_k^p(\sum_{n\geq 1} f_n + \theta f) = f_k$ et $\mathcal{E}_k^{q*}(\sum_{n\geq 1} g_n + \theta g) = g_k$, pour $f, g \in H^p$. Ceci nous permet maintenant d'introduire les opérateurs dont nous avons parlé dans l'esquisse de la preuve :

Définition 2.2.3 *Soit $SF_p = \{(f_n)_{n\geq 1} : f_n \in H^p$ et $f_n \equiv 0$ pour $n \geq N$ et $N \in \mathbb{N}\}$, $1 < p < \infty$. Nous définissons deux paires d'opérateurs. Premièrement :*

$$\begin{array}{rcl} SF_p & \longrightarrow & H^p \\ Q_p : (f_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{E}_n^{q*} f_n, \\ Q_p' : (f_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{E}_n^p f_n. \end{array}$$

Et deuxièmement :

$$\begin{array}{rcl} H^p & \longrightarrow & l^\infty(H^p) \\ R_p : f & \longmapsto & (\mathcal{E}_n^{q*} f)_{n\geq 1}, \\ R_p' : f & \longmapsto & (\mathcal{E}_n^p f)_{n\geq 1}. \end{array}$$

Remarque
Q_p est en effet un opérateur d'interpolation au sens de la définition 1.1.1, c'est-à-dire $Q_p(f_n)_{n\geq 1} - f_n \in \vartheta_n H^p$, $n \geq 1$ (ce qu'on vérifie immédiatement sur les suites à support fini). Pour $p = 2$, sa restriction à $\mathcal{X}' = (Y_n^2)_{n\geq 1}$ est justement l'opérateur $\mathcal{J}_{\mathcal{X}'}$ qui a été étudié dans [22] (voir aussi [20]).

Lemme 2.2.4 *Soit $1 < p < \infty$. Si les applications*

$$\begin{array}{rl} Q_p & : l^p(H^p) \longrightarrow H^p, \\ R_p & : H^p \longrightarrow l^p(H^p) \end{array}$$

sont continues, alors $RH^p = l^p(H^p)$.

Preuve
Commençons par $RH^p \subset l^p(H^p/\vartheta_n H^p)$. Vérifions pour $f \in H^p$

$$\mathcal{E}_n^{q*} f + \vartheta_n H^p = f + \vartheta_n H^p, \quad n \geq 1. \tag{2.1}$$

Ceci est équivalent à $\mathcal{E}_n^{q*} f - f \in \vartheta_n H^p$, $n \geq 1$. Nous pouvons supposer $f \in K_\theta^p$, car $\mathcal{E}_n^{q*}$ était prolongé par zéro sur θH^p. Or, d'après la proposition 1.3.3, $ker\, \mathcal{E}_n^{q*}|_{K_\theta^p} \subset \vartheta_n H^p$, d'où (2.1). Si nous définissons maintenant

$$\begin{aligned} \pi_p : l^p(H^p) &\longrightarrow l^p(H^p/\vartheta_n H^p) \\ (f_n)_{n\geq 1} &\longmapsto (f_n + \vartheta_n H^p), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$R = \pi_p R_p,$$

ce qui démontre la continuité de R.
Afin de démontrer la surjectivité de R, nous prenons une suite à support fini $(F_n)_{n\geq 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geq 1} \in l^p(H^p/\vartheta_n H^p)$ avec $(f_n)_{n\geq 1} \in l^p(H^p)$, et nous obtenons $(\mathcal{E}_n^{q*} f_n)_{n\geq 1} \in l^p(H^p)$, puisque $\sup_{n\geq 1} \|\mathcal{E}_n^{q*}\| < \infty$. Nous avons $f = Q_p(\mathcal{E}_n^{q*} f_n)_{n\geq 1} \in H^p$, car Q_p est continue. Et il nous reste à démontrer $\pi_p R_p f = Rf = (F_n)_{n\geq 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geq 1}$. Or $\pi_p R_p(f) = \pi_p R_p(\sum_{n\geq 1} \mathcal{E}_n^{q*} f_n) = (\mathcal{E}_n^{q*} f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geq 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geq 1}$ grâce à (2.1). □

Ceci nous ramène donc à démontrer la continuité de Q_p et de R_p. Nous abordons celle de Q_p, $2 \leq p < \infty$.

Lemme 2.2.5 *Soit $2 \leq p < \infty$ et $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. Alors $Q_p : l^p(H^p) \longrightarrow H^p$ est continu.*

Preuve
Soit

$$\begin{aligned} \pi_\theta : H^p &\longrightarrow H^p/\theta H^p \\ f &\longmapsto f + \theta H^p, \end{aligned}$$

la projection canonique de H^p sur $H^p/\theta H^p$ et appelons $T_p = \pi_\theta Q_p : l^p(H^p) \longrightarrow H^p/\theta H^p$, $1 < p < \infty$. D'après le théorème des bases de Riesz (cf. [22]), Q_2 est continu. Ainsi T_2 est continu et associe à $(f_n)_{n\geq 1}$ la classe F telle que pour $f \in F$ nous avons $f - f_n \in \vartheta_n H^2$ (voir aussi la remarque après la définition 2.2.3).
D'après [21] nous avons

$$(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (f_n)_{n\geq 1} \in l^\infty(H^\infty) \text{ il existe } f \in H^\infty \\ \text{telle que } f - f_n \in \vartheta_n H^\infty \text{ pour tout } n \geq 1. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Donc $T_\infty : l^\infty(H^\infty) \longrightarrow H^\infty/\theta H^\infty$ est un opérateur qui à $(f_n)_{n\geq 1} \in l^\infty(H^\infty)$ associe la classe F telle que pour $f \in F$ nous avons $f - f_n \in \vartheta_n H^\infty$. D'après le résultat cité [21], T_∞ est continu. Nous vérifions que si nous prenons $(f_n)_{n\geq 1} \in l^p(H^\infty)$ (dense dans $l^p(H^p)$), nous avons pour $f \in T_\infty(f_n)_{n\geq 1}$ et $g \in T_p(f_n)_{n\geq 1}$ le résultat $f - g \in \theta H^1$, ce qui nous permet d'identifier les opérateurs T_∞ et T_p et ainsi d'appliquer les résultats de l'interpolation entre les espaces de Banach à T_p. Nous définissons

$$\begin{aligned} \tilde{P}_- : L^p/H^p &\longrightarrow L^p, \quad 1 < p < \infty, \\ L^\infty/H^\infty &\longrightarrow BMO, \\ f + H^p &\longmapsto P_- f, \quad 1 < p \leq \infty. \end{aligned}$$

Ici, BMO est l'espace des fonctions à oscillation moyenne bornée (cf. par exemple [8]). L'opérateur $\tilde{P}_-$ ainsi que la multiplication $\overline{\theta} : f + \theta H^p \longmapsto \overline{\theta} f + H^p$, $H^p/\theta H^p \longrightarrow L^p/H^p$ sont continus. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{P}_- \overline{\theta} T_\infty &: l^\infty(H^\infty) \longrightarrow BMO \\ \tilde{P}_- \overline{\theta} T_2 &: l^2(H^2) \longrightarrow L^2. \end{aligned}$$

Appliquons à cet opérateur l'interpolation entre les espaces de Banach (cf. [15], [9] et [18]) pour obtenir $\tilde{P}_- \overline{\theta} T_p : l^p(H^p) \longrightarrow L^p$, $1 < p < \infty$ et multiplions par θ pour obtenir la continuité de

$$\theta \tilde{P}_- \overline{\theta} T_p : l^p(H^p) \longrightarrow L^p, \quad 1 < p < \infty.$$

Or $T_p = \pi_\theta Q_p$, et pour une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ à support fini nous avons maintenant $f = Q_p(f_n)_{n\geq 1} \in K_\theta^p$, ce qui permet de montrer $\theta \tilde{P}_- \overline{\theta} \pi_\theta f = \theta \tilde{P}_- \overline{\theta}(f + \theta H^p) = \theta P_- \overline{\theta} f = P_\theta f = f$, c'est-à-dire sur les suites à support fini, nous avons $\theta \tilde{P}_- \overline{\theta} T_p = \theta \tilde{P}_- \overline{\theta} \pi_\theta Q_p = Q_p$. La continuité de $\theta \tilde{P}_- \overline{\theta} T_p$ montre alors celle de Q_p. □

Lemme 2.2.6 *Soit $2 \leq p < \infty$ et $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. Alors $R_p : H^p \longrightarrow l^p(H^p)$ est continu.*

Preuve
Nous rappelons que $R_p f = (\mathcal{E}_n^{q*} f)_{n\geq 1}$. Comme $\mathcal{E}_n^{q*} f + \vartheta_n H^p = f + \vartheta_n H^p$, on voit allègrement $\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p} \leq \|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p}$, $n \geq 1$. Mais nous nous intéressons plutôt à l'estimation inverse. Nous avons à démontrer $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} \leq c\|f + \vartheta_n g\|_{H^p}$ pour toute fonction $g \in H^p$. Puisque nous avons prolongé $\mathcal{E}_n^{q*}$ sur θH^p par zéro, nous avons $\vartheta_n g \in \vartheta_n H^p = \vartheta_n H^p \cap \theta H_-^p + \theta H^p = ker\, \mathcal{E}_n^{q*}$, ce qui entraîne $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} = \|\mathcal{E}_n^{q*}(f + \vartheta_n g)\|_{H^p} \leq c\|f + \vartheta_n g\|_{H^p}$ ($c = \sup_{n\geq 1} \|\mathcal{E}_n^{q*}\|$), d'où la majoration $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} \leq c\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p}$. Ainsi, afin de démontrer la continuité de R_p, il suffit (et il est nécessaire) de démontrer $\sum_{n\geq 1} \|f\|^p_{H^p/\vartheta_n H^p} < \infty$ pour $f \in H^p$. Par ailleurs nous avons (cf. formule (1.2)) $\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p} \leq \|P_{\vartheta_n} f\|_{H^p} = \|P_- \overline{\vartheta}_n f\|_{L^p}$, ce qui réduit le problème à démontrer la continuité de

$$\begin{aligned} A : H^p &\longrightarrow l^p(L^p), \\ f &\longmapsto (P_- \overline{\vartheta}_n f)_{n\geq 1}, \end{aligned}$$

pour $2 \leq p < \infty$. Nous étudions

$$\begin{aligned} A : H^\infty &\longrightarrow l^\infty(BMO), \\ H^2 &\longrightarrow l^2(L^2). \end{aligned}$$

En effet, la continuité au cas $p = \infty$ est une conséquence immédiate de celle de $P_- : L^\infty \longrightarrow BMO$ et au cas $p = 2$ elle se déduit du théorème des bases de Riesz [22] : en effet l'application $(f_n)_{n\geq 1} \longmapsto (\vartheta_n f_n)_{n\geq 1}$ est une isométrie sur $l^p(L^p)$ et donc la continuité de A est équivalente à celle de $f \longmapsto (P_{\vartheta_n} f)_{n\geq 1}$, $H^2 \longrightarrow l^2(H^2)$. Comme $ker\, P_{\vartheta_n} = \vartheta_n H^2 \supset \theta H^2$, il suffit de démontrer la continuité de ce dernier opérateur sur K_θ^2. Celle-ci est maintenant — grâce à $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$ — une conséquence du théorème des bases de Riesz. A nouveau nous appliquons l'interpolation entre les espaces de Banach pour obtenir la continuité de $A : H^p \longrightarrow l^p(L^p)$. □

Il nous reste le cas $1 < p < 2$ à étudier. Pour l'instant nous nous sommes servis de la continuité de Q_p et R_p, $2 \leq p < \infty$, pour démontrer $RH^p = l^p(H^p/\vartheta_n H^p)$. Nous pouvons en déduire la continuité des opérateurs adjoints $R'_q = Q_p^*$ et $Q'_q = R_p^*$. En effet ces deux égalités se vérifient directement à partir de la définition des opérateurs en question et le choix de la dualité $< \cdot, \cdot >$ sur les suites $(f_n)_{n\geq 1}$ à support fini (cette dualité était beaucoup exploitée dans [20]). Comme nous avons déjà remarqué dans l'esquisse de la preuve, l'opérateur Q'_q ne peut pas être comparé directement à $R : H^q \longrightarrow l^q(H^q/\vartheta_n H^q)$, car $\pi_q Q'_q(f) = (\mathcal{E}_n^q f + \vartheta_n H^q)_{n\geq 1} \neq (f + \vartheta_n H^q)_{n\geq 1}$. Afin de contourner ce problème, nous introduisons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : L^p &\longrightarrow L^p, \\ f &\longmapsto \theta \bar{z} \bar{f}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui nous permettra de passer de Q'_q à R_q et de R'_q à Q_q. Nous rappelons la définition $Y_n^p = \mathcal{E}_n^{q*} K_\theta^p = \vartheta'_n H^p \cap \theta H_-^p$.

Lemme 2.2.7 *Soit $\mathcal{J}$ comme dans (2.3) et $1 < p < \infty$. Alors*

$$\mathcal{J} : K_\theta^p \longrightarrow K_\theta^p$$

est une involution isométrique sesqui-linéaire, $\mathcal{J} Y_n^p = K_{\vartheta_n}^p$, $\mathcal{J} K_{\vartheta_n}^p = Y_n^p$ et donc

$$\mathcal{E}_n^p = \mathcal{J} \mathcal{E}_n^{q*} \mathcal{J}, \qquad \mathcal{E}_n^{q*} = \mathcal{J} \mathcal{E}_n^p \mathcal{J}.$$

Preuve
A partir de la définition de $\mathcal{J}$ et celle de K_θ^p, $K_{\vartheta_n}^p$ et Y_n^p, on vérifie directement les inclusions $\mathcal{J} K_\theta^p \subset K_\theta^p$ et $\mathcal{J} Y_n^p \subset K_{\vartheta_n}^p$. Puisque $\mathcal{J}$ est une involution, $\mathcal{J}^2 = I$ (calcul direct), les inclusions sont en effet des égalités. □

Les lemmes 2.2.5,2.2.6 et 2.2.7 permettent d'énoncer le

Corollaire 2.2.8 *Soit $1 < q < 2$ et $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. Alors*

$$\begin{aligned} R_q &: H^q \longrightarrow l^q(H^q), \\ Q_q &: l^q(H^q) \longrightarrow H^q. \end{aligned}$$

Preuve
Nous avons déjà remarqué la continuité de $Q'_q = R_p^*$ et $R'_q = Q_p^*$. Sur les suites $(f_n)_{n\geq 1}$ à support fini, nous vérifions à l'aide du lemme 2.2.7 l'égalité $Q_q = \mathcal{J} Q'_q \mathcal{J}$. Et pour $f \in H^q$ nous vérifions $R_q = \mathcal{J} R'_q \mathcal{J}$. Puisque $\mathcal{J}$ est une isométrie, les opérateurs R_q et Q_q sont alors continus. ■
Ainsi nous obtenons

Corollaire 2.2.9 *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $(\vartheta_n)_{n\geq 1} \in (CG)$*. Alors*

$$\begin{aligned} R_p \quad &: H^p \longrightarrow l^p(H^p), \\ Q_p \quad &: l^p(H^p) \longrightarrow H^p. \end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 2.2.1

Le lemme 2.2.4, le corollaire précédent et la remarque sur l'interpolation dans H^∞ montrent le théorème. ■

Chapter 3

Caractérisation des traces $H^p|_\Lambda$, $1 < p \leq \infty$

Soit $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$ vérifiant la condition de Blaschke $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < \infty$ et $B = \prod_{n\geq 1} b_{\lambda_n}$ le produit de Blaschke associé.
Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite de produits de Blaschke, telle que $B = \prod_{n\geq 1} B_n$. Il est clair que l'application

$$\Phi : f|_\Lambda \longmapsto (f + B_n H^p)_{n\geq 1}, \quad f \in H^p$$

est bien définie et bijective de $H^p|_\Lambda$ sur RH^p. Nous allons poser $\sigma_n = \{z \in \mathbb{D} : B_n(z) = 0\}$. Si la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ vérifie maintenant la condition (CG), alors $H^p|_\Lambda$ s'identifie au sens naturel à l'espace $l^p(H^p/B_nH^p)$ (cf. aussi théorème 2.2.1) et on obtient la caractérisation générale

$$(a_n)_{n\geq 1} \in H^p|_\Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1) \text{ Il existe } (f_n)_{n\geq 1} \text{ telle que } f_n|_{\sigma_n} = a|_{\sigma_n}, \\ 2) \ \sum_{n\geq 1} \|f_n\|^p_{H^p/B_nH^p} < \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous nous intéressons à une description plus concrète, et nous pouvons espérer en trouver une si les espaces H^p/B_nH^p sont de dimension uniformément bornée, ce qui est équivalent à dire que le degré des produits de Blaschke B_n est uniformément borné (ici nous désignons par $deg\, B$ le nombre de zéros du produit de Blaschke B en comptant les multiplicités). Nous cherchons donc une condition pour Λ pour que le produit de Blaschke associé B se décompose en des facteurs B_n vérifiant $(B_n)_{n\geq 1} \in (CG)$ et $\sup_{n\geq 1} deg\, B_n < \infty$. Il se trouve que c'est juste le cas si Λ est une réunion finie de suites de Carleson. En utilisant alors l'identification de $H^p|_\Lambda$ à $RH^p = l^p(H^p/B_nH^p)$ et une description locale des espaces H^p/B_nH^p en fonction des différences divisées par rapport à la métrique pseudohyperbolique (voir paragraphe 3.2), on obtiendra une caractérisation de $H^p|_\Lambda$.

3.1 Les réunions finies de suites de Carleson

Dans ce paragraphe, nous allons caractériser les réunions finies de suites de Carleson. La proposition 3.1.1 est une conséquence des théorèmes 5.5 et 5.6 de [29]. Ici nous allons donner une nouvelle démonstration de l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2), qui utilise un résultat de N. K. Nikolski et A. L. Volberg [24] et la partie géométrique de la démonstration du théorème 5.5 de V. I.

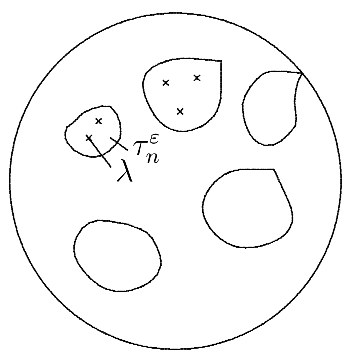
Vasyunin. Dans cette démonstration, on raisonne à l'aide des distances hyperboliques ρ qui sont définies par $th\frac{\rho(\lambda,\mu)}{2} = |b_\lambda(\mu)|$. Mais si on remplace partout la métrique hyperbolique par la métrique pseudohyperbolique, on ne change pas la géométrie et le raisonnement reste le même.

Proposition 3.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. *Alors* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$ *avec* $\Lambda_i \in (C)$ *pour* $1 \leq i \leq N$.
2) Il existe une suite de produits de Blaschke $(B_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathbb{D}$, *telle que* $\sup_{n\geq 1} \deg B_n \leq N$, $(B_n)_{n\geq 1} \in (CG)$ *et* $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$, $\sigma_n = \{\lambda \in \mathbb{D} : B_n(\lambda) = 0\}$.

Preuve
L'implication 2) $\Longrightarrow$ 1) est une conséquence immédiate du théorème 5.6 de [29]. Mais notre formulation de la proposition permet de réduire le raisonnement qui était utilisé dans cet article à l'observation simple suivante : si on pose $\Lambda_l = \{\lambda_{n,l}\}_{n\geq 1, l\leq|\sigma_n|}$, alors on obient $\Lambda = \bigcup_{l=1}^N \Lambda_l$. Nous vérifions la condition de Carleson pour Λ_l: soit $\mu \in \Lambda_l$ et $n \geq 1$ tel que $\mu \in \sigma_n$. Alors

$$\prod_{\substack{\lambda\in\Lambda_l \\ \lambda\neq\mu}} |b_\lambda(\mu)| \geq \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\sigma_n} |b_\lambda(\mu)| = \prod_{k\neq n} |B_k(\mu)| \geq \delta.$$

La dernière minoration était une conséquence de la condition (CG) (que nous avons utilisée dans sa deuxième forme ; cf. (1.5)).
Pour l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2), nous posons $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Nous considérons la décomposition en composantes connexes $(\tau_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ de l'ensemble $L(B,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : |B(z)| < \varepsilon\}$:



Dessin 1 : La décomposition de Λ

D'après les théorèmes 2.1 et A de [24], nous obtenons directement $\{B_n^\varepsilon\}_{n\geq 1} \in (CG)$ où $B_n^\varepsilon = \prod_{\lambda\in\sigma_n^\varepsilon} b_\lambda$ et $\sigma_n^\varepsilon = \Lambda \cap \tau_n^\varepsilon$. Il reste à démontrer qu'il existe $0 < \varepsilon_0 < 1$, tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ nous avons $\sup_{n\geq 1} |\sigma_n^\varepsilon| \leq N$. Pour ceci il suffit de remarquer que pour tout $\rho > 0$ il existe $\varepsilon = \varepsilon(\rho) = (\rho\delta/2)^N$, où δ est la plus petite des constantes de Carleson associées aux suites Λ_l, $l = 1, \ldots, N$, tel que

$$L(B,\varepsilon) \subset M^\rho = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega(\lambda,\rho), \tag{3.2}$$

où $\Omega(\lambda,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : |b_\lambda(z)| < \rho\}$ est le disque pseudohyperbolique. Car si on choisit maintenant ρ suffisamment petit, l'ensemble M^ρ se décompose en des composantes connexes qui

contiennent maintenant au plus N éléments d'après la partie géométrique de la démonstration du théorème 5.5 de V. I. Vasyunin (cf. [29]), et la proposition sera démontrée.
Nous démontrons donc (3.2). Dans ce but, nous vérifions

$$L(B,\varepsilon) \subset \bigcup_{l=1}^{N} L(B_{(l)}, \varepsilon^{1/N}),$$

où $B_{(l)} = \prod_{\lambda\in\Lambda_l} b_\lambda$, et

$$L(B_{(l)}, \varepsilon^{1/N}) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda_l} \Omega\,(\lambda, \underbrace{2\frac{\varepsilon^{1/N}}{\delta}}_{\rho}).$$

Soit alors $z \in L(B,\varepsilon)$, et donc $\varepsilon > |B(z)| = \prod_{l=1}^{N} |B_{(l)}(z)|$. On en déduit l'existence d'un indice $l_0 \in \{1,\dots,N\}$ tel que $|B_{(l_0)}(z)| < \varepsilon^{1/N}$ d'où la première inclusion.
Soit donc $z \in L(B_{(l)}, \varepsilon^{1/N})$, alors $|B_{(l)}(z)| < \varepsilon^{1/N}$. Puisque $\Lambda_l \in (C)$, il existe δ_l tel que $|B_{(l)}(z)| \geq \delta_l \inf_{\lambda\in\Lambda_l} |b_\lambda(z)|$, d'où $\inf_{\lambda\in\Lambda_l} |b_\lambda(z)| < \varepsilon^{1/N}/\delta_l < \varepsilon^{1/N}/\delta$. En particulier il existe $\lambda_0 \in \Lambda_l$ tel que $|b_{\lambda_0}(z)| < 2\varepsilon^{1/N}/\delta$, ce qui est équivalent à $z \in \Omega\,(\lambda_0, 2\varepsilon^{1/N}/\delta)$, d'où la deuxième inclusion. ∎

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate, qui nous permet de décrire les traces $H^p|_\Lambda$ pour $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$ à partir de l'espace des données.

Corollaire 3.1.2 *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$, $\Lambda \in \mathbb{D}$. *Alors il existe* $(B_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $\sup_{n\geq 1} \deg B_n \leq N$ *et*

$$\Phi : H^p|_\Lambda \longrightarrow l^p\,(H^p/B_nH^p)$$

est une isomorphie.

∎

Remarque
Nous retenons le fait que dans la proposition 3.1.1, pour tout $0 < \eta < 1$, on puisse trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour $n \geq 1$ et $\lambda, \mu \in \sigma_n^\varepsilon$

$$|b_\lambda(\mu)| \leq \eta. \tag{3.3}$$

(En effet, il suffit de choisir $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tel que $2N\rho < \eta$).
Nous allons travailler en particulier avec $\eta = 1/3$.

3.2 Caractérisation locale de la norme $\|\cdot\|_{H^p/BH^p}$ pour $deg\, B < \infty$

Soit $1 < p \leq \infty$. Comme $N = \dim H^p/BH^p = deg\, B < \infty$, la projection P_B sera continue. Nous donnons une estimation de sa norme. Pour $p = \infty$, il est connu (d'après A. A.

Pekarskii [25]) que $\|P_B\|_{H^\infty \longrightarrow H^\infty} \le 2N$. Dans le cas hilbertien $p = 2$, on a $\|P_B\|_{H^2 \longrightarrow H^2} = 1$. L'interpolation réelle (cf. [2], [15]) fournit alors $\|P_B\|_{H^p \longrightarrow H^p} \le 2N$ pour $2 \le p \le \infty$ et par dualité on obtient $\|P_B\|_{H^q \longrightarrow H^q} \le 2N$ pour $1 < q \le 2$. A l'aide de (1.2), nous obtenons

$$\|f\|_{H^p/BH^p} \le \|P_B f\|_{H^p} \le 2N \|f\|_{H^p/BH^p}.$$

Tout ceci nous ramène alors à la discussion de $P_B f$. Nous allons donc donner une forme explicite de P_B qui nous permettra de caractériser $\|P_B f\|_{H^p}$ en fonction des différences divisées par rapport à la métrique pseudohyperbolique. Nous commençons par la définition de ces différences divisées (cf. [30]) :

Définition 3.2.1 *Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k \ge 1} \subset \mathbb{D}$ et f une fonction définie sur σ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $\lambda^{(k)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_i \in \sigma, i \ge 1$, et $\lambda^{(k+1)} = (\lambda^{(k)}, \lambda_{k+1})$. Alors on définit*

$$\begin{aligned} \triangle^0 f(\lambda^{(1)}) &= f(\lambda_1), \\ \triangle^1 f(\lambda^{(2)}) &= \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}, \end{aligned}$$

et

$$\triangle^k f(\lambda^{(k+1)}) = \frac{\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \lambda_{k+1}) - \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \lambda_k)}{b_{\lambda_k}(\lambda_{k+1})}.$$

Et nous obtenons le

Théorème 3.2.2 *Soit B un produit de Blaschke de degré $\deg B = N < \infty$ tel que $|b_\lambda(\mu)| < 1/3$ pour $\lambda, \mu \in \sigma = \{z \in \mathbb{D} : B(z) = 0\}$ et $1 < p \le \infty$. Alors il existe deux constantes c_0, c_1 telles que pour toute fonction $f \in H^p$ on a*

$$c_0 \left(\sum_{k=1}^{N} (1 - |\lambda_k^2|) | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{H^p/BH^p} \le c_1 \left(\sum_{k=1}^{N} (1 - |\lambda_k^2|) | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les constantes c_0, c_1 ne dépendent que de N et p. Pour $p = \infty$ on modifie la l^p-norme de façon standard ($\sup_{k=1,\dots,N} | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|$).

Remarque
Pour des raisons techniques, nous allons démontrer l'équivalence entre $\|f\|_{H^p/BH^p}$ et $\sum_{k=1}^N (1 - |\lambda_k^2|)^{\frac{1}{p}} | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|$, $f \in H^p$, ce qui est possible grâce à l'équivalence de toutes les normes dans un espace de dimension finie.

Pour démontrer le théorème, nous allons construire un système biorthogonal $(\{\varphi_i\}_{i=1}^N, \{\psi_i\}_{i=1}^N)$, qui vérifie

$$\begin{aligned} (a) \quad & P_B f = \sum_{i=1}^{N} < f, \varphi_i > \psi_i, \quad f \in H^p, \\ (b) \quad & \triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)}) = < f, \varphi_i >, \quad f \in H^p, \end{aligned}$$

et si on a de plus $|b_\lambda(\mu)| \le 1/3$ pour $\lambda, \mu \in \sigma$, alors pour $1 < p \le \infty$

$$
\begin{array}{ll}
(c) & \|\psi_i\|_{H^p} \leq c\,(1-|\lambda_i^2|)^{1/p}, \\
(d) & \|\varphi_i\|_{H^p} \leq c\,(1-|\lambda_i^2|)^{-1/q}.
\end{array}
$$

Ce système se déduit des fonctions de Malmquist qui sont données par

$$
\begin{aligned}
\alpha_i(z) &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}_i z}\prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}(z), \quad z \in \mathbb{D}, \\
\beta_i(z) &= \frac{1-|\lambda_i^2|}{1-\overline{\lambda}_i z}\prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}(z), \quad z \in \mathbb{D},
\end{aligned}
$$

où $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ sont les zéros de B: $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{D} : B(\lambda) = 0\} = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Il est connu (cf. [22], Malmquist-Walsh-Lemma), que le système $(\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \{\beta_i\}_{i=1}^N)$ est biorthogonal (par rapport à $< \cdot, \cdot >$) et que $K_B^q = span\,(\alpha_i : i = 1, \ldots, N) = span\,(\beta_i : i = 1, \ldots, N) = K_B^p$. Nous allons poser

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= \begin{cases} \alpha_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}, & i = 2, \ldots, N, \\ \alpha_1, & i = 1, \end{cases} \\
\psi_k &= \sum_{j=k}^{N}\left(\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l|\right)\beta_j.
\end{aligned}
$$

Le lemme suivant, dont on trouvera la preuve dans l'annexe, montre que le système $(\{\varphi_i\}_{i=1}^N, \{\psi_i\}_{i=1}^N)$ est biorthogonal.

Lemme 3.2.3

$$
< \varphi_i, \psi_k >= \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \ldots, N.
$$

Nous montrons la propriété (a) :

Lemme 3.2.4

$$
P_B f = \sum_{i=1}^{N} < f, \varphi_i > \psi_i, \quad f \in H^p.
$$

Preuve

Soit $Pf = \sum_{i=1}^N < f, \varphi_i > \psi_i$, $f \in H^p$. Puisque $span\,(\psi_k : k = 1, \ldots, N) = span\,(\alpha_k : k = 1, \ldots, N) = K_B^p$ et $< \psi_k, \varphi_i >= \delta_{k,i}$, nous avons $im\,P = K_B^p = im\,P_B$. Or $BH^p \subset ker\,P$, ce qui nous permet de déduire $BH^p = ker\,P$. En effet, $f = P_B f + Bg = Pf + h$ et ainsi $P_B f - Pf = h - Bg$. Or le membre de gauche appartient à $K_B^p = im\,P$ et le membre de droite à $ker\,P$. Puisque P est une projection, grâce à la biothogonalité de $(\{\varphi_i\}_{i=1}^N, \{\psi_i\}_{i=1}^N)$, nous avons $im\,P \cap ker\,P = \{0\}$, d'où $h = Bg \in BH^p$. Par conséquent P a le même noyau et la même image comme P_B ce qui entraîne $P = P_B$. □

Nous démontrons dans l'annexe le :

Lemme 3.2.5 *Soit $f \in H^p$. Alors*

$$\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)}) =< f, \varphi_i >, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Afin de vérifier les autres propriétés, nous avons besoin du résultat suivant :

$$|b_\lambda(\mu)| \leq \frac{1}{3} \quad \text{implique} \quad \frac{2}{3} \leq \frac{1 - |\lambda^2|}{|1 - \overline{\lambda}\mu|} \leq \frac{4}{3}. \tag{3.4}$$

En effet, ceci est une conséquence de l'égalité évidente

$$|1 - |\lambda| b_\lambda(\mu)| = \frac{1 - |\lambda^2|}{|1 - \overline{\lambda}\mu|}.$$

En plus, nous avons besoin d'une estimation de la norme du noyau reproduisant $k_\lambda = 1/(1 - \overline{\lambda} z)$. Nous allons donner une démonstration du résultat suivant utilisant la dualité dans l'annexe.

Lemme 3.2.6 *Soit $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors*

$$(1 - |\lambda^2|)^{-1/q} \leq \|k_\lambda\|_{H^p} \leq \|P_+\| (1 - |\lambda^2|)^{-1/q}.$$

Si $p = \infty$, nous avons trivialement $\|k_\lambda\|_{H^\infty} = 1/(1 - |\lambda|)$.

Posons $c_p = \|P_+\|_{L^p \longrightarrow L^p}$, $1 < p < \infty$ et $c_\infty = 1$. Maintenant on peut majorer premièrement :

$$\begin{aligned} \|\psi_i\|_{H^p} &\leq \sum_{j=i}^{N} \|\beta_j\|_{H^p} = \sum_{j=i}^{N} (1 - |\lambda_j^2|) \|k_{\lambda_j}\|_{H^p} \leq c_p \sum_{j=i}^{N} (1 - |\lambda_j^2|)^{1/p} && (3.5) \\ &\leq 2^{1/p} c_p N (1 - |\lambda_i^2|)^{1/p} \leq 2 c_p N (1 - |\lambda_i^2|)^{1/p}, && (3.6) \end{aligned}$$

et deuxièmement ($i \geq 2$) :

$$\|\varphi_i\|_{H^p} \leq \|\alpha_i\|_{H^p} + \|\alpha_{i-1}\|_{H^p} = \|k_{\lambda_i}\|_{H^p} + \|k_{\lambda_{i-1}}\|_{H^p} \leq 3 c_p (1 - |\lambda_i^2|)^{-1/q} \tag{3.7}$$

(au cas $i = 1$, le terme avec α_{i-1} disparaît), ce qui démontre (c) et (d).

Preuve du théorème 3.2.2
On distingue les deux cas $1 < p < \infty$ et $p = \infty$.
Soit $1 < p < \infty$:

$$| < f, \varphi_i > | (1 - |\lambda_i^2|)^{1/p} \leq \|P_B f\|_{H^p} \|\varphi_i\|_{H^q} (1 - |\lambda_i^2|)^{1/p} \leq 3 c_q \|P_B f\|_{H^p}$$

Soit $p = \infty$: d'après A. A. Pekarskii, on a $| < g, \alpha_i > | = |P_+(\prod_{k=1}^{i-1} \overline{b_{\lambda_k}} g)(\lambda_i)| \leq 2N \|g\|_{H^\infty}$. Et donc (pour $i \geq 2$)

$$| < f, \varphi_i > | \leq (| < P_B f, \alpha_i > | + | < P_B f, \alpha_{i-1} > |) \leq 4N \|P_B f\|_{H^\infty}.$$

(Au cas $i = 1$, le terme avec α_{i-1} disparaît). On obtient dans les deux cas

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p/BH^p} &\leq \|P_B f\|_{H^p} \leq 2 c_p N \sum_{i=1}^{N} | < f, \varphi_i > | (1 - |\lambda_i^2|)^{1/p} \leq C \cdot N \cdot \|P_B f\|_{H^p} \\ &\leq 2 C N^2 \|f\|_{H^p/BH^p}. \end{aligned}$$

$(C = 2c_p N \max(3c_q, 4N))$. Si on remplace $< f, \varphi_i >$ par $\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)})$ d'après la propriété (b), on obtient le théorème. ■

Si $|b_\lambda(\mu)| \leq 1/3$, $\lambda, \mu \in \sigma$, nous pouvons choisir à l'aide de (3.4) un poids uniforme $1 - |\lambda_0^2|$, $\lambda_0 \in \sigma$, c'est-à-dire il existe deux constantes c_0, c_1 dépendant seulement de N et de p, telles que pour toute fonction $f \in H^p$ on a

$$c_0\,(1 - |\lambda_0^2|)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{H^p/BH^p} \leq c_1\,(1 - |\lambda_0^2|)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} | \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.8}$$

Pour $p = \infty$ on modifie la l^p-norme de façon standard (cf. aussi théorème 3.2.2).

3.3 La caractérisation de $H^p|_\Lambda$

Le corollaire 3.1.2, la remarque qui suit ce même corollaire, ainsi que la caractérisation (3.8) entraînent immédiatement le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i \subset \mathbb{D}$, $\Lambda_i \in (C)$, $1 < p \leq \infty$. *Il existe alors une décomposition* $\Lambda = \bigcup_{i\geq 1} \sigma_i$ *telle que* $\sup_{i\geq 1} |\sigma_i| \leq N$, *et si on choisit une fois pour toute* $\lambda_{i,0} \in \sigma_i$, $i \geq 1$, *alors*

$$H^p|_\Lambda = X^p = \{(a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in \mathbb{C}^\Lambda : \|a\|_{X^p} < \infty\}$$

où

$$\begin{aligned} \|a\|_{X^p} &= \left\{ \sum_{n\geq 1} (1 - |\lambda_{n,0}^2|) \left(\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} | \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})| \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty, \\ \|a\|_{X^\infty} &= \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} | \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})|, \end{aligned}$$

où $\sigma_n = \{\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,|\sigma_n|}\}$ *et* $\lambda_n^{(k)} = (\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,k})$.

■

Remarque
1) Comme $sup_{n\geq 1} |\sigma_n| < \infty$, la norme $\|a\|_{X^\infty}$ est équivalente à

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{k=1,\ldots,|\sigma_n|} | \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})|.$$

2) Le cas $N = 1$ a été étudié dans [28]. Pour $p = \infty$, c'est bien sûr le résultat de L. Carleson [5].

Nous allons maintenant donner une description de $H^p|_\Lambda$ qui ne dépend pas de la construction implicite de $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$. Dans ce but, il nous faut une relation entre la norme quotient $\|\cdot\|_{H^p/BH^p}$ et les normes quotients $\|\cdot\|_{H^p/B_iH^p}$ des facteurs B_i, où $B = \prod_{i=1}^n B_i$ (sous certaines conditions sur les zéros). Dans ce qui suit, nous allons poser $B_E = \prod_{\lambda\in E} b_\lambda$ pour un ensemble discret E dans $\mathbb{D}$ vérifiant la condition de Blaschke $\sum_{\lambda\in E}(1 - |\lambda|) < \infty$.

Proposition 3.3.2 *Nous supposons $1 < p < \infty$. Soit $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$ une réunion disjointe d'ensembles discrets dans $\mathbb{D}$, telle que $(B_{\sigma_k})_{k=1}^{n} \in (CG)$. Soit $\mathcal{E}_k^q : K_{B_\sigma}^q \longrightarrow K_{B_\sigma}^q$ la projection spectrale associée à $K_{B_{\sigma_k}}^q$, $k = 1, \ldots, n$, (cf. chapitre 1). Alors*

$$\|f\|_{H^p/BH^p} \leq \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_{H^p/B_{\sigma_k}H^p}.$$

Remarque
La proposition est en particulier valable si les ensembles σ_k sont finis.

Preuve
La condition (CG) assure la continuité de l'opérateur Q_p, qui était défini dans la définition 2.2.3. Pour $g = Q_p(P_{B_k} f)_{k\geq 1}$, d'après la remarque après cette définition, nous pouvons observer $f - g \in B_{\sigma_k}H^p$, $k = 1, \ldots, n$ et donc $f - g \in BH^p$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^p/BH^p} &= \|g\|_{H^p/BH^p} \leq \|P_B g\|_{H^p} = \|Q_p(P_{B_{\sigma_l}} f)_{l\geq 1}\|_{H^p} \leq \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \sum_{k=1}^{n} \|P_{B_{\sigma_k}} f\|_{H^p} \\
&\leq \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_{H^p/B_{\sigma_k}kH^p},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_k^{q*}$ est l'adjointe de la projection spectrale $\mathcal{E}_k^q$. ∎

Nous définissons

$$\begin{aligned}
\alpha : \Lambda &\longrightarrow \mathbb{N} \\
\lambda &\longmapsto |\Lambda \cap \Omega\,(\lambda, \rho_0/8)|,
\end{aligned}$$

avec $\rho_0 = \min_{i=1,\ldots,N} \inf_{\lambda,\mu\in\Lambda_i,\lambda\neq\mu} |b_\lambda(\mu)|$, $\Omega(\lambda, \rho)$ le disque pseudohyperbolique, et la forme indépendante est maintenant donnée par le

Corollaire 3.3.3 *Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$. Alors*

$$H^p|_\Lambda = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : \|\!|a|\!\|_p < \infty\},$$

avec

$$\begin{aligned}
\|\!|a|\!\|_p &= \left\{ \sum_{\mu\in\Lambda} (1 - |\mu^2|) \left(\sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\, \triangle^{k-1}\, a(\mu^{(k)})| \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty, \\
\|\!|a|\!\|_\infty &= \sup_{\mu\in\Lambda} \sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\, \triangle^{k-1}\, a(\mu^{(k)})|, \quad p = \infty,
\end{aligned}$$

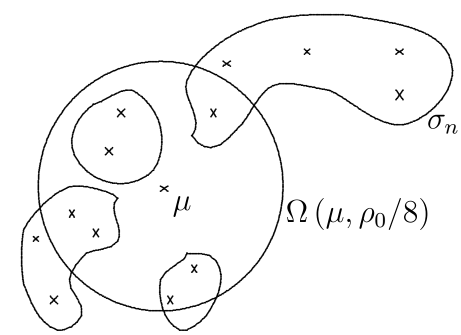
où $\mu^{(i)} = (\mu_1, \ldots, \mu_i)$ et $\{\mu_k\}_{k=1}^{\alpha(\mu)} = \Lambda \cap \Omega\,(\mu, \rho_0/8)$.

Preuve
Nous reprenons les notations de la section 3.1. En particulier, soit $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ la décomposition

étudiée dans la preuve de la proposition 3.1.1 (obtenue à partir de la décomposition en composantes connexes de l'ensemble $L(B, \varepsilon)$, $B = B_\Lambda$). D'après le théorème 3.3.1 nous avons

$$a \in H^p|_\Lambda \Longleftrightarrow \|a\|_{X^p} = \left\{ \sum_{n \geq 1} (1 - |\lambda_{n,0}^2|) \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} | \bigtriangleup^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Comme $diam\, \sigma_i < \rho_0/8$ (en choisissant ρ assez petit dans la démonstration de la proposition 3.1.1), chaque σ_i va être contenu dans un voisinage $\Omega\,(\mu, \rho_0/8)$ avec $\mu \in \sigma_i$. Ceci justifie la majoration $\|a\|_{X^p} \leq |\!|\!|a|\!|\!|_p$.
Pour l'estimation inverse, nous définissons l'application ν qui à $\mu \in \Lambda$ associe les indices k des ensembles σ_k qui ont une intersection non-vide avec $\Omega\,(\mu, \rho_0/8)$: $\nu(\mu) = \{k \in \mathbb{N} : \sigma_k \cap \Omega\,(\mu, \rho_0/8) \neq \emptyset\}$. Posons $\tau_\mu = \Omega\,(\mu, \rho_0/8) \cap \Lambda$ et $\sigma = \bigcup_{k \in \nu(\mu)} \sigma_k$.



Dessin 2 : Le regroupement des σ_n, $n \in \nu(\mu)$

Nous observons que $\tau_\mu \subset \sigma$, et nous allons appliquer la proposition 3.3.2 à σ. Nous remarquons que d'après la proposition 3.1.1, $(B_k)_{k \geq 1} \in (CG)$, où $B_k = B_{\sigma_k}$, et que l'on a aussi $K^q_{B_\sigma} \subset K^q_B$ ce qui implique $\|\mathcal{E}_k^*|_{K^q_{B_\sigma}}\| \leq \|\mathcal{E}_k^*|_{K^q_B}\|$.
Afin d'effectuer les estimations suivantes, nous définissons une fonction analytique bornée f_μ qui vérifie $f_\mu(\lambda) = a(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma$. En effet, grâce au choix $\rho_0/8$ comme rayon du disque pseudohyperbolique, on se persuade que les voisinages $\Omega\,(\mu, \rho_0/8)$ ainsi que les ensembles $\nu(\mu)$ contiennent au plus N éléments. On peut donc choisir pour f_μ un polynôme d'interpolation de type Lagrange.
Maintenant, à l'aide de l'estimation (3.8), de l'inclusion $\tau_\mu \subset \sigma$ et de la proposition 3.3.2, nous obtenons pour $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}(1 - |\mu|^2)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} | \bigtriangleup^{k-1} a(\mu^{(k)})| &\leq \frac{1}{c_0} \|f_\mu\|_{H^p/B_{\tau_\mu} H^p} \leq \frac{1}{c_0} \|f_\mu\|_{H^p/B_\sigma H^p} \\ &\leq \frac{1}{c_0} \sup_{k \in \nu(\mu)} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k \in \nu(\mu)} \|f_\mu\|_{H^P/B_k H^p} \\ &\leq C \sum_{k \in \nu(\mu)} \sum_{i=1}^{|\sigma_k|} (1 - |\lambda_{k,i}|^2)^{\frac{1}{p}} | \bigtriangleup^{i-1} a(\lambda_k^{(i)})|,\end{aligned}$$

où la constante $C = (c_1/c_0)\ \sup_{k\geq 1} \|\mathcal{E}_k^{q*}\|/\|P_-\|$, avec les constantes de (3.8), est finie. Comme chaque terme $\sum_{i=1}^{|\sigma_k|}(1-|\lambda_{k,i}|^2)|\bigtriangleup^{i-1} a(\lambda_k^{(i)})|$ figure au plus N fois dans la majoration des termes de la série $\|\!|a|\!\|_p = \sum_{\mu\in\Lambda}(1-|\mu^2|)\sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\bigtriangleup^{k-1} a(\mu^{(k)})|^p$, on obtient $\|\!|a|\!\|_p \leq c\,\|a\|_{X^p}$.
Pour $p=\infty$, nous ne connaissons pas $\mathcal{E}_k$. Mais nous pouvons majorer plus largement. D'après (3.1), nous avons

$$(a_n)_{n\geq 1} \in H^\infty|_\Lambda \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 1) \text{ Il existe } (f_n)_{n\geq 1} \text{ telle que } f_n|_{\sigma_n} = a|_{\sigma_n}, \\ 2) \ \sup_{n\geq 1}\|f_n\|_{H^\infty/B_nH^\infty} < \infty. \end{cases}$$

En particulier, comme $\sup_{n\geq 1}\deg B_n < \infty$, nous pouvons choisir $f_n = P_{B_n} f_n$. Soit maintenant $f \in T_\infty (f_n)_{n\geq 1}$ (pour la définition de T_∞ voir lemme 2.2.5 et (2.2)). Alors $f|_\Lambda = a$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\bigtriangleup^{k-1} a(\mu^{(k)})| &\leq \frac{1}{c_0}\|f\|_{H^\infty/B_{\tau_\mu}H^\infty} \leq \frac{1}{c_0}\|f\|_{H^\infty/BH^\infty} = \|T_\infty(f_n)_{n\geq 1}\|_{H^\infty/BH^\infty} \\
&\leq \frac{1}{c_0}\|T_\infty\|\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_{H^\infty} = \|T_\infty\|\sup_{n\geq 1}\|P_{B_n}f_n\|_{H^\infty} \\
&\leq \frac{1}{c_0}\|T_\infty\| 2N \sup_{n\geq 1}\|f_n\|_{H^\infty/B_nH^\infty},
\end{aligned}$$

d'où la majoration aussi dans ce cas. ■

Remarque
Nous mentionnons que la constante ρ_0 dépend de la représentation $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$. En effet, si nous considérons une autre représentation $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N'} \Lambda_i'$, $\Lambda_i' \in (C)$, nous obtenons une autre constante ρ_0' et ainsi une norme équivalente dans $H^p|_\Lambda$. Pour la validité de la preuve, il est suffisant que l'on ait $\sup_{\mu\in\Lambda} |\Omega\,(\mu, \rho_0/8)\cap\Lambda| < \infty$, ce qui est par exemple aussi vrai pour la constante de Carleson généralisée associée à $(B_{\sigma_k})_{k\geq 1}$. Comme celle-ci est seulement donnée implicitement, nous avons privilégié notre choix de la constante ρ_0, qui est déterminée dès que Λ est donné par ses composantes $\Lambda_i \in (C)$, $i = 1, \dots, N$.

3.4 Application à l'étude de l'algèbre H^∞/BH^∞

Nous allons appliquer la caractérisation de l'espace des traces $H^\infty|_\Lambda$ à l'étude des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{B} = H^\infty/BH^\infty$, où B est le produit de Blaschke associé à la suite Λ. Le résultat que nous allons obtenir va nous servir aussi dans la construction de l'opérateur d'interpolation (chapitre 4). Au passage nous obtiendrons une description du spectre de $\mathcal{B}$ dans le cas où Λ est une réunion finie de suites de Carleson. Nous terminerons ce paragraphe par un exemple qui montre que la condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson est essentielle pour la description des éléments inversibles dans $\mathcal{B}$ et donc aussi pour la description du spectre.

Nous commençons par quelques résultats auxiliaires.

Lemme 3.4.1 *Soit $f \in H^\infty$. Alors pour $\{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{D}$ on a*

$$\left|\bigtriangleup^n f(\lambda^{(n+1)})\right| \leq 2^n\|f\|_{H^\infty}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Preuve
En effet pour $f \in H^\infty$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}$

$$|\frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}| \leq \|\frac{f - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}}\|_{H^\infty} = \|f - f(\lambda_1)\|_{H^\infty} \leq 2\|f\|_{H^\infty},$$

ce qui donne immédiatement le résultat pour $n = 1$. Par prolongement analytique, la fonction $g(z) = (f(z) - f(\lambda_1))/b_{\lambda_1}(z)$ appartient à H^∞. Nous appliquons le même raisonnement à g, ce qui démontre le résultat au cas $n = 2$. Par récurrence on obtient le lemme. □

Ceci permet de démontrer le

Corollaire 3.4.2 *Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{D}$ et $f \in H^\infty$ une fonction telle que pour $\lambda \in \sigma$ on a $|f(\lambda)| \geq \delta > 0$. On définit $w(\lambda) = 1/f(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma$. Alors*

$$|\triangle^n w(\lambda^{(n+1)})| \leq c(\delta, n, \|f\|_{H^\infty}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.9}$$

Preuve
Pour $n = 0$, l'estimation est évidente. Pour $n = 1$, nous obtenons à l'aide du lemme 3.4.1 :

$$|\triangle^1 w(\lambda^{(2)})| = |\frac{w(\lambda_2) - w(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}| = |\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{f(\lambda_1)f(\lambda_2)b_{\lambda_1}(\lambda_2)}| \leq \frac{2}{\delta^2}\|f\|_{H^\infty}.$$

Pour $n \geq 2$, nous allons effectuer une récurrence. Le lemme suivant nous permettra de ramener l'estimation (3.9) pour l'ordre n à l'ordre $n - 1$.

Lemme 3.4.3 *Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{D}$ et $g, h : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors*

$$\triangle^n(gh)(\lambda^{(n+1)}) = \sum_{j=0}^{n} \triangle^{n-j}h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j})\, \triangle^j g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_{n+1}).$$

Ce lemme est connu (voir par exemple [4], où il est cité sans preuve). Nous le démontrons dans l'annexe pour être complet.
Posons alors

$$g(\lambda) = 1/f(\lambda) \quad \text{et} \quad h(\lambda) = \triangle f(\lambda_1, \lambda), \quad \lambda \in \sigma.$$

Alors $\triangle w(\lambda^{(2)}) = (f(\lambda_1) - f(\lambda_2))/(f(\lambda_1)f(\lambda_2)b_{\lambda_1}(\lambda_2)) = (-1/f(\lambda_1))(g(\lambda_2)h(\lambda_2))$, et

$$\begin{aligned}
\triangle^{n+1}w(\lambda^{(n+2)}) &= \frac{-1}{f(\lambda_1)} \triangle^n (gh)(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}) \\
&= \frac{-1}{f(\lambda_1)} \sum_{j=0}^{n} \triangle^{n-j}h(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2-j})\, \triangle^j g(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2}) \\
&= \frac{-1}{f(\lambda_1)} \sum_{j=0}^{n} \triangle^{n-j+1}f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2-j})\, \triangle^j w(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2}).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence nous avons $|\triangle^j w(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2})| \leq c(\delta, j, \|f\|_{H^\infty})$, $0 \leq j \leq n$, ce qui démontre avec le lemme 3.4.1

$$|\triangle^{n+1} w(\lambda^{(n+2)})| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1-j}\|f\|_{H^\infty} c(\delta, j, \|f\|_{H^\infty}) = c(\delta, n+1, \|f\|_{H^\infty}),$$

d'où le corollaire. ■

A l'aide du théorème 3.3.1 et remarquant que si Λ est une réunion de N suites de Carleson, alors $|\sigma_n| \leq N$, on peut déduire du corollaire précédent le résultat suivant.

Corollaire 3.4.4 *Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$. Si $f \in H^\infty$ et $|f|_\Lambda| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$, alors $1/f|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in H^\infty$ telle que $1/f(\lambda) = g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

■

Nous remarquons que si réciproquement il existe $g \in H^\infty$ telle que $f(\lambda)g(\lambda) = 1$, $\lambda \in \Lambda$, alors $|f(\lambda)| \geq |1/g(\lambda)| \geq 1/\|g\|_{H^\infty} = \delta$. Ce résultat est vrai sous la condition minimale $\Lambda \in (B)$.

Désignons maintenant par $\mathcal{B}$ l'algèbre de Banach H^∞/BH^∞, où $B = \prod_{n\geq 1} b_{\lambda_n}$ est le produit de Blaschke associé à la suite $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, et par $\mathcal{B}^{-1}$ l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathcal{B}$.
Le corollaire précédent permet de démontrer un certain nombre de propriétés de l'algèbre $\mathcal{B}$ dont nous n'aurons pas directement besoin dans la suite, mais que l'on peut montrer avec les mêmes techniques utilisées auparavant.
Nous commençons par la description des éléments inversibles de $\mathcal{B}$.

Corollaire 3.4.5 *Soit Λ une réunion finie de suites de Carleson. Si $F \in \mathcal{B}$ et si f est un représentant de la classe F, alors :*

$$\textit{Il existe } \delta > 0 \textit{ avec } |f|_\Lambda| \geq \delta \Longleftrightarrow F \in \mathcal{B}^{-1}.$$

■

Nous pouvons en déduire le

Corollaire 3.4.6 *Soit Λ une réunion finie de suites de Carleson. Si $F \in \mathcal{B}$ et f est un représentant de la classe F, alors*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(F) = \overline{f(\Lambda)},$$

où $\sigma_{\mathcal{B}}(F)$ est le spectre de F dans $\mathcal{B}$.

Ici, nous désignons par $\overline{E}$ l'adhérence de l'ensemble $E \subset \mathbb{C}$. Nous remarquons que ce résultat est aussi une conséquence de la proposition 3.4.8. Nous avons placé ce résultat après le corollaire 3.4.5, parce qu'il est une application de la description des éléments inversibles dans $H^\infty|_\Lambda$.

Preuve
En effet, $\mu \notin \sigma_{\mathcal{B}}(F)$ si et seulement si $F - \mu \in \mathcal{B}^{-1}$ ce qui est maintenant équivalent à $|(f-\mu)|_\Lambda| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$. Et cette dernière propriété est vraie si et seulement si $\mu \notin \overline{f(\Lambda)}$.
■

Ceci nous permet de démontrer la proposition suivante qui généralise le corollaire 3.4.4.

Proposition 3.4.7 *Soit Λ une réunion finie de suites de Carleson. Si $f \in H^\infty$ et $\varphi \in Hol\,(\overline{f(\Lambda)})$, alors $\varphi \circ f|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$.*

Afin de voir que ce résultat généralise le corollaire 3.4.4, il suffit de prendre la fonction $\varphi : z \longmapsto 1/z$. Si $|f|_\Lambda| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$, alors $\varphi \in Hol\,(\overline{f(\Lambda)})$ et on obtient $\varphi \circ f|_\Lambda = 1/f|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$.

Preuve
Posons $F = f + BH^\infty \in \mathcal{B}$. Comme $\varphi \in Hol\,(\overline{f(\Lambda)}) = Hol\,(\sigma_{\mathcal{B}}(F))$, nous avons

$$\varphi(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\zeta)R(\zeta, F)d\zeta \in \mathcal{B},$$

où Γ est une courbe de Jordan dans le domaine d'holomorphie de φ telle que $\overline{f(\Lambda)}$ se trouve à l'intérieur de Γ, et $R(\zeta, F)$ est la résolvante de F dans $\mathcal{B}$. Désignons par $h \in H^\infty$ un représentant de $\varphi(F)$, alors la formule de Cauchy fournit $h(\lambda) = \varphi \circ f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ce qui démontre $\varphi \circ f|_\Lambda = h|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$. ∎

A condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson, le corollaire 3.4.6 nous a donné la description du spectre d'un élément de $\mathcal{B}$. Notre dernier résultat sur l'algèbre $\mathcal{B}$ concerne le spectre de l'algèbre elle-même.

Proposition 3.4.8 *Soit Λ une réunion finie de suites de Carleson. Alors*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \overline{\Lambda},$$

où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{B}$.

Preuve
Nous utilisons le résultat suivant, qui est vrai dans toute algèbre de Banach commutative unitaire. Si $X \subset \mathcal{M}_A$, où $\mathcal{M}_A$ est l'espace des idéaux maximaux, alors

$$\overline{X} = \mathcal{M}_A \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Pour tout } a_i \in A, i = 1, \dots, n \text{ avec } \sum_{i=1}^n |\hat{a}_i(x)| \geq \delta > 0, \\ x \in X, \text{ on a l'existence de } b_i \in A \text{ tels que } \sum_{i=1}^n a_i b_i = 1. \end{cases}$$

En effet, ce résultat est une conséquence immédiate de la définition de la topologie de Gelfand. Posons donc $X = \Lambda$ et $A = \mathcal{B}$ et définissons pour $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{array}{rcl} m_\lambda : H^\infty/BH^\infty & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f + BH^\infty & \longmapsto & f(\lambda). \end{array}$$

On vérifie que m_λ est bien défini, continu, linéaire et multiplicatif, d'où $m_\lambda \in \mathcal{M}_{H^\infty/BH^\infty}$, et par conséquent $\Lambda \subset \mathcal{M}_{H^\infty/BH^\infty}$. Ainsi, afin de démontrer la proposition, nous sommes ramenés à démontrer que pour toute famille $(F_i)_{i=1}^n$, $F_i \in H^\infty/BH^\infty$, $i = 1, \dots, n$ avec $\sum_{i=1}^n |\hat{F}_i(\lambda)| \geq \delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, nous avons l'existence d'une famille $(G_i)_{i=1}^n$, $G_i \in H^\infty/BH^\infty$, $i = 1, \dots, n$, telle que $\sum_{i=1}^n F_i G_i = 1$.
Soit alors $F_i \in H^\infty/BH^\infty$ avec $\sum_{i=1}^n |\hat{F}_i(\lambda)| \geq \delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$. Nous remarquons que l'écriture correcte de cette minoration est $\sum_{i=1}^n |\hat{F}_i(m_\lambda)| \geq \delta > 0$, $\lambda \in \Lambda$, car on avait identifié Λ à

un sous-ensemble de $\mathcal{M}_{H^\infty/BH^\infty}$. Par définition de la transformée de Gelfand, ceci est donc équivalent à

$$\sum_{i=1}^{n} |m_\lambda(F_i)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i(\lambda)| \geq \delta, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{3.10}$$

où f_i est un représentant de la classe F_i. Nous démontrons l'existence de $G_i = g_i + BH^\infty \in H^\infty/BH^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} F_i G_i = 1 + BH^\infty.$$

En effet, dans ce but, il suffit de démontrer qu'il existe $\varphi \in H^\infty$ et $g_i \in H^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i + B\varphi = 1.$$

Or d'après le théorème de la couronne (cf. par exemple [8]), cette équation n'a une solution que s'il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)| + |B(z)| \geq \delta_0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.11}$$

Cette dernière minoration est maintenant une conséquence de (3.10), de la condition (CG) et du principe du maximum. Plus précisément, nous allons décomposer $\mathbb{D} = M^\varepsilon \cup \mathbb{D} \setminus M^\varepsilon$, où $M^\varepsilon = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega(\lambda, \varepsilon)$ (cf. paragraphe 3.1). Ici nous choisissons en particulier

$$\varepsilon = \frac{\delta}{4N} \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{\|f_i\|_{H^\infty}}.$$

(Nous remarquons que l'on peut supposer $f_i \not\equiv 0$). Et maintenant nous vérifions que l'on peut minorer $|f_i|$ sur M^ε et $|B|$ sur $\mathbb{D} \setminus M^\varepsilon$.
Soit donc $z \in M^\varepsilon$. Remarquons d'abord que nous avons en général

$$|f_i(z) - f_i(\lambda)| \leq 2\|f_i\|_{H^\infty} |b_\lambda(z)|,$$

(cf. lemme 3.4.1), et que, d'après l'hypothèse (3.10), pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe i_0 tel que

$$|f_{i_0}(\lambda)| \geq \delta/N.$$

Maintenant comme $z \in M^\varepsilon$, il existe $\lambda \in \Lambda$ avec $|b_\lambda(z)| < \varepsilon$ et $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, tel qu'on a

$$\begin{aligned} |f_{i_0}(z)| &\geq |f_{i_0}(\lambda)| - |f_{i_0}(z) - f_{i_0}(\lambda)| \geq |f_{i_0}(\lambda)| - 2\|f_{i_0}\|_{H^\infty} |b_\lambda(z)| \geq \delta/N - 2\varepsilon \|f_{i_0}\|_{H^\infty} \\ &\geq \delta/2N, \end{aligned}$$

ce qui permet de minorer $\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)| \geq \delta/2N$ pour $z \in M^\varepsilon$.
Soit maintenant $z \in \mathbb{D} \setminus M^\varepsilon$. Ceci implique $|b_\lambda(z)| > \varepsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Nous reprenons la décomposition $\Lambda = \bigcup_{n \geq 1} \sigma_n$ étudiée dans le paragraphe 3.1. D'après la proposition 3.1.1 nous

avons $\sup_{n\geq 1}|\sigma_n| \leq N < \infty$ et $(B_n)_{n\geq 1} \in (CG)$, où $B_n = \prod_{\lambda\in\sigma_n} b_\lambda$. Soit η la constante de Carleson généralisée associée à la suite $(B_n)_{n\geq 1}$. Nous obtenons maintenant :

$$|B(z)| \quad \geq \quad \eta \inf_{n\geq 1}|B_n(z)| \geq \eta \inf_{n\geq 1} \prod_{\lambda\in\sigma_n} |b_\lambda(z)| \geq \eta \inf_{n\geq 1} \varepsilon^{|\sigma_n|} \geq \eta\varepsilon^N,$$

ce qui démontre (3.11). Le théorème de la couronne entraîne donc l'existence de $\varphi, g_i \in H^\infty$ telles que

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i + B\varphi = 1.$$

Maintenant $G_i = g_i + BH^\infty$ vérifie $\sum_{i=1}^n F_i G_i = 1 + BH^\infty$, ce qui démontre le théorème. ■

Remarques
1) Un raisonnement semblable était utilisé dans le cas où Λ était une suite de Carleson dans [12].
2) Afin d'avoir les résultats précédents, il nous semble essentiel que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson. En effet nous allons construire une suite Λ vérifiant la condition de Blaschke qui est dans un certain sens proche des réunions finies de suites de Carleson sans en être une, et une fonction f qui est uniformément bornée inférieurement, $|f|_\Lambda| \geq \delta > 0$, sans que $f + BH^\infty$ soit inversible dans $\mathcal{B}$.
3) Cet exemple et la preuve de la proposition 3.4.7 (qui passe pour toute fonction $\varphi \in Hol\,(\sigma_{\mathcal{B}}(f + BH^\infty)))$ montrent qu'il existe une suite Λ, qui vérifie la condition de Blaschke, et une fonction $f \in H^\infty$ telles que $\sigma_{\mathcal{B}}(f + BH^\infty) \neq \overline{f(\Lambda)}$.

L'exemple
Nous construisons cette suite dans le demi-plan supérieur (que nous pouvons passer à l'aide d'une transformation conforme dans le disque ; nous remarquons que cette transformation conserve la distance pseudohyperbolique).
Soit donc $a_n = i + n$, $n \geq 1$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est à une distance uniforme de l'axe réel et ses termes sont uniformément séparés, c'est-à-dire il existe $\delta > 0$ tel que $|\tilde{b}_{a_n}(a_k)| > \delta$, où $\tilde{b}$ est le facteur de Blaschke dans le demi-plan supérieur :

$$\tilde{b}_\lambda(\mu) = \frac{|\lambda^2+1|}{\lambda^2+1}\frac{\mu-\lambda}{\mu-\overline{\lambda}}, \quad \Im(\lambda), \Im(\mu) > 0.$$

Une telle suite est de Carleson (cf. par exemple [8]). Autour de chaque point nous allons ajouter un certain nombre s_n de points proches de a_n. Nous allons considérer en particulier la suite

$$\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}_{n\geq 1, k=0,\ldots,s_n-1} = \{i + n + \frac{k}{3s_n}\}_{n\geq 1, k=0,\ldots,s_n-1}.$$

Si la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée, alors la suite $\{\lambda_{n,k}\}_{n\geq 1,k=0,\ldots,s_n-1}$ est une réunion finie de suites de Carleson ; afin de voir ceci, il suffit de prendre $\Lambda_l = \{\lambda_{n,l}\}_{n\geq 1, l\leq s_n}$. Nous allons démontrer :

$$\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} s_n = \infty \Longrightarrow \text{il existe } f \in H^\infty, \delta > 0, \text{ avec} \begin{cases} |f|_\Lambda| \geq \delta \\ f + \tilde{B}H^\infty \notin \mathcal{B}^{-1}, \end{cases} \tag{3.12}$$

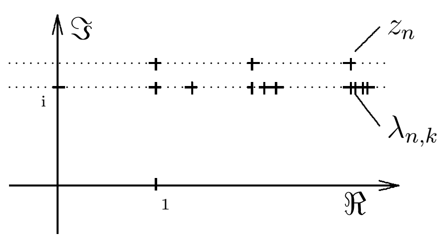
où $\tilde{B} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \tilde{b}_\lambda$.

Remarque
C'est pour cette raison que nous disons que la condition (CG) est essentielle. Notre suite concrète, dès qu'elle quitte le cadre des réunions finies de suites de Carleson, permet de construire une fonction uniformément bornée inférieurement sans que $1/f|_\Lambda$ soit dans $H^\infty|_\Lambda$.

Nous démontrons l'implication (3.12) :
Soit donc $\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} s_n = \infty$ et $(s_{n_k})_{k\geq 1}$ la sous-suite monotone qui tend vers ∞. Nous allons poser

$$M = \{z_n\}_{n\geq 1} = \{n + (5/4)i\}_{n\geq 1},$$

et nous allons donner une majoration et une minoration pour la distance pseudohyperbolique (du demi-plan supérieur) entre les points de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et de la suite Λ.



Dessin 3 : Construction de la suite $\{z_n\}_{n\geq 1}$

Nous commençons par une minoration. Soit donc $\lambda = i + r$, $r \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \Lambda$. Alors

$$|\tilde{b}_\lambda(z_n)| = |\frac{i + r - (5/4i + n)}{i + r - (-5/4i + n)}| = |\frac{r - n - 1/4i}{r - n + 9/4i}| \geq \frac{1}{9} = \delta_1. \tag{3.13}$$

Donc les éléments de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ sont à une distance minimale δ_1 des éléments de Λ.
Nous allons majorer la distance entre z_n et $\{\lambda_{n,k}\}_{k=0,\ldots,s_n-1}$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_{\lambda_{n,k}}(z_n)| &= |\frac{i + n + k/(3s_n) - (5/4i + n)}{i + n + k/(3s_n) - (-5/4i + n)}| = |\frac{k/(3s_n) - 1/4i}{k/(3s_n) + 9/4i}| \leq \frac{1}{2}\frac{5}{3\cdot 4} \\ &= \frac{5}{24} = \delta_2 < 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme z_n est aussi une suite à une distance uniforme de l'axe réel et dont les termes sont uniformément séparés dans la métrique pseudohyperbolique du demi-plan supérieur, elle est une suite de Carleson. Soit $\tilde{B}_M$ le produit de Blaschke associé à la suite M. D'après (3.13), les éléments de Λ sont à une distance minimale $\delta_1 > 0$ des éléments de Λ, d'où l'existence d'un $\eta > 0$ tel que $|\tilde{B}_M(\lambda)| > \eta$, $\lambda \in \Lambda$ (cf. par exemple [16]). De plus, tous les éléments $\{\lambda_{n,k}\}_{k=0,\ldots,s_n-1}$ sont à une distance maximale δ_2 de z_n, d'où

$$|\tilde{B}(z_n)| \leq \prod_{k=0}^{s_n} |\tilde{b}_{\lambda_{n,k}}(z_n)| \leq \delta_2^{s_n}.$$

Par conséquent, comme $\lim_{k\longrightarrow\infty} s_{n_k} = \infty$, nous obtenons :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} |\tilde{B}(z_{n_k})| = 0.$$

On en déduit

$$\inf_{\Im z>0}(|\tilde{B}(z)| + |\tilde{B}_M(z)|) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} |\tilde{B}(z_{n_k})| = 0.$$

Il est alors évident, qu'il n'existe pas de fonctions $\varphi, g \in H^\infty$ telles que

$$\tilde{B}\varphi + \tilde{B}_M g = 1,$$

ce qui est équivalent à dire que pour toute fonction $g \in H^\infty$, on a $g|_\Lambda \neq 1/\tilde{B}_M|_\Lambda$, d'où la non-inversibilité de $f = \tilde{B}_M$.

Remarque
Il nous semble que ce genre de construction est toujours possible si Λ n'est pas une réunion finie de suites de Carleson.

Chapter 4

L'opérateur d'interpolation dans H^p, $1 \le p \le \infty$

Ce chapitre sera consacré à la construction d'un opérateur linéaire continu d'interpolation de $H^p|_\Lambda$ dans H^p, si Λ est une réunion finie de suites de Carleson.
Nous allons reprendre une vieille idée utilisée pour la construction d'un opérateur d'interpolation : dans le premier paragraphe, nous allons construire une famille de fonctions $(D_i)_{i\ge 1}$, telle que D_i, $i \ge 1$, prend la valeur 1 sur l'ensemble σ_i et s'annule en $\Lambda \setminus \sigma_i$. En plus, elle permet une estimation uniforme de $\sum_{i\ge 1} |D_i|$. Des constructions explicites pour de telles familles dans le cas de H^∞ et d'une suite simple de Carleson $\Lambda \in (C)$ existent dans différentes formes et remontent jusqu'à P. Beurling (voir L. Carleson [6]). Il y a même des approches générales (voir par exemple [3]).
La difficulté ici réside dans le fait que la fonction D_i doit être égale à 1 dans plusieurs points à la fois.
Il n'est pas difficile, si $(B_n)_{n\ge 1} \in (CG)$, de construire une suite de fonctions qui est uniformément bornée inférieurement dans σ_n et nulle sur $\Lambda \setminus \sigma_n$. Mais il faut la normaliser dans tous les points de σ_n. Ceci sera une conséquence du corollaire 3.4.4 (on pourrait aussi appliquer le théorème de la couronne ; mais nous nous intéressons à une construction explicite de l'opérateur d'interpolation). Avant la normalisation nous allons rajouter un facteur de convergence qui est essentiellement celui qu'a utilisé S. A. Vinogradov [31] dans sa construction qui a amélioré celle de P. Jones [15] dans le cas où Λ est une suite simple de Carleson. Ce facteur de convergence nous garantit la convergence de la somme $\sum_{i\ge 1} |D_i|$.
Au deuxième paragraphe, nous donnons une construction explicite de l'opérateur d'interpolation. Nous remarquons que l'on peut espérer construire un tel opérateur dans H^∞ si et seulement si Λ est une réunion finie de suites de Carleson, ce qui nous conforte dans l'idée que la condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson est même nécessaire pour avoir la description des éléments inversibles dans $\mathcal{B}$ obtenue au chapitre précédent.

4.1 La fonction D_i

Pour la construction de la fonction D_i, qui suit la construction de Jones-Vinogradov [31], nous aurons besoin de quelques notations (cf. aussi [22]). Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$ avec $\Lambda_i \in (C)$ et $\Lambda = \bigcup_{i\geq 1} \sigma_i$ la partition d'ensembles de niveau étudiée au paragraphe 3.1, $\sigma_i = \{\lambda_{i,l}\}_{l=1}^{|\sigma_i|}$. On suppose que $|b_\lambda(\mu)| \leq \frac{1}{3}$ pour $\lambda, \mu \in \sigma_i$ $(i \geq 1)$, ce qui est possible d'après (3.3). On définit $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_i\}_{i\geq 1} \subset \Lambda$ par $|\tilde{\lambda}_i| = \max_{\lambda\in\sigma_i} |\lambda|$ pour tout $i \geq 1$. On pose

$$
\begin{array}{rclcrcl}
B_{(i)} & = & \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\sigma_i} b_\lambda, & & c_\mu & = & b_{\mu/\sqrt{|\mu|}}(z\sqrt{|\mu|}) = \frac{\sqrt{|\mu|}}{\mu}\frac{\mu-|\mu|z}{1-\overline{\mu}z} \\
C^{\tilde{\lambda}} & = & \prod\limits_{\substack{\mu\in\tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}\} \\ |\mu|\geq|\tilde{\lambda}|}} c_\mu, & \tilde{\lambda}\in\tilde{\Lambda}, & A_i & = & B_{(i)}\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i} \\
\alpha_i(\lambda) & = & 1/A_i(\lambda) \quad \text{pour} & \lambda\in\sigma_i, & P_i & = & \sum_{k=1}^{|\sigma_i|}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{i,l}} \triangle^{k-1}\alpha_i(\lambda_i^{(k)}).
\end{array}
$$

On remarque que la quantité α_i est bien définie pour $\lambda \in \sigma_i$. La fonction P_i est une fraction rationnelle semblable au polynôme d'interpolation de type Newton qui interpole les valeurs $\{\alpha(\lambda_{i,k})\}_{k=1}^{|\sigma_i|}$. En effet, nous avons un résultat général dont la preuve se trouve dans l'annexe :

Lemme 4.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{D}$. Si $f : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$, alors*

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(z) \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})$$

vérifie

$$P(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in \sigma.$$

Maintenant on peut énoncer le

Théorème 4.1.2 *Avec les hypothèses et les notations précédentes et si on pose $D_i = A_i \cdot P_i$, $i \geq 1$, on obtient une suite $(D_n)_{n\geq 1} \subset H^\infty$ qui vérifie*

$$
\begin{array}{ll}
1) & D_i(\lambda) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & \lambda\in\sigma_i \\ 0 & si & \lambda\in\Lambda\setminus\sigma_i \end{array} \right. , \\
2) & \sum\limits_{i\geq 1} |D_i(z)| \leq c(\delta, N), \quad z\in\mathbb{D},
\end{array}
$$

avec une constante $c(\delta, N) > 0$.

Remarque
1) On peut aussi démontrer

$$\|D_i\|_{H^p} \leq c\,(1 - |\tilde{\lambda}_i^2|)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty).$$

2) Grâce à la condition de Blaschke, la fonction $C^{\tilde{\lambda}_i}$ est holomorphe et de plus bornée par 1 (voir les détails dans [31]).

Preuve
Comme la fonction P_i interpole justement les valeurs réciproques de A_i sur σ_i, la fonction $D_i = A_i P_i$ prend la valeur 1 sur σ_i. De plus, la fonction A_i contient le facteur $B_{(i)} = \prod_{k \neq i} B_k$ et s'annule donc sur σ_k, $k \neq i$. Ceci établit la propriété 1, et il reste donc l'estimation de la somme. Pour ceci il faut connaître une majoration de $|P_i|$ et de $|A_i|$. D'après la définition de P_i et comme $|\sigma_i| \leq N$ $(i \geq 1)$ et $|b_{\lambda_{k,l}}| \leq 1$, il reste à voir que $\triangle^{k-1}\alpha_i(\lambda_i^{(k)})$ est uniformément borné. Dans ce but, on vérifie les hypothèses du corollaire 3.4.2 appliqué à l'ensemble $\Lambda = \sigma_i$. On se persuade que la fonction A_i est bien holomorphe et bornée (voir aussi la remarque 2) ; l'estimation $\|(1-|\lambda^2|)/(1-\overline{\lambda}z)\|_{H^\infty} \leq 4$ est évidente). A_i appartient donc bien à H^∞ et vérifie $\|A_i\|_{H^\infty} \leq c_\infty = 4$. On minore chacun des facteurs de $|A_i(\lambda)|$ pour $\lambda \in \sigma_i$. La condition (CG) entraîne $|B_{(i)}(\lambda)| \geq \delta$ pour tout $\lambda \in \sigma_i$. Pour le deuxième facteur, on se sert du fait, que l'on ait choisi ε dans la partition d'ensembles de niveau telle que $|b_\lambda(\mu)| \leq \frac{1}{3}$ pour $\lambda, \mu \in \sigma_i$ $(i \geq 1)$. Ceci entraîne, à l'aide de (3.4) que $(|1-|\tilde{\lambda}_i^2|)/|1-\overline{\tilde{\lambda}}_i\lambda| \geq \frac{2}{3}$ pour tout $\lambda \in \sigma_i$ et donc

$$|\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i\lambda}\right)^2| \geq \frac{4}{9} \quad \text{pour} \quad \lambda \in \sigma_i.$$

Il reste l'étude de $|C^{\tilde{\lambda}_i}|$. On remarque d'abord (cf. [22], p.190)

$$|\lambda| \leq |\mu| \leq 1 \Longrightarrow |c_\mu(\lambda)| \geq |b_\mu(\lambda)|.$$

En plus, d'après la construction de $\tilde{\Lambda}$, on a $|\lambda| \leq |\tilde{\lambda}_i|$ pour $\lambda \in \sigma_i$. Donc

$$|C^{\tilde{\lambda}_i}(\lambda)| = \prod_{\substack{\mu \in \tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\} \\ |\mu| \geq |\tilde{\lambda}_i|}} |c_\mu(\lambda)| \geq \prod_{\substack{\mu \in \tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\} \\ |\mu| \geq |\tilde{\lambda}_i|}} |b_\mu(\lambda)| \geq \prod_{\mu \in \tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\}} |b_\mu(\lambda)| \geq \delta.$$

La dernière minoration était une conséquence de $(B_n)_{n\geq 1} \in (CG)$. Ceci justifie aussi que $\tilde{\Lambda} \in (C)$ avec la même constante de Carleson δ que $(B_n)_{n\geq 1}$. On a alors minoré $|A_i(\lambda)|$ pour $\lambda \in \sigma_i$ par $\tilde{\delta} = 4\delta^2/9$. Le corollaire 3.4.2 donne alors l'estimation

$$|\triangle^{k-1}\,\alpha_i(\lambda_i^{(k)})| \leq c(\tilde{\delta}, N, \|A\|_{H^\infty}) = c_0(\tilde{\delta}, N).$$

Par conséquent, la fonction P_i est uniformément majorée par $Nc_0(\tilde{\delta}, N)$, ce qui démontre l'assertion du théorème :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} |D_i(z)| &= \sum_{i\geq 1} |A_i(z)P_i(z)| \leq Nc_0(\tilde{\delta}, N) \sum_{i\geq 1} |B_{(i)} \left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i}| \\
&\leq Nc_0(\tilde{\delta}, N) \sum_{i\geq 1} |\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i}|.
\end{aligned}$$

On peut supposer que les ensembles σ_i sont ordonnés d'une façon telle que l'on ait $|\tilde{\lambda}_i| \leq |\tilde{\lambda}_{i+1}|$ pour $i \geq 1$. Comme $\tilde{\Lambda} \in (C)$, on peut maintenant appliquer le raisonnement de S. A. Vinogradov (cf. [22], p.190 ou [31]) pour obtenir l'estimation $\sum_{i\geq 1} |D_i(z)| \leq 8Nc_0(\tilde{\delta}, N) = c_1(\tilde{\delta}, N)$.

■

4.2 L'opérateur d'interpolation

Soit X^p l'espace de suites introduit dans le théorème 3.3.1.

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses et avec les notations du théorème précédent, l'application*

$$\begin{array}{rcl} Int : X^p & \longrightarrow & H^p \\ w & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\geq 1} D_i \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} \left(\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{i,l}} \right) \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)}) \end{array}$$

est un opérateur linéaire d'interpolation pour $1 \leq p \leq \infty$, c'est-à-dire il vérifie :
1) $Int\,(w) \in H^p$ et $\|Int\,(w)\|_{H^p} \leq c\,\|w\|_{X^p}$ pour $w \in X^p$
2) $Int\,(w)(\lambda) = w(\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda$.

Remarques
1) Nous insistons sur le fait que cet opérateur est aussi continu dans le cas $p = 1$, ce qui permet de montrer $X_1 \subset H^1|_\Lambda$. Nous revenons à ce cas dans le sixième chapitre, où nous montrons en effet l'inclusion inverse.
2) Pour le cas $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, $1 < p < \infty$, S. A. Vinogradov et S. E. Rukshin [34] ont démontré l'existence d'un opérateur linéaire et continu approprié à leur définition plus générale d'interpolation (cf. aussi la remarque après le théorème 2.2.1).

Preuve
La propriété 2) est immédiate et nous démontrons alors la première : il faut distinguer les deux cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.
(i) Pour $p < \infty$, on pose

$$\begin{array}{rcl} a_i & = & \displaystyle |\left(\frac{1 - |\tilde{\lambda}_i^2|}{1 - \bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i|^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} | \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})| \\ b_i & = & \displaystyle |\left(\frac{1 - |\tilde{\lambda}_i^2|}{1 - \bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i|^{\frac{1}{q}}, \end{array}$$

où $w \in X^p$, et on obtient

$$|Int\,(w)(z)| \leq \left(\sum_{i\geq 1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\geq 1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On majore le premier facteur

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\left(\sum_{i\geq 1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & = & \displaystyle\left(\sum_{i\geq 1} |B_{(i)} \left(\frac{1 - |\tilde{\lambda}_i^2|}{1 - \bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i} P_i| \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq & c_1(\tilde{\delta}, N)^{\frac{1}{q}} = c_1. \end{array}$$

Pour la dernière majoration on s'est encore une fois servi du raisonnement de S. A. Vinogradov. Avec ceci on estime la norme H^p de $Int\,(w)$:

$$\begin{aligned} &\|Int\,(w)\|^p_{H^p} \\ &\leq \ \| \left\{ \left(\sum_{i\geq 1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\geq 1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p \|_{L^1} \leq c_1^p \sum_{i\geq 1} \|a_i^p\|_{L^1} \\ &\leq \ c_1^p \sum_{i\geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} | \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})| \right\}^p \| \left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 \|_{H^1} \|B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i\|_{H^\infty}, \end{aligned}$$

et comme $\| \left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 \|_{H^1} = 1 - |\tilde{\lambda}_i^2|$

$$\leq \ c_1^p \sum_{i\geq 1} (1-|\tilde{\lambda}_i^2|) \left(\sum_{k=1}^{|\sigma_i|} | \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})| \right)^p \leq c_2 \|w\|^p_{X^p}.$$

(ii) Soit $p = \infty$. Pour $w \in X^\infty$, on majore directement

$$\begin{aligned} |Int\,(w)(z)| \ &\leq \ \sum_{i\geq 1} |D_i(z)| \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} | \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})| \leq \|w\|_{X^\infty} \sum_{i\geq 1} |D_i(z)| \\ &\leq \ c_1(\tilde{\delta}, N) \|w\|_{X^\infty}. \end{aligned}$$

Et donc $\|Int\,(w)\|_{H^\infty} \leq c_1(\tilde{\delta}, N) \|w\|_{X^\infty}$. ∎

Remarque
S. A. Vinogradov et S. E. Rukshin ont démontré dans leur article [34] que l'existence d'un opérateur linéaire et continu d'interpolation au cas $p = 1$ ou $p = \infty$ implique forcément que les multiplicités des zéros sont uniformément bornées. Nous terminons ce paragraphe avec un résultat semblable. En effet, nous allons démontrer que la condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson est aussi nécessaire pour l'existence de l'opérateur linéaire d'interpolation dans le cas $p = \infty$. Nous résumons ce fait dans le

Théorème 4.2.2 *Soit $\Lambda \in \mathbb{D}$ une suite vérifiant la condition de Blaschke. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Il existe un opérateur linéaire, continu d'interpolation

$$\begin{aligned} Q : H^\infty|_\Lambda \ &\longrightarrow \ H^\infty \\ a \ &\longmapsto \ Q(a), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $Q(a)(\lambda) = a_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.
2) La suite Λ est une réunion finie de suites de Carleson.

Remarque
Nous munissons $H^\infty|_\Lambda$ de la topologie intrinsèque : pour $a \in H^\infty|_\Lambda$, nous posons $\|a\| = \inf_{f\in H^\infty, f|_\Lambda = a} \|f\|_{H^\infty}$.

Preuve
L'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est une conséquence immédiate du théorème 4.2.1. Démontrons donc l'implication inverse. Nous utilisons le résultat de P. G. Casazza, R. W. Pengra et C. Sundberg [7], qui ont donné une caractérisation des idéaux fermés dans l'algèbre du disque $A = H^\infty \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, tout en remarquant que ces résultats restent valables pour décrire les idéaux fermés de la forme θH^∞, où θ est une fonction intérieure, dans H^∞. En effet, leur résultat démontré qu'un sous-espace de H^∞ de la forme θH^∞, θ intérieure, possède un supplémentaire topologique si et seulement si θ est un produit de Blaschke associé à une suite qui est une réunion finie de suites de Carleson. Supposons donc que l'opérateur $Q : H^\infty|_\Lambda \longrightarrow H^\infty$ soit borné. L'opérateur de restriction $R : H^\infty \longrightarrow H^\infty|_\Lambda$, $f \longmapsto f|_\Lambda$ est également continu par rapport à la métrique intrinsèque de $H^\infty|_\Lambda$, ce qui implique la continuité de $P = QR$. Nous remarquons au passage que $RQ = Id_{H^\infty|_\Lambda}$ et que l'on a donc $P^2 = (QR)^2 = QRQR = QId_{H^\infty|_\Lambda} R = QR = P$. Par conséquent P est une projection continue dans H^∞ ayant comme noyau BH^∞. En effet, comme Q est injectif, il suffit de considérer $ker\, R$. Or $ker\, R = \{f \in H^\infty : f|_\Lambda = 0\} = BH^\infty$. Par conséquent, BH^∞ possède un supplémentaire topologique, ce qui, d'après le résultat cité, n'est possible que si B est un produit de Blaschke associé à une réunion finie de suites de Carleson.

$\blacksquare$

Chapter 5

Caractérisation de l'espace des traces de H_ω^∞

Dans ce chapitre, nous utilisons les techniques utilisées dans le chapitre 4 pour décrire $H_\omega^\infty|_\Lambda$, où Λ est une réunion finie de suites de Carleson. Cette technique consistait à localiser les éléments $\lambda \in \sigma_n$ à l'aide de la fonction D_n, et à trouver ensuite une fonction P_n qui interpole localement les valeurs $(a_{n,k})_{k=1}^{|\sigma_n|}$. Le résultat, que nous allons obtenir ici, généralise celui de S. A. Vinogradov et V. P. Khavin [32] sur la caractérisation des traces $H_\omega^\infty|_\Lambda$, où Λ est une suite de Carleson dans $\mathbb{D}$, aux réunions finies de suites de Carleson.
Dans le premier paragraphe, nous allons donner les conditions à imposer au poids ω — essentiellement ce sont les mêmes conditions qui étaient utilisées dans [32], plus une condition de croissance locale par rapport à la métrique pseudohyperbolique — , quelques résultats auxiliaires et les définitions des espaces H_ω^∞ et $l_{\omega,\triangle}^\infty$. Dans le deuxième paragraphe, nous allons donner la caractérisation de $H_\omega^\infty|_\Lambda$ si Λ est une réunion finie de suites de Carleson. Dans le dernier paragraphe, nous allons exhiber deux poids qui vérifient les conditions énoncées dans le premier paragraphe.

5.1 Introduction

Soit $\omega : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ une fonction continue et croissante, telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \longmapsto \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}_{1/2} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1/2\}$, avec

$$\omega(t) = \varphi\left(\frac{1}{1-t}\right), \quad t \in [0,1).$$

Nous supposons que φ vérifie les conditions suivantes :
1) φ est regulière dans $\mathbb{C}_{1/2}$.
2) $\varphi|_{[1,\infty)} > 0$.
3) $\varphi|_{[1,\infty)}$ est croissante.
4) Il existe $c > 0$, tel que $|\varphi(z)| \leq c\varphi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}_{1/2}$.

Remarque
Ces conditions sont essentiellement celles énoncées dans [32].

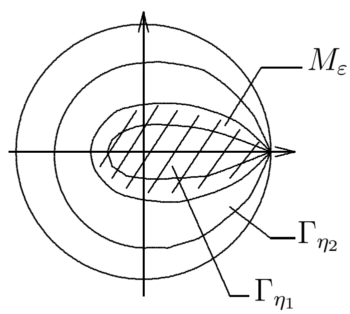
Nous avons besoin d'une condition supplémentaire qui décrive le comportement local de ω — c'est-à-dire par rapport à la métrique pseudohyperbolique — près de l'axe réel. Dans ce but, nous allons prolonger analytiquement le poids dans le disque par $\omega(z) = \varphi(1/(1-z))$, $z \in \mathbb{D}$. En effet si $z \in \mathbb{D}$, alors $\Re(1/(1-z)) > 1/2$. L'analyticité de $\varphi|_{\mathbb{C}_{1/2}}$ entraîne alors celle de $\omega|_{\mathbb{D}}$. Définissons l'ensemble

$$M_\varepsilon = \{z \in \mathbb{D} : |b_{|z|}(z)| < \varepsilon\} = \bigcup_{0<r<1} I_r,$$

où $I_r = \Omega(r, \varepsilon) \cap C_r$ et $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. On peut démontrer que M_ε s'identifie localement à un angle de Stoltz centré en 1. En effet, soit $\Gamma_\eta = \{z \in \mathbb{D} : |z-1| \leq \eta(1-|z|)\}$, $\eta > 1$, cet angle de Stoltz. Alors il existe $\eta_1, \eta_2 > 1$ et $r > 0$, tels que

$$\Gamma_{\eta_1} \cap D(1,r) \subset M_\varepsilon \cap D(1,r) \subset \Gamma_{\eta_2} \cap D(1,r),$$

où $D(1,r) = \{z \in \mathbb{D} : |z-1| \leq r\}$.



Dessin 4 : L'angle de Stoltz

Pour pouvoir obtenir une caractérisation de $H^\infty_\omega|_\Lambda$, nous devons imposer une certaine régularité à ω à l'intérieur des groupes σ_n (cf. chapitre 3.1). Nous avons choisi la condition suivante :

5) Il existe un $\varepsilon_1 > 0$ et une constante $c_1 \geq 1$ telle que pour $\lambda \in M_{\varepsilon_1}$ nous avons :

$$(1 - |\lambda^2|)|\omega'(\lambda)| \leq c_1 |\omega(\lambda)|.$$

Remarques
1) Nous avons privilégié cette condition, car elle est plus transparente que celle que nous allons donner dans la suite. En effet, elle nous dit qu'on peut majorer la dérivée par rapport à la métrique pseudohyperbolique par la fonction elle-même.
2) Cette condition — avec les autres — entraîne que la croissance de ω est de plus polynomiale. En effet, si on considère le comportement de ω sur l'axe réel, on obtient $(1-t)\omega'(t) \leq c_1\omega(t)$, $t > 0$, grâce aux conditions 1)-3). L'intégration de cette inéquation différentielle fournit la majoration $\omega(t) \leq k(1-t)^{c_1}$, pour un $k > 0$.

Malheureusement, cette condition n'est pas très convenable pour les considérations du chapitre suivant. Nous allons donner une autre caractérisation de la condition 5). Au préalable, nous énoncerons un résultat utile. En effet, le lemme suivant dit que la valeur absolue est une fonction lipschitzienne dans $\mathbb{D}$ par rapport à la métrique pseudohyperbolique :

Lemme 5.1.1 *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$. Alors*

$$|b_{|\lambda|}(|\mu|)| \leq |b_\lambda(\mu)|.$$

Preuve
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$ et $r = |\mu|$, alors

$$|b_\lambda(\mu)|^2 = |1 - \frac{(1-|\lambda^2|)(1-|\mu^2|)}{|1-\overline{\lambda}\mu|^2}| \geq |1 - \frac{(1-|\lambda^2|)(1-r^2)}{(1-|\lambda|r)^2}| = |\frac{|\lambda|-r}{1-|\lambda|r}|^2.$$

D'où

$$|b_\lambda(\mu)| \geq |\frac{|\lambda|-r}{1-|\lambda|r}| = b_{|\lambda|}(|\mu|).$$

□

Proposition 5.1.2 *Soit $\omega : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Il existe $\varepsilon > 0$ et $c \geq 1$ telle que pour $\lambda, \mu \in M_\varepsilon$ et $|b_\lambda(\mu)| \leq \varepsilon$ on a

$$\frac{1}{c}|\omega(\lambda)| \leq |\omega(\mu)| \leq c|\omega(\lambda)|. \tag{5.1}$$

2) Il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $c_1 \geq 1$ telle que pour $\lambda \in M_{\varepsilon_1}$ on a

$$(1-|\lambda^2|)|\omega'(\lambda)| \leq c_1\, |\omega(\lambda)|.$$

Preuve
Nous supposons $\varepsilon, \varepsilon_1 < 1/3$.
Soient ε, c comme dans 1) et posons $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$, $c_1 = (4/3)^2 c/(\varepsilon_1(1-\varepsilon_1^2))$. Prenons $\lambda \in M_{\varepsilon_1}$. Alors si $\mu \in \Omega\,(\lambda, \varepsilon_1)$, on a

$$|b_{|\mu|}(\mu)| < \varepsilon, \tag{5.2}$$
$$|b_\lambda(\mu)| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

La condition (5.3) est immédiate, car $\varepsilon_1 < \varepsilon$, et la condition (5.2) est une conséquence de l'inégalité triangulaire et du lemme 5.1.1 :

$$\begin{aligned} |b_{|\mu|}(\mu)| &\leq |b_\mu(\lambda)| + |b_\lambda(|\mu|)| \leq |b_\mu(\lambda)| + |b_{|\lambda|}(|\mu|)| + |b_{|\lambda|}(\lambda)| \leq 2|b_\mu(\lambda)| + \varepsilon_1 \\ &= 3\varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\mu \in \Omega\,(\lambda, \varepsilon_1)$ nous pouvons exploiter l'équivalence

$$\frac{1}{c}|\omega(\lambda)| \leq |\omega(\mu)| \leq c|\omega(\lambda)|.$$

La formule de Cauchy nous fournit

$$\omega'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega(\lambda,\varepsilon_1)} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-\lambda)^2}\, d\zeta.$$

Pour $\zeta \in \partial\Omega(\lambda, \varepsilon_1)$ nous avons $|\lambda - \zeta| = \varepsilon_1|1 - \overline{\lambda}\zeta| \geq 3/4\,\varepsilon_1(1 - |\lambda^2|)$ (cf. (3.4)). De plus, le disque pseudohyperbolique $\Omega(\lambda, \varepsilon_1)$ est au juste un disque euclidien de centre c et de rayon $r = \varepsilon_1(1 - |\lambda^2|)/(1 - \varepsilon_1^2|\lambda^2|)$ (cf. par exemple [8]). Ainsi nous pouvons majorer

$$\begin{aligned}
|\omega'(\lambda)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(c,r)} \frac{|\omega(\zeta)|}{|\zeta - \lambda|^2}\,|d\zeta|. \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1^2(1 - |\lambda^2|)^2} \max_{\zeta\in\partial\Omega(\lambda,\varepsilon_1)} |\omega(\zeta)| \int_{\partial D(c,r)} |d\zeta| \\
&\leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_1^2}\frac{1}{(1 - |\lambda^2|)^2}\, c\,|\omega(\lambda)|2\pi\varepsilon_1\frac{1 - |\lambda^2|}{1 - \varepsilon_1^2|\lambda^2|} \\
&\leq \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{c}{\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1^2)}}_{c_1} \frac{|\omega(\lambda)|}{1 - |\lambda^2|}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$(1 - |\lambda^2|)|\omega'(\lambda)| \leq c_1|\omega(\lambda)|.$$

Pour la réciproque, nous posons $\varepsilon = \varepsilon_1/(8c_1)$. Soit $\lambda \in M_\varepsilon$ et $\mu \in \Omega(\lambda, \varepsilon)$. Alors

$$|b_{|\mu|}(\mu)| \leq |b_\mu(\lambda)| + |b_{|\lambda|}(|\mu|)| + |b_\lambda(|\lambda|)| \leq 2|b_\mu(\lambda)| + \varepsilon \leq 3\varepsilon < \varepsilon_1.$$

Ceci nous permet d'appliquer l'assertion 2) pour $z \in \Omega(\lambda, \varepsilon)$. Choisissons $\lambda_0 \in \partial\Omega(\lambda, \varepsilon)$ tel que $|\omega(\lambda_0)| \geq |\omega(z)|$ pour $z \in \Omega(\lambda, \varepsilon)$. Ainsi

$$|\frac{\omega(\lambda)}{\omega(\mu)}| \leq |\frac{\omega(\lambda_0)}{\omega(\mu)}| = \frac{1}{|\omega(\mu)|}|\omega(\mu) + \int_\mu^{\lambda_0} \omega'(\zeta)\,d\zeta|$$

Or $[\mu, \lambda_0] \subset \overline{\Omega(\lambda, \varepsilon)}$, car $\Omega(\lambda, \varepsilon)$ est convexe et $\mu, \lambda_0 \in \overline{\Omega(\lambda, \varepsilon)}$

$$\leq 1 + \frac{1}{|\omega(\mu)|}|\lambda_0 - \mu|c_1 \max_{\zeta\in[\mu,\lambda_0]} \frac{|\omega(\zeta)|}{1 - |\zeta^2|}$$

Nous supposons sans perte de généralité $|\lambda_0| \geq |\mu|$,

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \frac{|\omega(\lambda_0)|}{|\omega(\mu)|}c_1\frac{|\lambda_0 - \mu|}{1 - |\lambda_0^2|} \\
&\leq 1 + \frac{|\omega(\lambda_0)|}{|\omega(\mu)|}c_1\,2\varepsilon\frac{|1 - \overline{\lambda}_0\mu|}{1 - |\lambda_0^2|} \\
&\leq 1 + \frac{6}{8}\frac{|\omega(\lambda_0)|}{|\omega(\mu)|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|\omega(\lambda_0)|}{|\omega(\mu)|}(1 - \frac{3}{4}) \leq 1,$$

ce qui implique

$$\frac{|\omega(\lambda)|}{|\omega(\mu)|} \leq \frac{1}{1 - 3/4} = 4.$$

Donc on pose $c = 4$.
En échangeant les rôles de λ et μ, on obtient la majoration inverse. ∎

Remarque
On peut démontrer cette proposition pour n'importe quel domaine Ω d'intérieur non-vide. Par contre, la validité de l'une des deux propriétés sur Ω entraîne la validité de l'autre seulement sur un domaine plus petit $\Omega' \subset \Omega$, qui vérifie $\mathrm{dist}_b(\partial\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon$, où $\mathrm{dist}_b(E_1, E_2) = \inf_{\lambda \in E_1, \mu \in E_2} |b_\lambda(\mu)|$ pour $E_1, E_2 \subset \mathbb{D}$.

Dans tout ce qui suit, nous allons travailler avec la formulation équivalente (5.1) de la condition 5) et à chaque fois que nous nous référerons à la condition 5) nous utiliserons en effet (5.1).

Nous aurons besoin d'une estimation des différences divisées par rapport à la métrique pseudohyperbolique pour une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.

Lemme 5.1.3 *Soit $f \in Hol\,(\mathbb{D})$. Supposons que $\sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{D}$, $N \in \mathbb{N}$, vérifie $|b_{\lambda_k}(\lambda_l)| < \varepsilon < 1/(3N)$, $k, l = 1, \ldots, N$. Alors il existe $u \in \partial\Omega\,(\lambda_1, (N+1)\varepsilon)$ tel que pour tout $k = 1, \ldots, N$, on a*

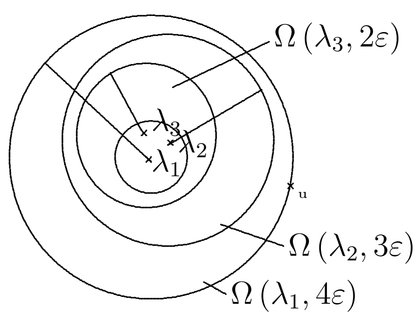
$$| \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})| \leq c_k |f(u)|,$$

et $c_k = (2/\varepsilon)^{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} 1/(N-l)$.

Preuve
Nous allons d'abord démontrer l'existence de $u \in \partial\Omega\,(\lambda_1, (N+1)\varepsilon)$ tel que pour $k = 1, \ldots, N-1$, et $z \in \mathbb{D}$ vérifiant $|b_{\lambda_k}(z)| \leq \varepsilon(N+2-k)$, nous avons

$$| \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, z)| \leq c_k |f(u)|. \tag{5.4}$$

Avec le choix $\varepsilon(N+2-k)$ comme rayon du disque pseudohyperbolique, on obtient, grâce à l'inégalité triangulaire, en particulier les inclusions $\Omega\,(\lambda_{k+1}, (N+1-k)\varepsilon) \subset \Omega\,(\lambda_k, (N+2-k)\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, N-1$.



Dessin 5 : Les voisinages emboîtés $\Omega\,(\lambda_k, (N+2-k)\varepsilon)$ (exemple pour $N = 3$)

Pour $k = 1$, prenons $u \in \partial\Omega(\lambda_1, (N+1)\varepsilon)$ avec $|f(u)| = \sup_{z \in \partial\Omega\,(\lambda,(N+1)\varepsilon)} |f(z)|$ (nous remarquons que l'on a toujours $\overline{\Omega\,(\lambda, \rho)} \subset \mathbb{D}$ pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et $\rho < 1$; or $(N+2-k)\varepsilon < 1$, et donc le

principe du maximum est applicable).
Supposons donc que l'on ait (5.4) pour $|b_{\lambda_k}(z)| \leq (N+2-k)\varepsilon$. Par définition, nous avons pour $k \leq N-1$

$$\triangle^k f(\lambda^{(k)}, z) = \frac{\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, z) - \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})}{b_{\lambda_k}(z)}.$$

Cette fonction se prolonge analytiquement en λ_k, et par conséquent, à l'aide du principe du maximum, nous obtenons pour $|b_{\lambda_{k+1}}(z)| \leq (N+1-k)\varepsilon$

$$\begin{aligned} |\triangle^k f(\lambda^{(k)}, z)| &\leq \sup_{\zeta \in \Omega\,(\lambda_{k+1}, (N+1-k)\varepsilon)} \left|\frac{\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \zeta) - \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})}{b_{\lambda_k}(\zeta)}\right| \\ &\leq \frac{2}{(N-k)\varepsilon} \sup_{\zeta \in \partial\Omega\,(\lambda_{k+1}, (N+1-k)\varepsilon)} |\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \zeta)|, \end{aligned}$$

car $|b_{\lambda_k}(\zeta)| \geq |b_{\lambda_{k+1}}(\zeta)| - |b_{\lambda_{k+1}}(\lambda_k)| \geq (N-k+1)\varepsilon - \varepsilon = (N-k)\varepsilon$. Or $\Omega\,(\lambda_{k+1}, (N+1-k)\varepsilon) \subset \Omega\,(\lambda_k, (N+2-k)\varepsilon)$, et on obtient donc

$$\sup_{\zeta \in \partial\Omega\,(\lambda_{k+1}, (N+1-k)\varepsilon)} |\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \zeta)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega\,(\lambda_k, (N+2-k)\varepsilon)} |\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \zeta)|,$$

ce que l'on peut majorer grâce à l'hypothèse de récurrence par $c_k|f(u)|$. Par conséquent

$$|\triangle^k f(\lambda^{(k)}, z)| \leq \underbrace{\frac{2}{(N-k)\varepsilon} c_k}_{c_{k+1}} |f(u)|.$$

En particulier, on en déduit $c_{k+1} = c_k \cdot 2/((N-k)\varepsilon) = (2/\varepsilon)^k \prod_{l=1}^{k} (1/(N-l))$.
Par hypothèse, pour $k = 1, \ldots, N$, nous avons $|b_{\lambda_k}(\lambda_{k+1})| < \varepsilon$ et donc $\lambda_{k+1} \in \Omega\,(\lambda_k, \varepsilon) \subset \Omega\,(\lambda_k, (N+2-k)\varepsilon)$. Ceci permet d'appliquer (5.4), et on obtient l'existence de $u \in \partial\Omega\,(\lambda_1, (N+1)\varepsilon)$ tel que

$$|\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})| \leq c_k |f(u)|.$$

$\square$

Définition 5.1.4 *Soit* $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$, $\sigma_n = \{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{|\sigma_n|}$, *la décomposition de* Λ *étudiée dans la proposition 3.1.1. Nous posons*

$$l^\infty_{\omega,\triangle} = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : |\triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})| \leq c_a \omega(|\lambda|),\ n \geq 1,\ k = 1, \ldots, |\sigma_n|,\ \lambda \in \sigma_n\},$$

et

$$H^\infty_\omega|_\Lambda = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : |f(z)| \leq c_f \omega(|z|), z \in \mathbb{D}\}.$$

Nous munissons H^∞_ω de la norme $\|f\|_{H^\infty_\omega} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(|f(z)|/\omega(|z|))$ et nous obtenons ainsi un espace de Banach.

5.2 Caractérisation de $H_\omega^\infty|_\Lambda$

Théorème 5.2.1 *Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$ et $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ la décomposition étudiée dans la proposition 3.1.1. Si $\omega(t) = \varphi(1/(1-t))$ vérifie les conditions 1)-5) du premier paragraphe, alors nous avons*

$$H_\omega^\infty|_\Lambda = l_{\omega,\triangle}^\infty.$$

Preuve
Pour $\varepsilon_0 > 0$, nous pouvons choisir la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ (cf. (3.3)) telle que l'on ait

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &\leq N, \quad n \geq 1, \\ |b_\lambda(\mu)| &< \varepsilon_0, \quad \lambda, \mu \in \sigma_n,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Pour des raisons techniques que nous verrons plus tard, nous allons choisir la décomposition telle que

$$\varepsilon_0 < \varepsilon/12N < 1/3,$$

où ε est donné par le poids ω (cf. (5.1)).
D'après les résultats du chapitre 4, il existe une suite de fonctions $\{D_n\}_{n\geq 1} \subset H^\infty$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &1) \qquad D_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in \sigma_n \\ 0 & \lambda \in \Lambda \setminus \sigma_n \end{cases}, \\ &2) \quad \sum_{n\geq 1} |D_n(z)| \leq M, \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Nous commençons donc par l'inclusion $l_{\omega,\triangle}^\infty \subset H_\omega^\infty|_\Lambda$. Nous allons définir un opérateur

$$\begin{aligned} \Phi : l_{\omega,\triangle}^\infty &\longrightarrow H_\omega^\infty \\ a &\longmapsto \Phi(a), \end{aligned}$$

par

$$f(z) = \Phi(a)(z) = \sum_{n\geq 1} D_n(z)\psi_n(z) \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{k,l}}(z) \triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)}),$$

avec

$$\psi_n(z) = \varphi\left(\frac{\lambda_{n,0}}{\lambda_{n,0} - |\lambda_{n,0}|z}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1 - \frac{|\lambda_{n,0}|}{\lambda_{n,0}} z}\right),$$

et $\lambda_{n,0} \in \sigma_n$ tel que $|\lambda_{n,0}| \geq |\lambda|$, $\lambda \in \sigma_n$.
Il s'avérera que Φ est justement l'opérateur linéaire d'interpolation. Dans ce but, nous avons à démontrer :

$$f \in H_\omega^\infty, \tag{5.5}$$

$$f(\lambda) = a(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda. \tag{5.6}$$

Commençons par (5.5). Nous appliquons successivement l'inégalité triangulaire, les propriétés 4), 3) de ω et la définition de ω :

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \sum_{n\geq 1} |D_n(z)|\,|\varphi\left(\frac{1}{1-\frac{|\lambda_{n,0}|}{\lambda_{n,0}}z}\right)|\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)})| \\
&\leq c\sum_{n\geq 1} |D_n(z)|\,\varphi\left(|\frac{1}{1-\frac{|\lambda_{n,0}|}{\lambda_{n,0}}z}|\right)\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)})| \\
&\leq c\sum_{n\geq 1} |D_n(z)|\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)})| \\
&\leq cM\,\omega(|z|)\sup_{n\geq 1}\{\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)})|\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Ceci nous ramène donc à démontrer pour $a \in l^\infty_{\omega,\triangle}$:

$$\sup_{n\geq 1}\{\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)})|\} < \infty.$$

Nous allons appliquer la règle de Leibnitz discrétisée (cf. lemme 3.4.3). Pour alléger les notations, nous écrirons dans la suite $\lambda_0 = \lambda_{n,0}$, $\lambda_k = \lambda_{n,k}$ et $r = |\sigma_n|$:

$$\triangle^{k-1}\left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda^{(k)}) = \triangle^{k-1}\left(a\cdot\frac{1}{\psi_n}\right)(\lambda^{(k)}) = \sum_{j=0}^{k-1}\triangle^{k-1-j}a(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-j})\,\triangle^j\frac{1}{\psi_n}(\lambda_{k-j},\ldots,\lambda_k). \tag{5.8}$$

Et il suffit de démontrer

$$|\triangle^j\frac{1}{\psi_n}(\lambda_{k-j},\ldots,\lambda_k)| \leq c\frac{1}{\omega(|\lambda|)}, \quad \lambda\in\sigma_n. \tag{5.9}$$

Dans ce but nous effectuons une récurrence. Remarquons d'abord qu'avec le changement

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= |\lambda_0| \\
\mu_k &= \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0}\lambda_k, \quad k=1,\ldots,r,
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\psi_n(\lambda_k) = \omega(\mu_k),$$

(si on prolonge ω à $\mathbb{D}$ comme signalé dans le premier paragraphe). Remarquons aussi que l'ensemble $\tilde{\sigma}_n = \{\mu_k\}_{k=1}^r$ vérifie

1) $\tilde{\sigma}_n \subset M_{\varepsilon/(4N)}$
2) $|b_{\mu_k}(\mu_l)| < \varepsilon/(12N), \quad k,l=1,\ldots,r.$

En effet, comme $|\lambda_0|/\lambda_0$ est de module 1, nous obtenons

$$|b_{\mu_k}(\mu_l)| = |b_{\lambda_k}(\lambda_l)| < \varepsilon_0 < \varepsilon/(12N),$$

ce qui démontre 2). Démontrons donc 1). Nous avons

$$|b_{|\mu_k|}(\mu_k)| = |\frac{|\mu_k| - \mu_k}{1 - |\mu_k|\mu_k}| = |\frac{|\lambda_k| - \mu_k}{1 - |\lambda_k|\mu_k}|.$$

On minore le dénominateur $|1 - |\lambda_k|\mu_k| \geq 1 - |\lambda_k^2|$, et on majore le numérateur

$$\begin{aligned} |\,|\lambda_k| - \mu_k| &= |\,|\lambda_k| - |\lambda_0| + |\lambda_0| - \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0}\lambda_k| \leq |\,|\lambda_k| - |\lambda_0|| + |\lambda_0|\,|\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0 - \lambda_k)| \\ &\leq |\lambda_k - \lambda_0| + |\lambda_0 - \lambda_k| \leq 2\varepsilon_0|1 - \overline{\lambda}_k\lambda_0|. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$|b_{|\mu_k|}(\mu_k)| \leq 2\varepsilon_0\frac{|1 - \overline{\lambda}_k\lambda_0|}{1 - |\lambda_k^2|}.$$

Or $\varepsilon_0 < \varepsilon/(12N) < 1/3$ entraîne

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1 - |\lambda_k^2|}{|1 - \overline{\lambda}_k\lambda_0|} \leq \frac{4}{3}$$

(cf. (3.4)), ce qui implique donc

$$|b_{|\mu_k|}(\mu_k)| \leq 2\varepsilon_0\frac{3}{2} = 3\varepsilon_0 < \varepsilon/(4N).$$

Afin de démontrer (5.9), il suffit donc de démontrer

$$|\triangle^j \frac{1}{\omega}(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k)| \leq c\frac{1}{\omega(|\lambda|)}, \quad \lambda \in \sigma_n, \tag{5.10}$$

(nous remarquons que $|\lambda| = |\mu|$ pour $\mu \in \tilde{\sigma}_n$), si

$$\begin{aligned} \mu_k &\in M_{\varepsilon/(4N)}, \quad k = 1, \ldots, r \\ |b_{\mu_k}(\mu_l)| &< \varepsilon/(12N), \quad k, l = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Commençons par le cas $j = 0$:

$$|\triangle^0 \frac{1}{\omega}(\mu_k)| = |\frac{1}{\omega}(\mu_k)| \leq c|\frac{1}{\omega}(\mu)| \leq c^2\frac{1}{\omega(|\mu|)}, \quad \mu \in \tilde{\sigma}_n,$$

d'après 5).
Considérons donc le cas $j \geq 1$:
Nous appliquons à nouveau la règle de Leibnitz discrétisée :

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle^j(1)(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k) = \triangle^j(\omega \cdot \frac{1}{\omega})(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \triangle^{j-l}\omega(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_{k-l}) \triangle^l \frac{1}{\omega}(\mu_{k-l}, \ldots, \mu_k). \end{aligned}$$

Nous isolons le terme $l = j$:

$$\triangle^j \frac{1}{\omega}(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k) = \frac{-1}{\omega(\mu_{k-j})} \sum_{l=0}^{j-1} \triangle^{j-l} \omega(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_{k-l}) \triangle^l \frac{1}{\omega}(\mu_{k-l}, \ldots, \mu_k). \tag{5.12}$$

Par hypothèse de récurrence (5.10), nous pouvons supposer

$$| \triangle^l \frac{1}{\omega}(\mu_{k-l}, \ldots, \mu_k)| \leq c \frac{1}{\omega(|\mu|)}, \quad l < j. \tag{5.13}$$

Afin de démontrer (5.10), il suffit donc d'estimer

$$| \triangle^{j-l} \omega(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_{k-l})| \leq c\omega(|\mu|), \tag{5.14}$$

car on a déjà vu

$$|\frac{1}{\omega(\mu_{k-j})}| \leq c|\frac{1}{\omega(\mu)}| \leq c^2 \frac{1}{\omega(|\mu|)}, \quad \mu \in \tilde{\sigma}_n.$$

Nous avons donc besoin de l'estimation (5.14), que nous considérons sous la forme

$$| \triangle^k \omega(\mu_1, \ldots, \mu_{k+1})| \leq c\omega(|\mu|), \quad \mu \in \tilde{\sigma}_n.$$

Or $|b_{\mu_k}(\mu_l)| < \varepsilon/(12N)$, $k, l = 1, \ldots, N$, et $\omega \in Hol\,(\mathbb{D})$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 5.1.3 à ω pour obtenir l'existence de $u \in \Omega\,(\mu_1, (N+1)\varepsilon_0) \subset \Omega\,(\mu_1, \varepsilon/4)$, tel que

$$| \triangle^k \omega(\mu^{(k+1)})| \leq c_{k+1}|\omega(u)|.$$

Or $|\omega(u)| \leq c|\omega(\mu_1)| \leq c^2\omega(|\mu_1|) \leq c^3\omega(|\mu|)$, car $u \in \Omega\,(\mu_1, \varepsilon/4)$ et (cf. la preuve de la proposition 5.1.2) $|b_u(|u|)| < \varepsilon$. Ainsi nous obtenons (5.14).
Reprenons (5.12) :

$$\begin{aligned} | \triangle^j \frac{1}{\omega}(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k)| &\leq |\frac{1}{\omega(\mu_{k-j})}| \sum_{l=0}^{j-1} | \triangle^{j-l} \omega(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_{k-l})| \, | \triangle^l \frac{1}{\omega}(\mu_{k-l}, \ldots, \mu_k)| \\ &\leq c \frac{1}{\omega(|\mu_{k-j}|)} \sum_{l=0}^{j-1} c\, \omega(|\mu|)\, c \frac{1}{\omega(|\mu|)} \\ &\leq C \frac{1}{\omega(|\mu|)}. \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons exploiter cette majoration dans (5.8).

$$\begin{aligned} | \triangle^{k-1} \left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda^{(k)})| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} | \triangle^{k-1-j} a(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-j})| \, | \triangle^j \frac{1}{\psi_n}(\lambda_{k-j}, \ldots, \lambda_k)| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} | \triangle^{k-1-j} a(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-j})| \, | \triangle^j \frac{1}{\omega}(\mu_{k-j}, \ldots, \mu_k)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} | \triangle^{k-1-j} a(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-j})| \, C \frac{1}{\omega(|\mu|)}. \end{aligned}$$

Or, par définition de $l^\infty_{\omega,\triangle}$ nous avons $| \triangle^{l-1} a(\lambda^{(l)})| \leq c_a\omega(|\lambda|)$ et $\omega(|\lambda|) = \omega(|\mu|)$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} C\, c_a,$$

ce qui démontre maintenant — à partir de (5.7) :

$$|f(z)| \leq C_0\, M\, \omega(|z|).$$

Donc $f \in H^\infty_\omega|_\Lambda$. Afin d'achever la démonstration de $l^\infty_{\omega,\triangle} \subset H^\infty_\omega|_\Lambda$, il nous reste à vérifier la propriété d'interpolation (5.6). Or $D_n(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \sigma_n$, $D_n(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma_n$, et à l'aide du lemme 4.1.1 :

$$\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,l}}(\lambda) \triangle^{k-1} \left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)}) = \frac{a}{\psi_n}(\lambda),$$

si $\lambda \in \sigma_n$. Par conséquent, si $\lambda \in \Lambda$, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \in n_0$, nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{n \geq 1} D_n(\lambda)\psi_n(\lambda) \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{k,l}}(\lambda) \triangle^{k-1} \left(\frac{a}{\psi_n}\right)(\lambda_n^{(k)}) \\ &= D_{n_0}(\lambda)\psi_{n_0}(\lambda) \sum_{k=1}^{|\sigma_{n_0}|} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{n_0,l}}(\lambda) \triangle^{k-1} \left(\frac{a}{\psi_{n_0}}\right)(\lambda_{n_0}^{(k)}) \\ &= a(\lambda), \end{aligned}$$

ce qui démontre $f|_\Lambda = a$ et donc $a \in H^\infty_\omega|_\Lambda$.

Nous démontrons l'inclusion inverse :

$$H^\infty_\omega|_\Lambda \subset l^\infty_{\omega,\triangle}.$$

Soit $f \in H^\infty_\omega \subset Hol\,(\mathbb{D})$. Comme $|b_{\lambda_k}(\lambda_l)| < \varepsilon/12N$, nous pouvons à nouveau appliquer le lemme 5.1.3 pour obtenir l'existence de $u_n \in \Omega\,(\lambda_{n,1}, \varepsilon/6)$, $n \geq 1$ tel que

$$|\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})| \leq c|f(u_n)| \leq c\,\omega(|u_n|), \quad n \geq 1, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Comme $b_{|\lambda_{n,1}|}(|u_n|) \leq |b_{\lambda_{n,1}}(u_n)| < \varepsilon/6$, nous pouvons remplacer $\omega(|u_n|)$ par $c\omega(|\lambda|)$, $\lambda \in \sigma_n$. D'où

$$|\triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})| \leq c\,\omega(|\lambda|), \quad \lambda \in \sigma_n, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Posons

$$a(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda,$$

alors sur σ_n, obtenu dans le paragraphe 3.1, nous avons $|b_\lambda(\mu)| < \varepsilon/6$, $\lambda, \mu \in \sigma_n$, ce qui entraîne

$$|\triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})| = |\triangle^{k-1} f(\lambda_n^{(k)})| \leq c\,\omega(|\lambda_{n,0}|)$$

pour $\lambda_{n,0} \in \sigma_n$, et par conséquent

$$f|_\Lambda = a \in l^\infty_{\omega,\triangle},$$

ce qui démontre finalement $H^\infty_\omega|_\Lambda \subset l^\infty_{\omega,\triangle}$. ■

5.3 Deux exemples d'un poids ω

Comme le nombre de conditions imposées au poids ω est assez impressionnant, il paraît naturel de se poser la question de savoir s'il existe un poids qui les vérifie. En voici deux exemples :

Exemple 1

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^r, \quad t \in [0,1), \quad r > 0.$$

La fonction ω est bien continue et croissante sur $[0,1)$. Avec

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}_{1/2} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^r, \end{array}$$

nous avons

$$\omega(t) = \varphi\left(\frac{1}{1-t}\right), \quad t \in [0,1).$$

On vérifie directement les hypothèses 1)-4) pour φ. Etudions donc la dernière condition. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$ et prenons $\varepsilon < 1/3$. Alors si $|b_\lambda(\mu)| < \varepsilon$ — sans tenir compte de la condition supplémentaire $\lambda, \mu \in M_\varepsilon$ — nous avons

$$\begin{array}{rcl} |\dfrac{\omega(\lambda)}{\omega(\mu)}| & = & |\dfrac{1-\lambda}{1-\mu}|^r = |1 - \dfrac{\lambda-\mu}{1-\mu}|^r \leq \left\{1 + |\dfrac{\lambda-\mu}{1-\overline{\mu}\lambda}|\,|\dfrac{1-\overline{\mu}\lambda}{1-\mu}|\right\}^r \\ & \leq & \left\{1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{|1-\overline{\mu}\lambda|}{1-|\mu|}\right\}^r \leq \left\{1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{|1-\overline{\mu}\lambda|}{1-|\mu^2|}\right\}^r \leq (1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{3}{2})^r = 2^r. \end{array}$$

En échangeant les rôles de λ et μ, on obtient l'estimation pour $|\omega(\mu)/\omega(\lambda)|$. On obtient donc $c = 2^r$ dans la condition 5).
On désigne souvent par A^{-r} les espaces associés à un tel poids.

Exemple 2

$$\omega\,(t) = ln\left(\frac{1}{1-t}\right) + \pi, \quad t \in [0,1).$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}_{1/2} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & Log\, z + \pi. \end{array}$$

Cette fonction est bien régulière sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et elle vérifie les conditions 2) et 3). Nous vérifions l'hypothèse 4) sur $\mathbb{C}_{1/2}$.

$$|Log\, z + \pi| = |ln|z| + iArg\,(z) + \pi| \leq ln|z| + 2\pi \leq (1 + \frac{\pi}{\pi - ln\, 2})(ln|z| + \pi).$$

Nous étudions la propriété 5). D'après la discussion dans le premier exemple, nous avons $|1-\lambda|/|1-\mu| \leq 2$, si $|b_\lambda(\mu)| < 1/3$. Ceci implique

$$\begin{aligned} |\omega(\lambda) - \omega(\mu)| &= |Log \frac{1}{1-\lambda} - Log \frac{1}{1-\mu}| \leq |Log \frac{1-\mu}{1-\lambda}| + 2\pi \\ &\leq ln|\frac{1-\mu}{1-\lambda}| + 3\pi \\ &\leq ln2 + 3\pi. \end{aligned}$$

Nous posons $c = ln2 + 3\pi$. Pour $\mu \in \mathbb{D}$, nous obtenons la minoration

$$|\omega(\mu)| = |Log \frac{1}{1-\mu} + \pi| = |ln|\frac{1}{1-\mu}| + \pi + iArg(\frac{1}{1-\mu})| \geq \pi - ln\,2.$$

Finalement, nous pouvons majorer

$$\begin{aligned} |\omega(\lambda)| &\leq |\omega(\mu)| + |\omega(\lambda) - \omega(\mu)| \leq |\omega(\mu)| + c = |\omega(\mu)| + c\frac{\pi - ln\,2}{\pi - ln\,2} \\ &\leq (1 + \frac{c}{\pi - ln\,2})|\omega(\mu)|. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de λ et μ, nous obtenons l'estimation inverse. Ainsi, comme dans le premier exemple, ω vérifie la condition 5) sous la seule restriction $|b_\lambda(\mu)| < 1/3$.

Chapter 6

Caractérisation des traces $X|_\Lambda$ pour d'autres espaces

Dans ce chapitre, X sera un espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ (nous n'avons plus besoin de le considérer comme la partie analytique d'un espace de fonctions mesurables).
Dans le premier paragraphe, nous allons donner une autre construction de l'opérateur d'interpolation toujours basée sur la famille $(D_n)_{n\geq 1}$, qui n'utilisera pas l'interpolation locale, mais plutôt une interpolation globale. Cette construction permettra de décrire l'espace des traces de X, si X vérifie une certaine condition de stabilité (que nous allons définir), sur les réunions finies de suites de Carleson, même si celui-ci n'admet pas une famille de fonctions interpolant localement et permettant une majoration uniforme de la norme.
Dans le deuxième paragraphe, nous allons donner des exemples d'espaces auxquels on peut appliquer cette description. Un exemple intéressant qui rentre dans le cadre de cette approche générale est le cas de l'espace de Bergman.

6.1 Le résultat général

Nous allons d'abord définir la propriété de stabilité des suites de Carleson par rapport à une perturbation dans la métrique pseudohyperbolique du disque (cf. [14]) :

Définition 6.1.1 *Soit $X \subset Hol\,(\mathbb{D})$. Nous dirons que X est stable, si pour toute suite de Carleson $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que pour toute suite $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ avec*

$$|b_{\lambda_n}(\tilde{\lambda}_n)| < \varepsilon, \quad n \geq 1, \tag{6.1}$$

nous avons

$$X|_\Lambda = X|_{\tilde{\Lambda}}.$$

Remarque
Cette définition peut être affaiblie dans un espace vérifiant $H^\infty X \subset X$.

Nous supposons que X est un sous-espace vectoriel de $Hol\,(\mathbb{D})$ vérifiant les conditions suivantes :
1) $H^\infty X \subset X$,
2) X est *stable.*

Remarques
Nous verrons à la fin de ce chapitre des exemples d'espaces stables.

Nous définissons aussi l'ensemble des suites d'interpolation libre de l'espace X (cf. [14]).

Définition 6.1.2 *Soit $X \subset Hol\,(\mathbb{D})$ et $\Lambda \in \mathbb{D}$. Nous disons que Λ est une suite d'interpolation libre, et nous écrivons $\Lambda \in Int\,(X)$, si $l = X|_\Lambda$ est un espace idéal (voir l'introduction du paragraphe 2.1 pour la définition d'un espace idéal de suites).*

D'après la remarque qui suit le théorème 1.4.1, nous avons le

Lemme 6.1.3 *Si $\Lambda \in (C)$, alors $\Lambda \in Int\,(X)$.*

□

Soit maintenant $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N$, $\Lambda_i \in (C)$. Nous posons

$$l = X|_{\Lambda_1}$$

et obtenons ainsi — d'après le lemme précédent — un espace idéal l. Comme $\Lambda_1 \in (C)$ et X est stable, il existe ε tel que toute suite $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{D}$ ayant la propriété (6.1) vérifie $X|_\Lambda = X|_{\tilde{\Lambda}}$. Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ la décomposition de Λ étudiée dans le paragraphe 3.1. Nous la choisissons telle que $|b_\lambda(\mu)| < \varepsilon/4N$ si $\lambda, \mu \in \sigma_n$, $n \geq 1$. Pour des raisons techniques nous supposons que $\Lambda_i = \bigcup_{n\geq 1, i\leq |\sigma_n|}\{\lambda_{n,i}\}$, où $\sigma_n = \{\lambda_{n,i}\}_{i=1}^{|\sigma_n|}$.
Nous définissons l'espace de suites

$$l_N = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : (\sup_{k=1,\dots,|\sigma_n|} |\triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})|)_{n\geq 1} \in l\},$$

qu'on peut toujours interpréter comme un espace de Sobolev discret. Nous remarquons que — puisque $\sup_{n\geq 1} |\sigma_n| < \infty$ — nous pouvons remplacer la norme locale l^∞ par n'importe quelle norme l^p.
Nous obtenons le

Théorème 6.1.4 *Soient $X \subset Hol\,(\mathbb{D})$ un espace vérifiant les hypothèses 1)-2), $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$ et $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ la décomposition étudiée dans la proposition 3.1.1. Alors*

$$X|_\Lambda = l_N.$$

Preuve
Nous commençons par l'inclusion $X|_\Lambda \subset l_N$:
Soit $f \in X \subset Hol\,(\mathbb{D})$. Comme $|b_\lambda(\mu)| < \varepsilon/(4N)$, $\lambda, \mu \in \sigma_n$, nous avons à l'aide du lemme 5.1.3 l'existence de $\lambda_{n,0} \in \overline{\Omega\,(\lambda_{n,1}, \varepsilon/2)}$ tel que

$$|\triangle^{k-1} f(\lambda_n^{(k)})| \leq c|f(\lambda_{n,0})|, \quad n \geq 1, \quad k = 1, \dots, |\sigma_n|.$$

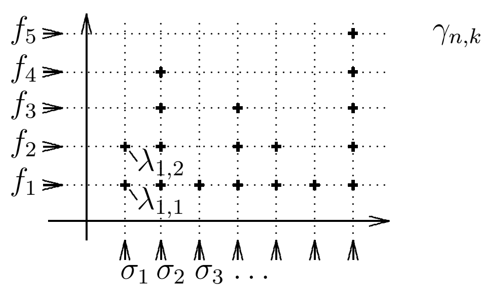
Or comme X est stable, l est idéal et $|b_{\lambda_{n,1}}(\lambda_{n,0})| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, nous avons $(|f(\lambda_{n,0})|)_{n\geq 1} \in l$ ce qui démontre l'inclusion $X|_\Lambda \subset l_N$.
Montrons donc l'inclusion inverse $l_N \subset X|_\Lambda$. A l'aide des résultats du chapitre 4, nous allons construire un opérateur d'interpolation semi-implicite.
Soit donc $(a_{n,k})_{n\geq 1,k=1,\ldots,|\sigma_n|} = (a(\lambda_{n,k}))_{n\geq 1,k=1,\ldots,|\sigma_n|} \in l_N$. Posons $\alpha_{n,k} = \triangle^{k-1}a(\lambda_n^{(k)})$ si $k \leq |\sigma_n|$ et $\alpha_{n,k} = 0$ sinon. D'après l'hypothèse, on a $(\alpha_{n,k})_{n\geq 1} \in l$ pour $k = 1,\ldots,N$. Soit $(D_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions construite dans le chapitre 4. Nous allons démontrer l'existence des fonctions f_l, $l = 1,\ldots,N$, telles que la fonction

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} D_n(z) \sum_{l=1}^{|\sigma_n|} \prod_{k=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,k}}(z) f_l(z) = \sum_{l=1}^{N} f_l(z) \sum_{n\geq 1, l\leq|\sigma_n|} D_n(z) \prod_{k=1}^{\min(l-1,|\sigma_n|-1)} b_{\lambda_{n,k}}(z),$$

interpole bien les valeurs $a_{n,k}$ dans les points $\lambda_{n,k}$. Dans ce but, nous allons poser

$$\begin{aligned} \gamma_{n,1} &= a_{n,1}, \\ \gamma_{n,k} &= \frac{a_{n,k} - \sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) f_l(\lambda_{n,k})}{\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})}, \quad k = 1,\ldots,|\sigma_n|. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Et nous allons démontrer l'existence de N fonctions f_l, $l = 1,\ldots,N$, qui interpolent $(\gamma_{n,l})_{n\geq 1}$, $l = 1,\ldots,N$. En vue du dessin suivant, nous allons parler d'interpolation "horizontale".



Dessin 6 : Interpolation horizontale

En effet, si les fonctions f_l, $l = 1,\ldots,N$, interpolent les suites $(\gamma_{n,l})_{n\geq 1}$, $l = 1,\ldots,N$, alors pour $k \leq |\sigma_n|$:

$$\begin{aligned} f(\lambda_{n,k}) &= \sum_{m\geq 1} D_m(\lambda_{n,k}) \sum_{l=1}^{|\sigma_m|} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{m,j}}(\lambda_{n,k}) f_l(\lambda_{n,k}) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) f_l(\lambda_{n,k}) + \prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \underbrace{f_k(\lambda_{n,k})}_{\gamma_{n,k}} \\ &= a_{n,k}. \end{aligned}$$

Nous avons besoin du

Lemme 6.1.5 *Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq |\sigma_n|$. Alors*

$$\gamma_{n,k} = \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)}) - \sum_{i=1}^{k-1} \triangle^{k-i} f_i(\lambda_{n,i},\ldots,\lambda_{n,k}). \tag{6.3}$$

Preuve
Nous allons effectuer une récurrence.
Soit $k = 1$. Alors

$$\gamma_{n,1} = a_{n,1} = \triangle^0 a(\lambda_n^{(1)}) - \sum_{l=1}^{1-1} \triangle^{k-l} f_l(\lambda_{n,l}, \ldots, \lambda_{n,1}).$$

Soit $1 \leq k \leq \sigma_n$. Supposons donc pour $l < k$

$$f_l(\lambda_{n,l}) = \gamma_{n,l} = \triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)}) - \sum_{j=1}^{l-1} \triangle^{l-j} f_j(\lambda_{n,j}, \ldots, \lambda_{n,l}).$$

Nous utilisons la fonction qui interpole les valeurs $(a_{n,k})_{k=1}^{|\sigma_n|}$ (voir le lemme 4.1.1) :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \sum_{l=1}^{k} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)}) \\ &= \prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)}) + \sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)}). \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette quantité dans (6.2) et nous obtenons :

$$\gamma_{n,k} = \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)}) - \frac{\sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})(f_l(\lambda_{n,k}) - \triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)}))}{\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})},$$

ce qui nous ramène à considérer le dernier terme. Nous avons à vérifier

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})(f_l(\lambda_{n,k}) - \triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)})) \\ &\qquad = \prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \sum_{i=1}^{k-1} \triangle^{k-i} f_i(\lambda_{n,i}, \ldots, \lambda_{n,k}). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence pour $l < k$

$$\triangle^{l-1} a(\lambda_n^{(l)}) = f_l(\lambda_{n,l}) + \sum_{m=1}^{l-1} \triangle^{l-m} f_m(\lambda_{n,m}, \ldots, \lambda_{n,l}),$$

ce qui nous ramène à montrer

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})(f_l(\lambda_{n,k}) - f_l(\lambda_{n,l}) - \sum_{m=1}^{l-1} \triangle^{l-m} f_m(\lambda_{n,m}, \ldots, \lambda_{n,l})) \\ &\qquad = \prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k}) \sum_{i=1}^{k-1} \triangle^{k-i} f_i(\lambda_{n,i}, \ldots, \lambda_{n,k}), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})(f_l(\lambda_{n,k})-f_l(\lambda_{n,l}))\\
&\quad=\sum_{l=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\sum_{m=1}^{l-1}\triangle^{l-m} f_m(\lambda_{n,m},\dots,\lambda_{n,l})\\
&\qquad\quad+\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\sum_{i=1}^{k-1}\triangle^{k-i} f_i(\lambda_{n,i},\dots,\lambda_{n,k})\\
&\quad=\sum_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\sum_{i=1}^{l-1}\triangle^{l-i} f_i(\lambda_{n,i},\dots,\lambda_{n,l})\\
&\quad=\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l-1}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{l-i}\, f_i(\lambda_{n,i},\dots,\lambda_{n,l}).
\end{aligned}\tag{6.5}$$

Or, en utilisant la fonction qui interpole $(f_l(\lambda_{n,k}))_{k=1}^{|\sigma_n|}$, nous avons pour $k \geq l$

$$f_l(\lambda_{n,k})=\sum_{j=l}^{k}\prod_{m=l}^{j-1} b_{\lambda_{n,m}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{j-l}\, f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,j}),$$

et par conséquent

$$f_l(\lambda_{n,k})-f_l(\lambda_{n,l})=\sum_{i=l+1}^{k}\prod_{m=l}^{i-1} b_{\lambda_{n,m}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{i-l}\, f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,i}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})(f_l(\lambda_{n,k})-f_l(\lambda_{n,l}))\\
&\quad=\sum_{l=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{l-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\left(\sum_{i=l+1}^{k}\prod_{m=l}^{i-1} b_{\lambda_{n,m}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{i-l}\, f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,i})\right)\\
&\quad=\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=l+1}^{k}\prod_{j=1}^{i-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{i-l}\, f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,i})\\
&\quad=\sum_{i=2}^{k}\sum_{l=1}^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1} b_{\lambda_{n,j}}(\lambda_{n,k})\,\triangle^{i-l}\, f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,i}).
\end{aligned}$$

Comme le terme $l = 1$ dans (6.5) est 0, nous obtenons ainsi le lemme. $\square$

Revenons donc à la démonstration du théorème. Nous avons vu qu'il existe une fonction f_1 qui interpole la suite $(\gamma_{n,1})_{n\geq 1}$. Nous construisons les fonctions f_l, $l = 2, \dots, N$ par récurrence. Posons $\tilde{\gamma}_{n,k} = \gamma_{n,k}$ si $k \leq |\sigma_n|$ et $\tilde{\gamma}_{n,k} = 0$ sinon. Nous démontrons $(\tilde{\gamma}_{n,k})_{n\geq 1} \in l$. En vertu du lemme 5.1.3, nous obtenons l'existence de $z_{n,l,k} \in \partial\Omega\,(\lambda_{n,1}, \varepsilon/2)$, $n \geq 1$, $k = 1, \dots, |\sigma_n|$, $l = 1, \dots, k-1$, tel que

$$|\triangle^{k-l} f_l(\lambda_{n,l},\dots,\lambda_{n,k})| \leq c|f_l(z_{n,k,l})|,$$

et il existe donc $\tilde{\lambda}_n \in \{z_{n,k,l}\}_{k=1,\ldots,|\sigma_n|,l=1,\ldots,k-1}$ avec $|b_{\lambda_{n,1}}(\tilde{\lambda}_n)| \leq \varepsilon/2$, $n \geq 1$, tel que

$$| \triangle^{k-l} f_l(\lambda_{n,l}, \ldots, \lambda_{n,k})| \leq c|f_l(\tilde{\lambda}_n)|$$

pour $k = 1, \ldots, |\sigma_n|$, $l = 1, \ldots, k-1$. On obtient

$$|\tilde{\gamma}_{n,k}| \leq \sup_{k=1,\ldots,|\sigma_n|} | \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})| + N|f_l(\tilde{\lambda}_n)|.$$

Or $(\sup_{k=1,\ldots,|\sigma_n|} | \triangle^{k-1} a(\lambda_n^{(k)})| + N|f_l(\tilde{\lambda}_n)|)_{n\geq 1} \in l$ car chacun des termes de cette suite est dans l et par conséquent $(\tilde{\gamma}_{n,k})_{n\geq 1} \in l$. Comme $|b_{\lambda_{n,1}}(\lambda_{n,k})| < \varepsilon/4 \leq \varepsilon/2$, $n \geq 1$, il existe une fonction f_k telle que

$$f_k(\lambda_{n,k}) = \gamma_{n,k}$$

si $k \leq |\sigma_n|$, $n \geq 1$.
Nous remarquons que nous avons implicitement ajouté des points aux groupes σ_n pour obtenir des groupes $\tilde{\sigma}_n$ ayant N éléments et si $k > |\sigma_n|$ alors f_k interpole la valeur 0 ($= \tilde{\gamma}_{n,k}$) en ces points. ∎

6.2 Les exemples

Les deux premiers exemples, que nous allons donner, étaient déjà étudiés dans les chapitres précédents. Pour les espaces de Hardy et l'espace H^∞_ω, nous avons pu construire un opérateur linéaire continu d'interpolation. Dans ces cas, la construction donnée dans la preuve du théorème 6.1.4 représente une certaine perte d'informations, car nous n'avons pas pu démontrer la linéarité et la continuité (la construction des fonctions $(f_l)_{l=1}^N$ étant implicite) de cet opérateur. Nous ajoutons quand même ces exemples pour montrer la généralité du théorème 6.1.4.
Le cas de l'espace de Bergman représente par contre un nouveau résultat. En fait, l'ensemble des suites d'interpolation de B^p_α est plus grand que celui des suites de Carleson. Mais les réunions finies de suites de Carleson ne sont en général pas d'interpolation dans B^p_α, car une condition nécessaire pour être une suite d'interpolation dans B^p_α est que Λ soit uniformément séparée (cf. par exemple [14]).

L'espace de Hardy H^p

La propriété 1) est immédiate. La stabilité de H^p est une conséquence de la stabilité des suites de Carleson et de la caractérisation $H^p|_\Lambda = \{a \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n^2|)|a_n|^p < \infty\}$ (cf. [28] ou théorème 3.3.1). En effet si $\Lambda \in (C)$ et si $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq 1}$ vérifie $|b_{\lambda_n}(\tilde{\lambda}_n)| < \varepsilon$ avec $\varepsilon < \delta/4$, où δ est la constante de Carleson pour Λ, alors, d'après le lemme 9 de [32] par exemple, nous obtenons en $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq 1}$ une suite de Carleson. De plus, comme $|b_{\lambda_n}(\tilde{\lambda}_n)| < \varepsilon$, le poids $(1 - |\lambda_n^2|)$ est comparable au poids $(1 - |\tilde{\lambda}_n^2|)$ (cf. aussi (3.4)) et donc $H^p|_\Lambda = H^p|_{\tilde{\Lambda}}$.
Le théorème général 6.1.4 nous permet maintenant d'étudier le cas $p = 1$. En effet, si Λ_1 est une suite de Carleson, alors, d'après le résultat de H. S. Shapiro et A. L. Shields [28], nous avons la caractérisation attendue

$$H^1|_\Lambda = l = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : \sum_{\lambda\in\Lambda_1} (1 - |\lambda^2|)|a_\lambda| < \infty\},$$

et ainsi, on obtient

$$H^1|_\Lambda = X^1.$$

Nous remarquons que l'opérateur d'interpolation construit dans le théorème 4.2.1 montre déjà l'inclusion $X^1 \subset H^1|_\Lambda$. Pour l'inclusions inverse, il suffit d'appliquer la première partie de la démonstration du théorème 6.1.4 (basée sur le lemme 5.1.3), et d'utiliser la caractérisation de H. S. Shapiro et A. L. Shields [28] (qui justifie aussi la stabilité de H^1).

L'espace H^∞_ω

Nous avons vu une description de $H^\infty_\omega|_\Lambda$, si Λ est une réunion finie de suites de Carleson dans le premier paragraphe de ce chapitre. Nous verrons que, comme dans le cas des espaces de Hardy H^p, on peut utiliser l'approche générale. Nous remarquons que la propriété 1) est aussi dans ce cas vérifiée. Etudions donc la propriété 2). Le raisonnement est semblable à celui mené pour le cas H^p. En effet, si $\Lambda \in (C)$ et si $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq 1}$ vérifie $|b_{\lambda_n}(\tilde{\lambda}_n)| < \varepsilon$ avec $\varepsilon < \delta/4$, où δ est la constante de Carleson pour Λ, alors, d'après le lemme 9 de [32] par exemple, nous obtenons en $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq 1}$ une suite de Carleson. Pour les suites de Carleson, nous obtenons donc, d'après le théorème 4 de [32], $H^\infty_\omega|_\Lambda = l^\infty_{\omega,\mathbb{N}} = \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : |a_n| \leq c_a\omega\left(|\lambda_n|\right)\}$. Nous changeons les notations par rapport au premier paragraphe pour pouvoir comparer les espaces $l^\infty_{\omega,\mathbb{N}} = H^\infty_\omega|_\Lambda$ et $\tilde{l}^\infty_{\omega,\mathbb{N}} = H^\infty_{\omega,\tilde{\Lambda}}$. Or si ω vérifie la condition 5) du premier paragraphe qui est équivalente à (5.1) d'après la proposition 5.1.2 et si on choisit $\eta = \min(\delta/4, \varepsilon)$, où δ est la constante de Carleson associée à Λ et ε est la constante dans la proposition 5.1.2, alors pour toute suite $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq 1}$ avec $|b_{\lambda_n}(\tilde{\lambda}_n)| \leq \eta$, nous avons, si $a \in l^\infty_{\omega,\mathbb{N}}$, $|a_n| \leq c_a\omega\left(|\lambda_n|\right) \leq c_a c\omega\left(|\tilde{\lambda}_n|\right)$ et donc $a \in \tilde{l}^\infty_{\omega,\mathbb{N}}$. De la même façon on obtient $\tilde{l}^\infty_{\omega,\mathbb{N}} \subset l^\infty_{\omega,\mathbb{N}}$, d'où la stabilité de H^∞_ω.

L'espace de Bergman B^p_α

Nous introduisons l'espace de Bergman à poids dans le disque $\mathbb{D}$.

Définition 6.2.1 *Soit $0 < p \leq \infty$ et $\alpha \geq -1/p$. Alors l'espace de Bergman est défini par*

$$B^p_\alpha = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{p,\alpha} = \int_{\mathbb{D}} ((1-|z|^2)^\alpha |f(z)|)^p dm < \infty\},$$

où dm est la mesure de Lebesgue du disque $dxdy/\pi$.

La propriété 1) est aussi dans le cas des espaces de Bergman facile à vérifier. La stabilité de B^p_α est une conséquence du lemme 1.9 [14] si $0 < p \leq \infty$ et $\alpha > -1/p$ ou $1 \leq p \leq \infty$ et $\alpha \geq -1/p$. Nous remarquons que, grâce au théorème 3.3 de [14], une suite de Carleson Λ est d'interpolation pour B^p_α, ce qui veut dire dans la terminologie de [14], que l'on a la description

$$B^p_\alpha|_\Lambda = l^p_{2/p+\alpha},$$

où

$$l^p_\beta = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : \|a\|_{p,\beta} < \infty\},$$

et

$$\begin{aligned}\|a\|_{p,\beta}^p &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\left\{(1-|\lambda^2|)^\beta|a_\lambda\right\}^p,\\ \|a\|_{\infty,\beta} &= \sup_{\lambda\in\Lambda}\left\{(1-|\lambda^2|)^\beta|a_\lambda|\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la caractérisation explicite des traces de l'espace de Bergman sur les réunions finies de suites de Carleson:

Corollaire 6.2.2 *Soient* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i \subset \mathbb{D}$, $\Lambda_i \in (C)$ *et* $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1}\sigma_n$ *la décomposition de* Λ *étudiée dans la proposition 3.1.1. Si* $0 < p \leq \infty$ *et* $\alpha > -1/p$ *ou* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\alpha \geq -1/p$, *alors*

$$B_\alpha^p|_\Lambda = (l^p_{2/p+\alpha})_N = \{(a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}\in\mathbb{C}^\Lambda : \|a\|_{(l^p_{2/p+\alpha})_N} < \infty\}$$

où

$$\begin{aligned}\|a\|_{(l^p_{2/p+\alpha})_N} &= \left\{\sum_{n\geq 1}\left((1-|\lambda_{n,0}^2|)^{2/p+\alpha}\sum_{k=1}^{|\sigma_n|}|\triangle^{k-1}a(\lambda_n^{(k)})|\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1<p<\infty,\\ \|a\|_{(l^\infty_\alpha)_N} &= \sup_{n\geq 1}(1-|\lambda_{n,0}^2|)^\alpha\sum_{k=1}^{|\sigma_n|}|\triangle^{k-1}a(\lambda_n^{(k)})|,\end{aligned}$$

et $\sigma_n = \{\lambda_{n,1},\dots,\lambda_{n,|\sigma_n|}\}$ *et* $\lambda_n^{(k)} = (\lambda_{n,1},\dots,\lambda_{n,k})$.

∎

Appendix A

Quelques preuves

A.1 ... ad paragraphe 2.1

Soit X un espace de Banach et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés dans X. Nous allons donner une généralisation de la définition de l'interpolation libre au sens des germes (cf. la définition 2.1.1), et nous allons démontrer que dans ce cadre le lemme 2.1.2 reste toujours vrai. De façon analogue à la définition 1.1.1, nous dirons que la suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ est interpolable par rapport à $(X_n)_{n\geq 1}$, s'il existe $x \in X$ vérifiant $x - x_n \in X_n$, $n \geq 1$. Nous posons

$$\begin{aligned} R : X &\longrightarrow l^\infty(X/X_n) \\ x &\longmapsto (x + X_n)_{n\geq 1}. \end{aligned}$$

Définition A.1.1 *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de sous-espaces de l'espace de Banach X est d'interpolation libre au sens des germes si pour toute suite interpolable $(x_n)_{n\geq 1}$ et pour toute suite $(y_n)_{n\geq 1} \subset X$ vérifiant*

$$\|y_n\|_{X/X_n} \leq \|x_n\|_{X/X_n}$$

la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est aussi interpolable.

Lemme A.1.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) $(X_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre au sens des germes.
2) Il existe $l \subset l^\infty$ un sous-espace vectoriel idéal tel que

$$RX_+ = l\,(X/X_n)\,.$$

Preuve
L'implication 2) $\Longrightarrow$ 1) est immédiate car l est un espace idéal.
Démontrons donc l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2).
La clef de voûte de la preuve est la construction de l'espace l. Nous reprenons l'idée utilisée dans la preuve du lemme 1.2 de [20]. Nous pouvons supposer que l'on a $X_n \neq X$, $n \geq 1$, car sinon le problème d'interpolation par rapport à $X_n = X$ est trivial. Soit donc $x_n \in X \setminus X_n \neq \emptyset$. Nous le supposons normalisé dans X/X_n, c'est-à-dire $\|x_n\|_{X/X_n} = 1$. Alors nous définissons

$$l = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (a_n x_n)_{n\geq 1} \in RX\}.$$

Grâce à l'interpolation au sens des germes, l est un espace idéal de suites (en effet, afin d'avoir cette propriété, il suffit d'avoir interpolation libre au sens faible par rapport à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$, qu'on définit, de façon analogue à la définition 1.1.2). Comme RX est un espace vectoriel, l le sera aussi.
Nous démontrons que nous avons $l(X/X_n) \subset RX$. Soit donc $(y_n)_{n\geq 1} \in l(X/X_n)$, alors $(\|y_n\|_{X/X_n})_{n\geq 1} \in l$. Ceci implique $(\|y_n\|_{X/X_n} x_n)_{n\geq 1} \in RX$, c'est-à-dire la suite $(z_n)_{n\geq 1} = (\|y_n\|_{X/X_n} x_n)_{n\geq 1}$ est interpolable. Or

$$\|y_n\|_{X/X_n} = \|y_n\|_{X/X_n}\|x_n\|_{X/X_n} = \|\|y_n\|_{X/X_n} x_n\|_{X/X_n} = \|z_n\|_{X/X_m}.$$

Et par conséquent, $(y_n)_{n\geq 1}$ est interpolable, d'où $(y_n)_{n\geq 1} \in RX$.
Pour l'inclusion inverse, nous supposons $(y_n)_{n\geq 1} \in RX$. Soit $a_n = \|y_n\|_{X/X_n}$, $n \geq 1$. Il faut démontrer $(a_n)_{n\geq 1} \in l$, ce qui est équivalent à $(a_n x_n)_{n\geq 1} \in RX$. Or, comme précédemment, on obtient

$$\|a_n x_n\|_{X/X_n} = \|y_n\|_{X/X_n},$$

et, à nouveau grâce à l'interpolation libre au sens des germes, et comme $(y_n)_{n\geq 1}$ est interpolable, la suite $(a_n x_n)_{n\geq 1}$ sera aussi interpolable, d'où $(y_n)_{n\geq 1} \in l(X/X_n)$.
Finalement, nous remarquons que $l \subset l^\infty$. En effet, si $(a_n)_{n\geq 1} \in l$, alors il existe $x \in X$ telle que $(a_n x_n)_{n\geq 1} = Rx$. Nous en déduisons

$$|a_n| = |a_n|\|x_n\|_{X/X_n} = \|a_n x_n\|_{X/X_n} = \|x\|_{X/X_n} \leq \|x\|.$$

□

A.2 ... ad paragraphe 3.2

Lemme A.2.1

$$< \varphi_i, \psi_k >= \delta_{ik}, \quad i,k = 1,\ldots,N.$$

Preuve
Nous vérifions l'orthogonalité dans les cas de figure possibles.
Soit $i = 1$ et $1 \leq k \leq N$:

$$< \varphi_1, \psi_k >=< \alpha_1, \sum_{j=k}^{N}\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l|\beta_j >= \sum_{j=k}^{N}\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l| < \alpha_1, \beta_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } k = 1 \\ 0 \text{ si } k > 1. \end{cases}$$

Soit $i > 1$ et $k > i$:

$$\begin{aligned} < \varphi_i, \psi_k > &= < \alpha_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}, \sum_{j=k}^{N}\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l|\beta_j > \\ &= \sum_{j=k}^{N}\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l| < \alpha_i, \beta_j > -|\lambda_{i-1}|\sum_{j=k}^{N}\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l| < \alpha_{i-1}, \beta_j > \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $i > 1$ et $k = i$:

$$\begin{aligned} < \varphi_i, \psi_i > &= < \alpha_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}, \sum_{j=i}^{N} \prod_{l=i}^{j-1} |\lambda_l| \beta_j > \\ &= \sum_{j=i}^{N} \prod_{l=i}^{j-1} |\lambda_l| < \alpha_i, \beta_j > - |\lambda_{i-1}| \sum_{j=i}^{N} \prod_{l=i}^{j-1} |\lambda_l| < \alpha_{i-1}, \beta_j > \\ &= \prod_{l=i}^{i-1} |\lambda_l| = 1. \end{aligned}$$

Soit $i > 1$ et $k < i$:

$$\begin{aligned} < \varphi_i, \psi_k > &= < \alpha_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}, \sum_{j=k}^{N} \prod_{l=k}^{j-1} |\lambda_l| \beta_j > \\ &= \sum_{j=k}^{N} \prod_{l=k}^{j-1} |\lambda_l| < \alpha_i, \beta_j > - |\lambda_{i-1}| \sum_{j=k}^{N} \prod_{l=k}^{j-1} |\lambda_l| < \alpha_{i-1}, \beta_j > \\ &= \prod_{l=k}^{i-1} |\lambda_l| - |\lambda_{i-1}| \prod_{l=k}^{i-2} |\lambda_l| \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme A.2.2 *Soit $f \in H^p$. Alors*

$$\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)}) =< f, \varphi_i >, \quad i = 1, \cdots, N.$$

Preuve
Pour $i = 1$, il suffit de remarquer que $\varphi_1 = \alpha_1 = k_{\lambda_1}$. Pour $i = 2$, nous vérifions

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda_2) &= \beta_1(\lambda_2) + |\lambda_1|\beta_2(\lambda_2) = \frac{1 - |\lambda_1^2|}{1 - \overline{\lambda}_1 \lambda_2} + |\lambda_1| \frac{1 - |\lambda_2^2|}{1 - \overline{\lambda}_2 \lambda_2} \frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \overline{\lambda}_1 \lambda_2} \\ &= \frac{1 - |\lambda_1^2| + \overline{\lambda}_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - \overline{\lambda}_1 \lambda_2} = 1, \end{aligned}$$

et $\psi_2(\lambda_2) = \beta_2(\lambda_2) = b_{\lambda_1}(\lambda_2)$. Et donc $f(\lambda_2) =< f, \varphi_1 > \psi_1(\lambda_2) + < f, \varphi_2 > \psi_2(\lambda_2) = f(\lambda_1) + < f, \varphi_2 > b_{\lambda_1}(\lambda_2)$, ce qui justifie l'assertion au cas $i = 2$.
Au cas général $i \geq 2$, nous vérifions que les $< f, \varphi_i >$ obéissent à la même loi de construction que les $\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)})$: d'après la définition nous avons

$$\triangle^i f(\lambda^{(i+1)}) = \frac{\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i-1)}, \lambda_{i+1}) - \triangle^{i-1} f(\lambda^{(i-1)}, \lambda_i)}{b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous obtenons $\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i-1)}, \lambda_{i+1}) =< f, \tilde{\varphi}_i >$ où $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\alpha}_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}$, $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}_{i+1} z} \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}$ (on remplace λ_i par λ_{i+1}) et $\triangle^{i-1} f(\lambda^{(i)}) =< f, \varphi_i >$.

Il suffit maintenant de vérifier $< f, \varphi_{i+1} >=< f, \tilde{\varphi}_i - \varphi_i > / b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})$. Dans ce but, nous effectuons un calcul auxiliaire. Nous montrons :

$$\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} b_\mu - \frac{|\mu|}{1-\overline{\mu}z} = \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - \frac{1}{1-\overline{\mu}z} \right) \frac{1}{\overline{b_\mu(\lambda)}}. \tag{A.1}$$

Considérons le membre de droite :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - \frac{1}{1-\overline{\mu}z} \right) \frac{1}{\overline{b_\mu(\lambda)}} &= \frac{(\overline{\lambda}-\overline{\mu})z}{(1-\overline{\lambda}z)(1-\overline{\mu}z)} \frac{\overline{\mu}}{|\mu|} \frac{\overline{1-\overline{\mu}\lambda}}{\mu-\lambda} \\ &= \frac{|\mu|}{\mu} \frac{(\overline{\lambda}\mu - 1)z}{(1-\overline{\lambda}z)(1-\overline{\mu}z)}. \end{aligned}$$

Et pour le membre de gauche nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} b_\mu - \frac{|\mu|}{1-\overline{\mu}z} &= \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \frac{|\mu|}{\mu} \frac{\mu - z}{1-\overline{\mu}z} - \frac{|\mu|}{1-\overline{\mu}z} = \frac{|\mu|}{(1-\overline{\mu}z)\mu} \left(\frac{\mu - z}{1-\overline{\lambda}z} - \mu \right) \\ &= \frac{|\mu|}{\mu} \frac{1}{1-\overline{\mu}z} \left(\frac{\mu - z - \mu(1-\overline{\lambda}z)}{1-\overline{\lambda}z} \right) = \frac{|\mu|}{\mu} \frac{1}{1-\overline{\mu}z} \frac{(\mu\overline{\lambda}-1)z}{1-\overline{\lambda}z}. \end{aligned}$$

D'où (A.1). Et maintenant

$$\begin{aligned} \frac{< f, \tilde{\varphi}_i - \varphi_i >}{b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})} &= < f, \frac{1}{\overline{b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})}} \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda_{i+1}}z} \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k} - \frac{1}{1-\overline{\lambda}_i z} \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k} \right) > \\ &= < f, \frac{1}{\overline{b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})}} \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k} \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda_{i+1}}z} - \frac{1}{1-\overline{\lambda}_i z} \right) > \\ &= < f, \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda_{i+1}}z} b_{\lambda_i} - \frac{|\lambda_i|}{1-\overline{\lambda}_i z} \right) \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k} > \\ &= < f, \frac{1}{1-\overline{\lambda_{i+1}}z} \prod_{k=1}^{i} b_{\lambda_k} - |\lambda_i| \frac{1}{1-\overline{\lambda}_i z} \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k} > \\ &= < f, \alpha_{i+1} - |\lambda_i| \alpha_i > \\ &= < f, \varphi_{i+1} > . \end{aligned}$$

□

Lemme A.2.3 *Soit* $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{D}$. *Alors*

$$(1 - |\lambda^2|)^{-1/q} \leq \|k_\lambda\|_{H^p} \leq \|P_+\| (1 - |\lambda^2|)^{-1/q}.$$

Si $p = \infty$, *nous avons trivialement* $\|k_\lambda\|_{H^\infty} = 1/(1 - |\lambda|)$.

Preuve
Soit $1 < p < \infty$. Nous utilisons l'identification $(H^q)^* = L^p/(H^q)^\perp = L^p/H^p_- \simeq H^p$. En effet, la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : H^q &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(\lambda) \end{aligned}$$

peut être identifiée à k_λ, ce qui donne, grâce à (1.2)

$$\frac{1}{\|P_+\|}\|P_+k_\lambda\|_{H^p} \leq \|\Phi_\lambda\|_{(H^q)^*} = \|k_\lambda\|_{L^p/H^p_-} \leq \|P_+k_\lambda\|_{H^p}.$$

Puisque $P_+k_\lambda = k_\lambda$, nous avons donc

$$\|\Phi_\lambda\|_{(H^q)^*} \leq \|k_\lambda\|_{H^p} \leq \|P_+\|\|\Phi_\lambda\|_{(H^q)^*}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\lambda\|_{(H^q)^*} &= \sup_{\substack{f\in H^q\\ \|f\|_{H^q}\leq 1}} |f(\lambda)| = \sup_{\substack{F\in H^q\\ \|F\|_{H^q}\leq 1\\ F\neq 0 \text{ dans } \mathbb{D}}} |F(\lambda)| = \sup_{\substack{F\in H^q\\ \|F^{q/2}\|_{H^2}^{2/q}\leq 1\\ F\neq 0 \text{ dans } \mathbb{D}}} |(F(\lambda))^{q/2}|^{2/q} \\
&= \sup_{\substack{g\in H^2\\ \|g\|_{H^2}\leq 1}} |g(\lambda)|^{2/q} = \|\Phi_\lambda\|_{(H^2)^*}^{2/q} = \|k_\lambda\|_{H^2}^{2/q} =< k_\lambda, k_\lambda >^{1/q} \\
&= (1-|\lambda^2|)^{-1/q}.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. □

A.3 ... ad paragraphe 3.4

Lemme A.3.1 *Soit* $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{D}$ *et* $g, h : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$. *Alors*

$$\triangle^n(gh)(\lambda^{(n+1)}) = \sum_{j=0}^{n} \triangle^{n-j}h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j}) \triangle^j g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_{n+1}).$$

Preuve
Une récurrence s'impose. Soit $n = 0$. Alors

$$\triangle^0(gh)(\lambda^{(1)}) = (gh)(\lambda_1) = g(\lambda_1)h(\lambda_1),$$

ce qui est égal à la somme qui est réduite à un seul terme.
Supposons donc que l'assertion soit vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned}
&\triangle^{n+1}(gh)(\lambda^{(n+2)}) \\
&\quad= \frac{\triangle^n(gh)(\lambda^{(n)}, \lambda_{n+2}) - \triangle^n(gh)(\lambda^{(n+1)})}{b_{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+2})} \\
&\quad= \frac{1}{b_{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+2})}\left(\sum_{j=1}^{n} \triangle^{n-j}h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j}) \triangle^j g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+2})\right. \\
&\qquad\quad - \sum_{j=1}^{n} \triangle^{n-j}h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j}) \triangle^j g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \triangle^n h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+2}) g(\lambda_{n+2}) - \triangle^n h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) g(\lambda_{n+1})) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \triangle^{n-j} h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j}) \triangle^{j+1} g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_{n+2}) \\
&\quad + \triangle^{n+1} h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}) g(\lambda_{n+2}) + \triangle^n h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \triangle g(\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \triangle^{n+1-j} h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2-j}) \triangle^{j} g(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2}).
\end{aligned}
$$

$\square$

A.4 ... ad paragraphe 4.1

Lemme A.4.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{D}$. Si $f : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$, alors*

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(z) \triangle^{k-1} f(\lambda^{(k)})$$

vérifie

$$P(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in \sigma.$$

Preuve
Nous allons effectuer une récurrence. Choisissons β_k, $k = 1, \ldots, n$, et γ_n tels que $P_1 = \sum_{k=1}^n \beta_k \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}$ interpole f en $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $P_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l} + \gamma_n \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}$ interpole f en $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n+1}\}$. Puisque $P_1(\lambda_i) = P_2(\lambda_i) = f(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, les $(n-1)$ premiers coefficients β_k de P_1 et P_2 sont en effet égaux, et nous distinguons seulement β_n et γ_n.
Pour $n \geq 1$, on écrit $\beta_{n+1} = (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k) / \prod_{l=1}^n b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})$ et $\gamma_n = (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k) / \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\beta_{n+1} \\
&\quad = (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k) / \prod_{l=1}^{n} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1}) \\
&\quad = \frac{(f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k - \beta_n \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})) / \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})} \\
&\quad = \frac{(f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k) / \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1}) - \beta_n}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})} \\
&\quad = \frac{\gamma_n - \beta_n}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})}.
\end{aligned}
$$

Remplaçant β_n par $\triangle^{n-1} f(\lambda^{(n)})$ et γ_n par $\triangle^{n-1} f(\lambda^{(n-1)}, \lambda_{n+1})$, on observe que les β_n vérifient la même loi de construction que $\triangle^{n-1} f(\lambda^{(n)})$. De plus on vérifie directement $\triangle^0 f(\lambda^{(1)}) = f(\lambda_1) = P_1(\lambda_1) = \beta_1$, ce qui achève la récurrence. $\square$

Bibliography

[1] Beauzamy B., *Espaces d'interpolation réelle: Topologie et Géométrie*, Lecture Notes in Math., Nr. 666, Springer, Berlin, 1978.

[2] Bergh J. & Löfström J., *Interpolation Spaces, An Introduction*, Berlin, Springer, 1976.

[3] Bernard A., *Algèbre quotient d'algèbres uniformes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 272, 1971, pp. 1101-1104.

[4] Bruna J., Nicolau A. & Øyma K., *A note on interpolation in the Hardy spaces of the unit disc*, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1996, pp. 1197-1204.

[5] Carleson L., *An interpolation problem for analytic functions*, Amer. J. Math. 80, 1958, pp. 921-930.

[6] Carleson L., *Interpolations by bouded analytic functions and the corona problem*, Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm, 1962, pp. 314-316.

[7] Casazza P. G., Pengra R. W. & Sundberg C., *Complemented ideals in the disk algebra*, Israel J. Math., 37, 1-2, 1980, pp. 76-83.

[8] Garnett J. B., *Bounded analytic functions*, Academic Press, 1981.

[9] Hanks R., *Interpolation by the real method between BMO, L^α ($0<\alpha<\infty$) and H^α ($0<\alpha<\infty$)*, Indiana Univ. Math. J., 26, 1977, 4, pp. 679-689.

[10] Hartmann A., *Une approche de l'interpolation libre généralisée par la théorie des opérateurs et caractérisation des traces $H^p|_\Lambda$*, J. Operator Theory, à paraître.

[11] Heuser H., *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[12] Hoffman K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[13] Janson S., Peetre J. & Semmes S., *On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces*, Duke Math. J., 51, 1984, 4, pp. 937-958.

[14] Jevtić M., Massaneda X. & Thomas P., *Interpolating sequences for the weighted Bergman spaces of the ball*, Mich. Math. J., à paraître.

[15] Jones P., *L^∞-estimates for the $\bar\partial$-problem in a half plane*, Acta Math., 150, 1983, pp. 137-152.

[16] Kerr-Lawson A., *Some lemmas on interpolating Blaschke products and correction*, Canad. J. Math., 21, 1969, pp. 531-534.

[17] Lindenstrauss J. & Tzafriri L., *Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces*, Berlin, Springer, 1977.

[18] Lions J. L. & Peetre J., *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19, 1964, pp. 5-68.

[19] Nevanlinna R., *Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, 13, 1919, 1.

[20] Nikolski N. K., *Bases of invariant subspaces and operator interpolation*, Proc. Steklov Inst. Math., 130, 1979, issue 4, pp. 55-132.

[21] Nikolski N. K., *What problems do spectral theory and complex analysis solve for each other*, Proc. Intern. Congress Math., Helsinki, 1978, vol. 2, pp. 631-638.

[22] Nikolski N. K., *Treatise on the shift operator*, Springer, Berlin, 1986.

[23] Nikolski N. K. & Khrushchëv S. V., *A function model and some applications in the spectral theory of functions*, Proc. Steklov Inst. Math., 176, 1988, issue 3, pp. 101-214.

[24] Nikolski N. K. & Volberg A. L., *Tangential and approximate free interpolation*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 122, Dekker, New-York, 1990.

[25] Pekarskii A. A., *Estimates on the derivative of a Cauchy-type integral with meromorphic density and their applications*, Math. Notes, 31, 1982, pp. 199-206.

[26] Pick G., *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann., 77, 1916, pp. 7-23.

[27] Sanders B. L., *Decompositions and reflexivity in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 1965, pp. 204-208.

[28] Shapiro H. S. & Shields A. L., *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math., 83, 1961, pp. 513-532.

[29] Vasyunin V. I., *Unconditional convergent spectral decompositions and interpolation problems*, Proc. Steklov Inst. Math., 130, 1979, issue 4, pp. 1-53.

[30] Vasyunin V. I., *Traces of bounded analytic functions on finite unions of Carleson sets*, J. Sov. Math., 27, 1984, issue 1, pp. 2448-2450.

[31] Vinogradov S. A., *Some remarks on free interpolation by bounded and slowly growing analytic functions*, J. Sov. Math., 27, 1984, issue 1, pp. 2450-2458.

[32] Vinogradov S. A. & Khavin V. P., *Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions I*, J. Sov. Math., 9, 1978, issue 2, pp. 137-171.

[33] Vinogradov S. A. & Khavin V. P., *Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions II*, J. Sov. Math., 14, 1980, issue 2, pp. 1027-1065.

[34] Vinogradov S. A. & Rukshin S. E., *Free interpolation of germs of analytic functions in Hardy spaces*, J. Sov. Math., 36, 1987, issue 3, pp. 319-325.

Résumé

Nous étudions des problèmes d'interpolation libre dans des espaces de fonctions holomorphes. Nous démontrons que la condition de Carleson généralisée est nécessaire et suffisante pour l'interpolation libre dans l'espace de Hardy. Nous donnons ensuite une démonstration d'une conjecture de N. K. Nikolski et S. V. Khrushchëv, qui nous permet de décrire l'espace des suites de fonctions interpolables. Ce résultat sera appliqué à la caractérisation des traces de l'espace de Hardy sur une réunion finie de suites de Carleson. Nous obtenons ainsi une généralisation d'un résultat de V. I. Vasyunin. Nous terminons par la construction explicite d'un opérateur linéaire d'interpolation dans l'espace de Hardy, qui est exploité dans l'étude des traces dans d'autres espaces pondérés de fonctions holomorphes du type de Bergman.

Abstract

We study free interpolation problems in spaces of holomorphic functions. We prove the necessity and sufficiency of the generalized Carleson condition for free interpolation in the Hardy spaces. For this type of interpolation, N. K. Nikolski and S. V. Khrushchëv have announced without proof a characterization of the data space of interpolable function sequences. We give the proof for this conjecture and apply the result to the characterization of the traces of Hardy-spaces on finite unions of interpolating sequences, generalizing a result of V. I. Vasyunin. We then construct a linear continuous operator of interpolation for the Hardy-spaces, which enables us to characterize the traces of other weighted spaces of holomorphic functions such as Bergman-type spaces.

Mots-clés

Interpolation libre, espaces de Hardy, suites d'interpolation, condition de Carleson généralisée, relèvement du commutant, théorème de Nehari, bases inconditionnelles.