# Courbes algébriques lisses en caractéristique $p > 0$ munies d'un gros $p$-groupe d'automorphismes.

Magali Rocher

Institut de Mathématiques de Bordeaux 1.

14 novembre 2008.

# Notations.

- $k$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$.
- Si $p > 0$,
  - $F$ est l'endomorphisme Frobenius pour une $k$-algèbre.
  - $\wp = F - id$.
- $C/k$ est une courbe algébrique, projective lisse connexe de genre $g \geq 2$.
- $\mathrm{Aut}_k(C)$ est le groupe des $k$-automorphismes de $C$.

# Le cas de la caractéristique 0.

Pourquoi considérer de gros groupes d'automorphismes?

# Le cas de la caractéristique 0.

Pourquoi considérer de gros groupes d'automorphismes?

- En caractéristique 0:

$$|\mathrm{Aut}_k(C)| \leq 84\,(g-1) \quad \text{(borne d'Hurwitz 1892)}$$

# Le cas de la caractéristique 0.

Pourquoi considérer de gros groupes d'automorphismes?

- En caractéristique 0:

$$|\mathrm{Aut}_k(C)| \leq 84\,(g-1) \quad \text{(borne d'Hurwitz 1892)}$$

- Problème: classification des groupes d'automorphismes à genre donné.

# Le cas de la caractéristique 0.

Pourquoi considérer de gros groupes d'automorphismes?

- En caractéristique 0:

$$|\mathrm{Aut}_k(C)| \leq 84\,(g-1) \quad \text{(borne d'Hurwitz 1892)}$$

- Problème: classification des groupes d'automorphismes à genre donné.
- Réponse partielle pour les groupes $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$ dits "larges":

$$|G| \geq 4\,(g-1) \quad \text{(Kulkarni 1997, Breuer 2000)}$$

Par la formule d'Hurwitz, $g_{C/G} = 0$ et $C \to C/G$ ramifié en 3 ou 4 points

# Le cas de la caractéristique $p > 0$.

En caractéristique $p > 0$:

- $\mathrm{Aut}_k(C)$ est encore fini (Schmid 1938).

# Le cas de la caractéristique $p > 0$.

En caractéristique $p > 0$:

- $\mathrm{Aut}_k(C)$ est encore fini (Schmid 1938).
- Si $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$ d'ordre premier à $p$ (cas modéré),

$$|G| \leq 84(g-1) \quad \text{(Grothendieck 1963)}$$

# Le cas de la caractéristique $p > 0$.

En caractéristique $p > 0$:

- $\mathrm{Aut}_k(C)$ est encore fini (Schmid 1938).
- Si $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$ d'ordre premier à $p$ (cas modéré),

$$|G| \leq 84(g-1) \quad \text{(Grothendieck 1963)}$$

- Sinon, la borne est biquadratique:

$$|\mathrm{Aut}_k(C)| \leq 16g^4 \quad \text{(Stichtenoth 1973)}$$

sauf pour $C : W^q + W = X^{1+q}$, $q = p^n \geq 3$.

Explication: apparition de ramification sauvage.

# Introduction des grosses actions.

Idée: comme en caractéristique 0, considérer de ”gros” groupes d’automorphismes pour fixer $g_{C/G}$ et la ramification de $C \to C/G$.

# Introduction des grosses actions.

Idée: comme en caractéristique 0, considérer de ”gros” groupes d'automorphismes pour fixer $g_{C/G}$ et la ramification de $C \to C/G$.

**Définition (Lehr-Matignon)**

*Soit $C/k$ une courbe projective lisse connexe de genre $g$.*

*Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}_k(C)$.*

*On dit que $(C,G)$ est une **grosse action** si:*

- $g \geq 1$.
- *$G$ est un $p$-groupe.*
- $$|G| > \frac{2p}{p-1}g.$$

# Propriétés générales sur les grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.
Soit $h$ l'invariant de Hasse-Witt de $C$.

- *Formules d'Hurwitz et Deuring-Shafarevitch à $C \to C/G$: [Nakajima 1987]*
  - $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ implique $h = 0$.

# Propriétés générales sur les grosses actions.

Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.
Soit $h$ l'invariant de Hasse-Witt de $C$.

- *Formules d'Hurwitz et Deuring-Shafarevitch à* $C \to C/G$*: [Nakajima 1987]*
  - $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ implique $h = 0$.
  - un seul point $\infty \in C$ est ramifié et même totalement ramifié.

# Propriétés générales sur les grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.
Soit $h$ l'invariant de Hasse-Witt de $C$.

- *Formules d'Hurwitz et Deuring-Shafarevitch à $C \to C/G$: [Nakajima 1987]*
  - $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ implique $h = 0$.
  - un seul point $\infty \in C$ est ramifié et même totalement ramifié.
- Soit $G_i$ le $i$-ième groupe de ramification inférieure de $G$ au point $\infty$. Comme $G$ est un $p$-groupe, $G = G_{-1} = G_0 = G_1$.

# Propriétés générales sur les grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.
Soit $h$ l'invariant de Hasse-Witt de $C$.

- *Formules d'Hurwitz et Deuring-Shafarevitch à $C \to C/G$: [Nakajima 1987]*
    - $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ implique $h = 0$.
    - un seul point $\infty \in C$ est ramifié et même totalement ramifié.
- Soit $G_i$ le $i$-ième groupe de ramification inférieure de $G$ au point $\infty$. Comme $G$ est un $p$-groupe, $G = G_{-1} = G_0 = G_1$.
- $|G| > \frac{p}{p-1} g$ implique $C/G_1 \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $C/G_2 \simeq \mathbb{P}^1_k$. *[Stichtenoth 1973]*

# Propriétés générales sur les grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.
Soit $h$ l'invariant de Hasse-Witt de $C$.

- *Formules d'Hurwitz et Deuring-Shafarevitch à $C \to C/G$: [Nakajima 1987]*
    - $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ implique $h = 0$.
    - un seul point $\infty \in C$ est ramifié et même totalement ramifié.
- Soit $G_i$ le $i$-ième groupe de ramification inférieure de $G$ au point $\infty$. Comme $G$ est un $p$-groupe, $G = G_{-1} = G_0 = G_1$.
- $|G| > \frac{p}{p-1} g$ implique $C/G_1 \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $C/G_2 \simeq \mathbb{P}^1_k$. *[Stichtenoth 1973]*
- En particulier, $G_2 \neq \{e\}$.

# Le problème de plongement.

- $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ est nécessaire pour avoir l'inclusion **stricte**: $G_2 \subsetneq G_1 = G$. (contre-exemple: $W^p - W = X^2$, $p > 2$).

# Le problème de plongement.

- $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ est nécessaire pour avoir l'inclusion **stricte**: $G_2 \subsetneq G_1 = G$. (contre-exemple: $W^p - W = X^2$, $p > 2$).
- Soit $X$ tel que $C/G_2 - \{\infty\} = \operatorname{Spec} k[X]$.
  $G/G_2 \simeq \{X \to X + y, y \in V\}$ où $V$ est un $\mathbb{F}_p$-sous-espace vectoriel de $k$.

# Le problème de plongement.

- $|G| > \frac{2p}{p-1} g$ est nécessaire pour avoir l'inclusion **stricte**: $G_2 \subsetneq G_1 = G$. (contre-exemple: $W^p - W = X^2$, $p > 2$).
- Soit $X$ tel que $C/G_2 - \{\infty\} = \operatorname{Spec} k[X]$. $G/G_2 \simeq \{X \to X + y, y \in V\}$ où $V$ est un $\mathbb{F}_p$-sous-espace vectoriel de $k$.
- D'où la suite exacte:

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G = G_1 \xrightarrow{\pi} V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \longrightarrow 0,$$

avec

$$\pi : \begin{cases} G \to V \\ g \to g(X) - X. \end{cases}$$

# Plan de la thèse.

- Chapitre 1: Mise en perspective dans le cadre général des $G$-actions de courbes.
- Chapitre 2: [MR] *"Smooth curves having a large automorphism p-group in characteristic $p > 0$."*
  - Conditions nécessaires sur $G_2$. En particulier, $G_2 = D(G)$.
  - Exemples de grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant quelconque.
- Chapitre 3: [Ro1] *"Large p-group actions with a p-elementary abelian derived group."*
  Paramétrisation des grosses actions avec $D(G) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.
- Chapitre 4: [Ro2] *"Large p-group actions with* $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$*."*
  Résultats de finitude et poursuite de la classification des grosses actions.

# Condition de transfert.

**Proposition (MR)**

*Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.*
*Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $H \subsetneq G_2$.*
*Alors, $(C/H, G/H)$ est une grosse action telle que $(G/H)_2 = G_2/H$.*

# Condition de transfert.

**Proposition (MR)**

*Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.*
*Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $H \subsetneq G_2$.*
*Alors, $(C/H, G/H)$ est une grosse action telle que $(G/H)_2 = G_2/H$.*

Application: Prendre $H = \mathrm{Fratt}\,(G_2) = D(G_2)\,G_2^p$.
On obtient ainsi une grosse action $(C, G)$ avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. ([Ro1]).

# Condition de transfert.

**Proposition (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$.*
*Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $H \subsetneq G_2$.*
*Alors, $(C/H, G/H)$ est une grosse action telle que $(G/H)_2 = G_2/H$.*

Application: Prendre $H = \mathrm{Fratt}\,(G_2) = D(G_2)\,G_2^p$.
On obtient ainsi une grosse action $(C,G)$ avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. ([Ro1]).

Cas particulier: $(C,G)$ grosse action avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

# Caractérisation des grosses actions avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

### Théorème (L-M)

*Soit $(C, G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ telle que $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

- *Alors,*

$$C \sim C_f : W^p - W = f(X) := cX + X\,S(X) \in k[X]$$

*où $S(X) = (a_0\, id + a_1\, F + \dots a_s\, F^s)\,(X)$ est additif de degré $p^s$, $s \geq 1$.*

# Caractérisation des grosses actions avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Théorème (L-M)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ telle que $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

- *Alors,*

$$C \sim C_f : W^p - W = f(X) := cX + X\,S(X) \in k[X]$$

*où $S(X) = (a_0\,id + a_1\,F + \ldots a_s\,F^s)\,(X)$ est additif de degré $p^s$, $s \geq 1$.*

- *On définit le polynôme palindromique de $S$ (Elkies):*

$$\mathrm{Ad}_S := \frac{1}{a_s^{p^s}}\,F^s \sum_{j=0}^{s} (a_j F^j + F^{-j} a_j) \quad \textit{et} \quad V \subset Z(\mathrm{Ad}_S) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s}.$$

# Caractérisation des grosses actions avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Théorème**

- *Soit* $A_{\infty,1}$ *le groupe d'inertie sauvage de* $\mathrm{Aut}_k(C)$ *au point* $\infty$. *Alors,*

$$0 \longrightarrow Z(A_{\infty,1}) = D(A_{\infty,1}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow A_{\infty,1} \xrightarrow{\pi} Z(\mathrm{Ad}_S) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s} \longrightarrow 0$$

*Pour* $p > 2$, *unique groupe extraspécial d'exposant* $p$ *et d'ordre* $p^{2s+1}$.

# Caractérisation des grosses actions avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

### Théorème

- *Soit $A_{\infty,1}$ le groupe d'inertie sauvage de $\mathrm{Aut}_k(C)$ au point $\infty$. Alors,*

$$0 \longrightarrow Z(A_{\infty,1}) = D(A_{\infty,1}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow A_{\infty,1} \xrightarrow{\pi} Z(\mathrm{Ad}_S) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s} \longrightarrow 0$$

  *Pour $p > 2$, unique groupe extraspécial d'exposant $p$ et d'ordre $p^{2s+1}$.*

- *Il existe un $\mathbb{F}_p$-sous-espace vectoriel $V \subset Z(\mathrm{Ad}_S)$ tel que:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & A_{\infty,1} & \xrightarrow{\pi} & Z(\mathrm{Ad}_S) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \bigcup & & \bigcup & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & V & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

# Caractérisation des grosses actions avec $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Théorème**

*Réciproque:*

*Soit*

$$C_f : W^p - W = f(X) := cX + XS(X) \in k[X]$$

*où* $S(X)$ *est un polynôme additif de* $k[X]$ *de degré* $p^s$ *avec* $s \geq 1$.

*Alors,* $(C_f, A_{\infty,1})$ *est une grosse action dont le* $G_2$ *est cyclique d'ordre* $p$.

# Détermination algébrique de $G_2$.

**Corollaire (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, $G$ n'est pas abélien.*

# Détermination algébrique de $G_2$.

**Corollaire (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, $G$ n'est pas abélien.*

Preuve: Si $D(G) \subsetneq G_2$,

# Détermination algébrique de $G_2$.

**Corollaire (MR)**

*Soit $(C, G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, $G$ n'est pas abélien.*

<u>Preuve:</u> Si $D(G) \subsetneq G_2$,

- Par transfert, on se ramène à une grosse action $(C/H, G/H)$ avec $(G/H)_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

# Détermination algébrique de $G_2$.

**Corollaire (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, G n'est pas abélien.*

Preuve: Si $D(G) \subsetneq G_2$,

- Par transfert, on se ramène à une grosse action $(C/H, G/H)$ avec $(G/H)_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Alors, $C/H : W^p - W = X\,S(X) + cX$, où $S$ est additif de degré $p^s$.

# Détermination algébrique de $G_2$.

### Corollaire (MR)

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, $G$ n'est pas abélien.*

Preuve: Si $D(G) \subsetneq G_2$,

- Par transfert, on se ramène à une grosse action $(C/H, G/H)$ avec $(G/H)_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Alors, $C/H : W^p - W = X\,S(X) + cX$, où $S$ est additif de degré $p^s$.
- $G/H$ sous-groupe abélien normal d'un groupe extraspécial: d'où
$$|G/H| \leq p^{s+1}.$$

# Détermination algébrique de $G_2$.

**Corollaire (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Alors, $G_2 = D(G)$.*

*En particulier, $G$ n'est pas abélien.*

Preuve: Si $D(G) \subsetneq G_2$,

- Par transfert, on se ramène à une grosse action $(C/H, G/H)$ avec $(G/H)_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Alors, $C/H : W^p - W = X\,S(X) + cX$, où $S$ est additif de degré $p^s$.
- $G/H$ sous-groupe abélien normal d'un groupe extraspécial: d'où
$$|G/H| \leq p^{s+1}.$$
- Comme $g_{C/H} = \frac{1}{2}\,(p-1)\,p^s$, on trouve $\frac{|G/H|}{g_{C/H}} \leq \frac{2p}{p-1}$. $\square$

# Classification des grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Le critère de classification est $\frac{|G|}{g^2}$.

# Classification des grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Le critère de classification est $\frac{|G|}{g^2}$.

- $\frac{|G|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}$ (Stichtenoth).

# Classification des grosses actions.

Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Le critère de classification est $\frac{|G|}{g^2}$.

- $\frac{|G|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}$ (Stichtenoth).
- D'autre part, par la formule d'Hurwitz:

$$\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0 \quad \Rightarrow \quad |G_2| \leq \frac{4}{M} \frac{|G_2/G_{i_0+1}|^2}{(|G_2/G_{i_0+1}|-1)^2}$$

où $G = G_0 = G_1 \supsetneq G_2 = \ldots = G_{i_0} \supsetneq G_{i_0+1} = \ldots$.

# Classification des grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Le critère de classification est $\frac{|G|}{g^2}$.

- $\frac{|G|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}$ (Stichtenoth).
- D'autre part, par la formule d'Hurwitz:

$$\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0 \quad \Rightarrow \quad |G_2| \leq \frac{4}{M} \frac{|G_2/G_{i_0+1}|^2}{(|G_2/G_{i_0+1}| - 1)^2}$$

où $G = G_0 = G_1 \supsetneq G_2 = \ldots = G_{i_0} \supsetneq G_{i_0+1} = \ldots$.

- Lorsque $M = \frac{4}{(p-1)^2}$, $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et deux cas sont possibles: [L-M]
  - $G = A_{\infty,1}$ et $V = Z(\mathrm{Ad}_S)$. Dans ce cas, $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4p}{(p-1)^2}$.
  - $[A_{\infty,1} : G] = p$ et $V$ hyperplan de $Z(\mathrm{Ad}_S)$. Dans ce cas, $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4}{(p-1)^2}$.

# Classification des grosses actions.

Soit $(C, G)$ une grosse action avec $g \geq 2$. Le critère de classification est $\frac{|G|}{g^2}$.

- $\frac{|G|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}$ (Stichtenoth).
- D'autre part, par la formule d'Hurwitz:

$$\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0 \quad \Rightarrow \quad |G_2| \leq \frac{4}{M} \frac{|G_2/G_{i_0+1}|^2}{(|G_2/G_{i_0+1}| - 1)^2}$$

  où $G = G_0 = G_1 \supsetneq G_2 = \ldots = G_{i_0} \supsetneq G_{i_0+1} = \ldots$.

- Lorsque $M = \frac{4}{(p-1)^2}$, $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et deux cas sont possibles: [L-M]
  - $G = A_{\infty,1}$ et $V = Z(\mathrm{Ad}_S)$. Dans ce cas, $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4p}{(p-1)^2}$.
  - $[A_{\infty,1} : G] = p$ et $V$ hyperplan de $Z(\mathrm{Ad}_S)$. Dans ce cas, $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4}{(p-1)^2}$.
- ([Ro2]) Poursuite de la classification pour $M = \frac{4}{(p^2-1)^2}$.

### Proposition (MR)

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action avec* $g \geq 2$ *telle que* $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.
*Alors,* $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $1 \leq n \leq 3$.

### Proposition (MR)

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$ telle que $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.*
*Alors, $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $1 \leq n \leq 3$.*

Preuve:

- $|G_2|$ divise $p^3$.

### Proposition (MR)

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action avec* $g \geq 2$ *telle que* $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.
*Alors,* $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $1 \leq n \leq 3$.

Preuve:

- $|G_2|$ divise $p^3$.
- On en déduit que $G_2$ est abélien.

### Proposition (MR)

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$ telle que $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.*
*Alors, $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $1 \leq n \leq 3$.*

Preuve:

- $|G_2|$ divise $p^3$.
- On en déduit que $G_2$ est abélien.
- On exclut le cas $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
  *Méthode: étude de la filtration de ramification de $G_2$.*

**Proposition (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action avec $g \geq 2$ telle que $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.*
*Alors, $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $1 \leq n \leq 3$.*

Preuve:

- $|G_2|$ divise $p^3$.
- On en déduit que $G_2$ est abélien.
- On exclut le cas $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
  *Méthode: étude de la filtration de ramification de $G_2$.*
- Reste à exclure les cas cycliques: $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$.
  *Méthode: considérer le problème de plongement.*

# Grosses actions avec $G_2$ cyclique.

Plus généralement:

**Théorème (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action. Si $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors $n = 1$.*

# Grosses actions avec $G_2$ cyclique.

Plus généralement:

**Théorème (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action. Si $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors $n = 1$.*

Preuve:

- Par transfert, on se ramène au cas $n = 2$, i.e. $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

# Grosses actions avec $G_2$ cyclique.

Plus généralement:

**Théorème (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action. Si $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors $n=1$.*

Preuve:

- Par transfert, on se ramène au cas $n=2$, i.e. $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- Soient $L := k(C)$ et $k(X) := L^{G_2}$.
  Alors, $L/k(X)$ est une extension d'Artin-Schreier-Witt:

$$[W_0, V_0]^p - [W_0, V_0] = [f_0(X), g_0(X)] \in W_2(k[X]).$$

# Grosses actions avec $G_2$ cyclique.

Plus généralement:

**Théorème (MR)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action. Si $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors $n = 1$.*

Preuve:

- Par transfert, on se ramène au cas $n = 2$, i.e. $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- Soient $L := k(C)$ et $k(X) := L^{G_2}$.
  Alors, $L/k(X)$ est une extension d'Artin-Schreier-Witt:

$$[W_0, V_0]^p - [W_0, V_0] = [f_0(X), g_0(X)] \in W_2(k[X]).$$

- *Problème de plongement.* Résoudre mod $\wp(W_2(k[X]))$ :

$$\forall y \in V, \quad [f_0(X+y), g_0(X+y)] = n(y)\,[f_0(X), g_0(X)] \quad n(y) \in (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$$

### Remarque

- *<u>Problème:</u> obstruction liée au cocycle de Witt.*

  *Il faut donc chercher $G_2$ sous la forme:*

$$G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$$

### Remarque

- *Problème:* *obstruction liée au cocycle de Witt.*

  *Il faut donc chercher $G_2$ sous la forme:*

$$G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$$

- *Question:* *trouver une borne inférieure sur t.*

### Remarque

- *Problème:* *obstruction liée au cocycle de Witt.*

  *Il faut donc chercher* $G_2$ *sous la forme:*

$$G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$$

- *Question:* *trouver une borne inférieure sur* $t$.
- *Dans la suite, on construit de telles actions avec* $t = O(\log_p g)$.

# Grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant $p^2$.

Notations: $q := p^e$, $e \in \mathbb{N}^*$, $K := \mathbb{F}_q(X)$, $K^{alg}$ fixé, $m \in \mathbb{N}$.

### Définition

*(K. Lauter 1999, R. Auer 1999) On appelle $K^m \subset K^{alg}$ l'extension abélienne maximale de $K$*

- *de conducteur $\leq m\infty$*
- *totalement décomposée au-dessus de $S := \{(X-y), y \in \mathbb{F}_q\}$.*

# Grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant $p^2$.

Notations: $q := p^e$, $e \in \mathbb{N}^*$, $K := \mathbb{F}_q(X)$, $K^{alg}$ fixé, $m \in \mathbb{N}$.

## Définition

*(K. Lauter 1999, R. Auer 1999) On appelle $K^m \subset K^{alg}$ l'extension abélienne maximale de $K$*

- *de conducteur $\leq m\infty$*
- *totalement décomposée au-dessus de $S := \{(X-y), y \in \mathbb{F}_q\}$.*

## Remarque

$$\mathscr{G}_m := \mathrm{Gal}\,(K^m/K) \simeq \frac{1 + Z\mathbb{F}_q[[Z]]}{\langle 1 + Z^m\mathbb{F}_q[[Z]], 1 - yZ, y \in \mathbb{F}_q\rangle}, \quad \textit{avec } Z = X^{-1}$$

*(Lauter) $\mathscr{G}_m$ est d'exposant $1$ ou $p \Leftrightarrow m < m_2 := p^{\lceil e/2\rceil + 1} + p + 1$.*

# Exemples de grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant $p^2$.

**Proposition (MR)**

- $\{X \to X+y, y \in \mathbb{F}_q\}$ *s'étend en un p-groupe* $G_m \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(K^m)$*:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}_m \longrightarrow G_m \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

# Exemples de grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant $p^2$.

**Proposition (MR)**

- $\{X \to X+y, y \in \mathbb{F}_q\}$ *s'étend en un p-groupe* $G_m \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(K^m)$*:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_m \longrightarrow G_m \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

- *Soit* $C_m/\mathbb{F}_q$ *la courbe projective lisse de corps de fonctions* $K^m$.
  - *Pour* $e \geq 6$, $(C_{m_2}, G_{m_2})$ *est une grosse action.*
  - *Son deuxième groupe de ramification* $\mathcal{G}_{m_2}$ *abélien d'exposant* $p^2$.

# Exemples de grosses actions avec $G_2$ abélien d'exposant $p^2$.

## Proposition (MR)

- $\{X \to X+y, y \in \mathbb{F}_q\}$ *s'étend en un p-groupe* $G_m \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(K^m)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_m \longrightarrow G_m \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

- *Soit* $C_m/\mathbb{F}_q$ *la courbe projective lisse de corps de fonctions* $K^m$.
  - *Pour* $e \geq 6$, $(C_{m_2}, G_{m_2})$ *est une grosse action.*
  - *Son deuxième groupe de ramification* $\mathcal{G}_{m_2}$ *abélien d'exposant* $p^2$.

## Remarque

*De même pour obtenir* $G_2$ *abélien d'exposant quelconque.*

### Remarque

*(Lien avec les courbes algébriques avec beaucoup de points rationnels).*

$$N_m = |C_m(\mathbb{F}_q)| = 1 + q|\mathscr{G}_m| = 1 + |G_m|$$

*D'où,*

$$\frac{|G_m|}{g_{C_m}} \sim \frac{N_m}{g_{C_m}}$$

Problème:

- On sait donner les équations de l'extension $K^{m_2}/K$.

Problème:

- On sait donner les équations de l'extension $K^{m_2}/K$.
- On cherche à présent une sous-extension de $K^{m_2}$ telle que: $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$ avec $t \geq 1$ minimal.

Problème:

- On sait donner les équations de l'extension $K^{m_2}/K$.
- On cherche à présent une sous-extension de $K^{m_2}$ telle que: $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$ avec $t \geq 1$ minimal.
- Difficulté:
  - Pour $K^{m_2}$, la stabilité par $\mathbb{F}_q$ est assurée par l'unicité et la maximalité.
  - Comment réduire le système d'équations en conservant la stabilité par $X \to X + y$, $y \in \mathbb{F}_q$?

# Construction d'une extension "minimale".

**Proposition**

*$q = p^e$ (cas e pair).[MR]*

- *Soient $p > 2$, $K = \mathbb{F}_q(X)$, avec $q = p^e$, $e = 2s$ et $r = p^s$.*
- *Soit $L := K(W_0, W_1 \dots W_p)$ l'extension de $K$ paramétrée par:*

$$\begin{cases} W_0^p - W_0 = f_0(X) := aX^{1+r} & a \neq 0,\ a \in \{\gamma \in \mathbb{F}_q,\ \gamma^r + \gamma = 0\} \\ [W_0, W_p]^p - [W_0, W_p] = [f_0(X), 0] & \\ W_i^q - W_i = f_i(X) := X^{ir/p}(X^q - X) & \forall i \in \{1, \dots, p-1\} \end{cases}$$

- *Soit $C_L/\mathbb{F}_q$ la courbe projective lisse de corps de fonctions $L$.*

## Proposition

- *$L$ est une extension abélienne de $K$ telle que toutes les places de $S$ se décomposent totalement dans $L$. En particulier, $L \subset K^{m_2}$.*

## Proposition

- *$L$ est une extension abélienne de $K$ telle que toutes les places de $S$ se décomposent totalement dans $L$. En particulier, $L \subset K^{m_2}$.*
- $\mathrm{Gal}(L/K)$ *satisfait:*

$$G_L := \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t \quad \textit{avec} \quad t = (p-1)e = O(\log_p(g))$$

## Proposition

- *$L$ est une extension abélienne de $K$ telle que toutes les places de $S$ se décomposent totalement dans $L$. En particulier, $L \subset K^{m_2}$.*
- $\mathrm{Gal}(L/K)$ *satisfait:*

  $$G_L := \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t \quad \textit{avec} \quad t = (p-1)e = O(\log_p(g))$$

- $\{X \to X + y, y \in \mathbb{F}_q\}$ *s'étend en un $p$-groupe $G \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(L)$:*

  $$0 \longrightarrow G_L \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

## Proposition

- *$L$ est une extension abélienne de $K$ telle que toutes les places de $S$ se décomposent totalement dans $L$. En particulier, $L \subset K^{m_2}$.*
- $\mathrm{Gal}(L/K)$ *satisfait:*

$$G_L := \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t \quad \textit{avec} \quad t = (p-1)e = O(\log_p(g))$$

- $\{X \to X + y, y \in \mathbb{F}_q\}$ *s'étend en un $p$-groupe $G \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(L)$:*

$$0 \longrightarrow G_L \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

- *Pour $e \geq 4$, $(C_L, G)$ est une grosse action avec $G_2 = G_L$.*

# Grosses actions avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ [Ro1].

Soit $(C,G)$ une grosse action avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$.
Soient $L := k(C)$, $k(X) := L^{G_2}$. Alors,

$$L/k(X) : W_i^p - W_i = g_i(X) \in k[X], \quad 1 \leq i \leq n.$$

# Grosses actions avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ [Ro1].

Soit $(C,G)$ une grosse action avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$.
Soient $L := k(C)$, $k(X) := L^{G_2}$. Alors,

$$L/k(X) : W_i^p - W_i = g_i(X) \in k[X], \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Définition**

*Soit*

$$A := \frac{\wp(L) \cap k[X]}{\wp(k[X])} := < \overline{g_1(X)}, \ldots, \overline{g_n(X)} >$$

*$A$ est le $\mathbb{F}_p$-sev de $k[X]$ dual de $G_2$ pour le pairing d'Artin-Schreier:*

$$\begin{cases} G_2 \times A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (g, \overline{\wp w}) \to g(w) - w \end{cases}$$

# Action de $V$ sur $G_2$.

$V$ agit sur $G_2$ par conjugaison via la représentation:

$$\phi : \begin{cases} V \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ y \longrightarrow \phi(y) \end{cases}$$

avec

$$\phi(y) : \begin{cases} G_2 \longrightarrow G_2 \\ g \longrightarrow s(y)\, g\, s(y)^{-1} \end{cases}$$

où

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G = G_1 \xrightarrow{\pi} V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \longrightarrow 0,$$

et $s$ est une section (ensembliste), i.e. $\pi \circ s = id$.

# Action duale de $V$ sur $A$.

De manière duale, $V$ agit sur $A$ par translation:

$$\rho : \begin{cases} V \rightarrow \mathrm{Aut}(A) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ y \rightarrow \rho(y) \end{cases}$$

avec

$$\rho(y) : \begin{cases} A \rightarrow A \\ \overline{f(X)} \rightarrow \overline{f(X+y)} \end{cases}$$

# Action duale de $V$ sur $A$.

De manière duale, $V$ agit sur $A$ par translation:

$$\rho : \begin{cases} V \to \mathrm{Aut}(A) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ y \to \rho(y) \end{cases}$$

avec

$$\rho(y) : \begin{cases} A \to A \\ \overline{f(X)} \to \overline{f(X+y)} \end{cases}$$

<u>Problème:</u>

- $\mathrm{Im}\,\rho$ est un sous-groupe unipotent de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
- On cherche une base de $A$ telle que $\mathrm{Im}\,\rho$ soit un sous-groupe de matrices triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale.

# Choix d'une base adaptée pour $A$.

## Définition

*On appelle* ***base adaptée*** *de A une base* $\{\overline{f_1(X)}, \ldots, \overline{f_n(X)}\}$*, telle que:*

- *chaque* $f_i \in k[X]$ *est réduit modulo* $\wp(k[X])$.
- $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\deg(f_i) \leq \deg(f_{i+1})$
- $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}_p)^n - \{(0, \ldots, 0)\}$,
$$\deg\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{f_i(X)}\right) = \max_{i=1,\ldots,n}\{\deg \lambda_i \overline{f_i(X)}\}.$$

# Choix d'une base adaptée pour $A$.

## Définition

*On appelle* ***base adaptée*** *de A une base* $\{\overline{f_1(X)}, \ldots, \overline{f_n(X)}\}$*, telle que:*

- *chaque* $f_i \in k[X]$ *est réduit modulo* $\wp(k[X])$.
- $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\deg(f_i) \leq \deg(f_{i+1})$
- $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}_p)^n - \{(0, \ldots, 0)\}$,
$$\deg\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{f_i(X)}\right) = \max_{i=1,\ldots,n}\{\deg \lambda_i \overline{f_i(X)}\}.$$

Désormais, $L/k(X) : W_i^p - W_i = f_i(X) \in k[X], \quad 1 \leq i \leq n.$
Le genre de $L/k(X)$ est donné par

$$g = \frac{1}{2}(p-1)\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}(\deg(f_i) - 1)$$

# Représentation matricielle.

Pour tout $y$ dans $V$, la matrice de $\rho(y)$ dans la base adaptée s'écrit:

$$L(y) := \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,2}(y) & \ell_{1,3}(y) & \dots & \ell_{1,n}(y) \\ 0 & 1 & \ell_{2,3}(y) & \dots & \ell_{2,n}(y) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \ell_{i,n}(y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ell_{n-1,n}(y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p).$$

# Représentation matricielle.

Pour tout $y$ dans $V$, la matrice de $\rho(y)$ dans la base adaptée s'écrit:

$$L(y) := \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,2}(y) & \ell_{1,3}(y) & \dots & \ell_{1,n}(y) \\ 0 & 1 & \ell_{2,3}(y) & \dots & \ell_{2,n}(y) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \ell_{i,n}(y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ell_{n-1,n}(y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p).$$

En d'autres termes,

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall y \in V,\ f_i(X+y) - f_i(X) = \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \mod \wp(k[X]).$$

### Remarque

*$f_1(X) = X S(X)$ avec $S(X) \in k[X]$ additif.*

### Remarque

*$f_1(X) = X\,S(X)$ avec $S(X) \in k[X]$ additif.*

Preuve:

- $A_1 := < \overline{f_1(X)} >$ est stable sous l'action de $\rho$.

### Remarque

$f_1(X) = X S(X)$ *avec* $S(X) \in k[X]$ *additif.*

Preuve:

- $A_1 := < \overline{f_1(X)} >$ est stable sous l'action de $\rho$.
- Son orthogonal $H_1 \subset G_2$ est stable par $\phi$. Donc $H_1$ est distingué dans $G$.

### Remarque

$f_1(X) = X S(X)$ *avec* $S(X) \in k[X]$ *additif.*

<u>Preuve:</u>

- $A_1 := < \overline{f_1(X)} >$ est stable sous l'action de $\rho$.
- Son orthogonal $H_1 \subset G_2$ est stable par $\phi$. Donc $H_1$ est distingué dans $G$.
- Par transfert, $(C/H_1, G/H_1)$ est une grosse action de deuxième groupe de ramification cyclique d'ordre $p$. $\square$

**Remarque**

*$f_1(X) = X S(X)$ avec $S(X) \in k[X]$ additif.*

Preuve:

- $A_1 := < \overline{f_1(X)} >$ est stable sous l'action de $\rho$.
- Son orthogonal $H_1 \subset G_2$ est stable par $\phi$. Donc $H_1$ est distingué dans $G$.
- Par transfert, $(C/H_1, G/H_1)$ est une grosse action de deuxième groupe de ramification cyclique d'ordre $p$. $\square$

Problème: trouver la forme des autres $f_i(X)$ et généraliser cet énoncé.

### Définition (Ro1)

*Soit $t \geq 1$. On appelle $\Sigma_t$ le k-sous-espace-vectoriel de $k[X]$ engendré par $1$ et les produits d'au plus t polynômes additifs.*

### Définition (Ro1)

*Soit $t \geq 1$. On appelle $\Sigma_t$ le k-sous-espace-vectoriel de $k[X]$ engendré par 1 et les produits d'au plus t polynômes additifs.*

### Lemme

- *Soit $a \in \mathbb{N}$ d'écriture p-adique: $a = a_0 + a_1 p + \ldots a_\ell p^\ell, \quad 0 \leq a_i \leq p-1$.*
  *On note $\mathrm{S}_p(a) = a_0 + a_1 + \ldots + a_\ell$.*
  *Alors,* $$X^a \in \Sigma_t \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{S}_p(a) \leq t.$$

## Définition (Ro1)

*Soit $t \geq 1$. On appelle $\Sigma_t$ le k-sous-espace-vectoriel de $k[X]$ engendré par $1$ et les produits d'au plus $t$ polynômes additifs.*

## Lemme

- *Soit $a \in \mathbb{N}$ d'écriture p-adique: $a = a_0 + a_1 p + \ldots a_\ell p^\ell, \quad 0 \leq a_i \leq p-1$.*
  *On note $\mathrm{S}_p(a) = a_0 + a_1 + \ldots + a_\ell$.*
  *Alors,* $$X^a \in \Sigma_t \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{S}_p(a) \leq t.$$
- *Soit $f(X) \in k[X] - \{0\}$ tel que $f(X) = \sum_{a \in \mathbb{N}} c_a(f) X^a$.*
  *On note $d_p(f) := \max_{c_a(f) \neq 0} \{\mathrm{S}_p(a)\}$.*
  *Alors,* $$f \in \Sigma_t \quad \Leftrightarrow \quad d_p(f) \leq t.$$

# Paramétrisation des grosses actions avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

**Théorème (Ro1)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ telle que $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$. Alors, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, f_i \in \Sigma_{i+1}$.*

# Paramétrisation des grosses actions avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

## Théorème (Ro1)

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ telle que $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$. Alors, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, f_i \in \Sigma_{i+1}$.*

## Remarque

- *Généralisation du cas $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $f(X) = X\,S(X) \in \Sigma_2$.*

# Paramétrisation des grosses actions avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

**Théorème (Ro1)**

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action de genre* $g \geq 2$ *telle que* $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$.
*Alors,* $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, f_i \in \Sigma_{i+1}$.

**Remarque**

- *Généralisation du cas* $G_2 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $f(X) = X\,S(X) \in \Sigma_2$.
- *Pour* $n \geq 2$, *pas de réciproque.*

# Lemmes préliminaires pour la preuve.

## Lemme

*(1) Soient $y \in k$ et $f \in k[X]$. On définit l'opérateur:*

$$\Delta_y(f) := f(X+y) - f(X)$$

*Alors,* $\quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad \Delta_y(\Sigma_{t+1}) \subset \Sigma_t.$

# Lemmes préliminaires pour la preuve.

## Lemme

*(1) Soient $y \in k$ et $f \in k[X]$. On définit l'opérateur:*

$$\Delta_y(f) := f(X+y) - f(X)$$

*Alors,* $\forall t \in \mathbb{N}, \quad \Delta_y(\Sigma_{t+1}) \subset \Sigma_t.$

## Lemme

*(2) Soit* $g(X) := \sum_{a\in\mathbb{N}} c_a(g) X^a \in \wp(k[X]).$
*Alors, pour tout $a_0 \in \mathbb{N} - p\mathbb{N}$,*

$$g_{a_0}(X) := \sum_{a\in\{a_0 p^n, n\in\mathbb{N}\}} c_a(g) X^a \in \wp(k[X])$$

*En particulier, si $p$ ne divise pas* $\deg(g_{a_0})$, *alors* $g_{a_0} \equiv 0$.

Preuve du théorème: (*Récurrence sur $i$*).

- On a vu: $f_1(X) = X\,S(X) \in \Sigma_2$.

Preuve du théorème: (*Récurrence sur i*).

- On a vu: $f_1(X) = X\,S(X) \in \Sigma_2$.
- Soit $i \geq 2$. On suppose que $\forall j \in \{1, \ldots, i-1\}, f_j \in \Sigma_{j+1}$. D'où

$$\forall y \in V,\ \Delta_y(f_i) := f_i(X+y) - f_i(X) = \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i \mod \wp(k[X]).$$

Preuve du théorème: (*Récurrence sur $i$*).

- On a vu: $f_1(X) = X\,S(X) \in \Sigma_2$.
- Soit $i \geq 2$. On suppose que $\forall j \in \{1,\dots,i-1\}, f_j \in \Sigma_{j+1}$. D'où

$$\forall y \in V,\ \Delta_y(f_i) := f_i(X+y) - f_i(X) = \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i \qquad \mod \wp(k[X]).$$

- *On suppose que $f_i \notin \Sigma_{i+1}$.*
  Soit $X^a$ le monôme de plus haut degré de $f_i$ qui n'est pas dans $\Sigma_{i+1}$.

- *On montre que $p$ divise $a-1$.*
  Sinon, Lemme (2) à $a_0 = a-1$ et $g(X) := \Delta_y(f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X)$.
  Pour construire $g_{a_0}(X)$, on cherche les $X^{(a-1)p^n}$, $n \geq 0$.

- *On montre que $p$ divise $a-1$.*
  Sinon, Lemme (2) à $a_0 = a-1$ et $g(X) := \Delta_y(f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X)$.
  Pour construire $g_{a_0}(X)$, on cherche les $X^{(a-1)p^n}$, $n \geq 0$.
  - On cherche d'abord dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
    - Comme $X^a \notin \Sigma_{i+1}$, alors $X^{a-1} \notin \Sigma_i$.
    - D'où, $\forall n \geq 0$, $X^{(a-1)p^n} \notin \Sigma_i$.
    - Donc, pas de $X^{(a-1)p^n}$ dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.

- *On montre que $p$ divise $a-1$.*
  Sinon, Lemme (2) à $a_0 = a-1$ et $g(X) := \Delta_y(f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X)$.
  Pour construire $g_{a_0}(X)$, on cherche les $X^{(a-1)p^n}$, $n \geq 0$.
  - On cherche d'abord dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
    - Comme $X^a \notin \Sigma_{i+1}$, alors $X^{a-1} \notin \Sigma_i$.
    - D'où, $\forall n \geq 0$, $X^{(a-1)p^n} \notin \Sigma_i$.
    - Donc, pas de $X^{(a-1)p^n}$ dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
  - Soit $X^b$ un monôme de $f_i(X)$. On cherche les $X^{(a-1)p^n}$ dans $\Delta_y(X^b)$.
    - Si $b < a$, pas de contribution.
    - Si $b = a$, contribution en $a\,y\,c_a(f)\,X^{a-1}$.
    - Si $b > a$, $X^b \in \Sigma_{i+1}$ donc (Lemme 1) $\Delta_y(X^b) \in \Sigma_i$. Pas de contribution.

- *On montre que $p$ divise $a-1$.*
  Sinon, Lemme (2) à $a_0 = a-1$ et $g(X) := \Delta_y(f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X)$.
  Pour construire $g_{a_0}(X)$, on cherche les $X^{(a-1)p^n}$, $n \geq 0$.
  - On cherche d'abord dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
    - Comme $X^a \notin \Sigma_{i+1}$, alors $X^{a-1} \notin \Sigma_i$.
    - D'où, $\forall n \geq 0$, $X^{(a-1)p^n} \notin \Sigma_i$.
    - Donc, pas de $X^{(a-1)p^n}$ dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
  - Soit $X^b$ un monôme de $f_i(X)$. On cherche les $X^{(a-1)p^n}$ dans $\Delta_y(X^b)$.
    - Si $b < a$, pas de contribution.
    - Si $b = a$, contribution en $a\,y\,c_a(f)\,X^{a-1}$.
    - Si $b > a$, $X^b \in \Sigma_{i+1}$ donc (Lemme 1) $\Delta_y(X^b) \in \Sigma_i$. Pas de contribution.

  <u>Conclusion:</u> $g_{a_0}(X) = a\,y\,c_a(f)\,X^{a-1}$

- *On montre que $p$ divise $a-1$.*
  Sinon, Lemme (2) à $a_0 = a-1$ et $g(X) := \Delta_y(f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X)$.
  Pour construire $g_{a_0}(X)$, on cherche les $X^{(a-1)p^n}$, $n \geq 0$.
  - On cherche d'abord dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
    - Comme $X^a \notin \Sigma_{i+1}$, alors $X^{a-1} \notin \Sigma_i$.
    - D'où, $\forall n \geq 0$, $X^{(a-1)p^n} \notin \Sigma_i$.
    - Donc, pas de $X^{(a-1)p^n}$ dans $\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y) f_j(X) \in \Sigma_i$.
  - Soit $X^b$ un monôme de $f_i(X)$. On cherche les $X^{(a-1)p^n}$ dans $\Delta_y(X^b)$.
    - Si $b < a$, pas de contribution.
    - Si $b = a$, contribution en $a\,y\,c_a(f)\,X^{a-1}$.
    - Si $b > a$, $X^b \in \Sigma_{i+1}$ donc (Lemme 1) $\Delta_y(X^b) \in \Sigma_i$. Pas de contribution.

  Conclusion: $g_{a_0}(X) = a\,y\,c_a(f)\,X^{a-1} \equiv 0$ (Lemme 2).
  Alors $V = \{0\}$. *Contradiction.*

- D'où $a-1=\lambda p^t$, avec $t \geq 1$ et $\lambda \geq 2$ premier à $p$.

- D'où $a-1=\lambda p^t$, avec $t \geq 1$ et $\lambda \geq 2$ premier à $p$.
- On applique le Lemme (2) à $a_0 = a - p^t$ et au même $g(X)$.

- D'où $a-1=\lambda p^t$, avec $t \geq 1$ et $\lambda \geq 2$ premier à $p$.
- On applique le Lemme (2) à $a_0 = a - p^t$ et au même $g(X)$.
  - On trouve $g_{a_0}(X) = T(y)X^{a-p^t} \equiv 0$ avec $T(X) \in k[X]$ de degré $p^t$.
  - Donc $V \subset Z(T)$ et $|V| \leq p^t$.
  - Cela entraîne: $\frac{|G|}{g} = \frac{[G_2||V|}{g} \leq \frac{2p}{p-1}$. *Contradiction.* $\square$

# Cas particulier: chaque $f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$.

**Définition (Ro1)**

*Soit G un groupe. On définit une suite croissante de sous-groupes caractéristiques de G comme suit:*

$$\Lambda_0(G) = \{e\}$$

$$\forall i \geq 1, \frac{\Lambda_i(G)}{\Lambda_{i-1}(G)} = Z(\frac{G}{\Lambda_{i-1}(G)}) \cap D(\frac{G}{\Lambda_{i-1}(G)}).$$

# Cas particulier: chaque $f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$.

### Théorème (Ro1)

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 2$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$.
- $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $\frac{\Lambda_i(G)}{\Lambda_{i-1}(G)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\ell_{i,i+1}$ *est une* $\mathbb{F}_p$*-forme linéaire non nulle.*

# Cas particulier: chaque $f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$.

## Théorème (Ro1)

*Soit $(C,G)$ une grosse action de genre $g \geq 2$ avec $G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 2$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- $\forall i \in \{1,\dots,n\}, f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$.
- $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \frac{\Lambda_i(G)}{\Lambda_{i-1}(G)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell_{i,i+1}$ *est une $\mathbb{F}_p$-forme linéaire non nulle.*

*Alors,*

- $n \leq p-1$.
- $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \deg(f_i) = 1 + ip^s$.
- $\dim_{\mathbb{F}_p} V = s+1$.
- *La suite $\Lambda_i(G)$ coïncide avec la suite de ramification supérieure de $G_2$:* $\forall i \in \{0,\dots,n\}, \quad \Lambda_{n-i}(G) = (G_2)^{v_i}$.

# Exemples.

On construit ici une famille de grosses actions vérifiant le théorème précédent.

# Exemples.

On construit ici une famille de grosses actions vérifiant le théorème précédent.

## Proposition (Ro2)

- *Soit* $p \geq 3$, $S(X) := \wp(X) = X^p - X$.
- *Soit* $L/k(X)$ *l'extension paramétrée par:*

$$\begin{cases} W_i^p - W_i = g_i(X) := \frac{S(X)^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{(X^p - X)^{i+1}}{(i+1)!} & \forall i \in \{1, \dots, p-2\} \\ W_{p-1}^p - W_{p-1} = g_{p-1}(X) \end{cases}$$

*où* $g_{p-1}(X) \in k[X]$ *est la réduction mod* $p$ *du polynôme:*

$$\frac{1}{p!}\left((X^p - X)^p - X^{p^2} + X^p\right) \in W(k)[X].$$

- *Soit* $C/k$ *la courbe projective lisse de corps de fonctions* $L$.

**Proposition**

*Soit* $S(X) := X^p - X$, $Q(X) := S(X)^p - S(X)$ *et* $V := Z(Q)$.

- $\{X \to X + y, y \in V\}$ *s'étend en un p-groupe* $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$*:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k(X)) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \longrightarrow G \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

### Proposition

*Soit* $S(X) := X^p - X$, $Q(X) := S(X)^p - S(X)$ *et* $V := Z(Q)$.

- $\{X \to X + y, y \in V\}$ *s'étend en un p-groupe* $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$*:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k(X)) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \longrightarrow G \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

- $(C, G)$ *est une grosse action avec* $G_2 = \mathrm{Gal}(L/k(X)) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.
- *Cette grosse action vérifie: "*$\forall\, i, f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$*" avec* $s = 1$*, i.e.* $\dim_{\mathbb{F}_p} V = s + 1 = 2$.

*Idée:* Pour tout $i \geq 1$ et tout $y \in V = Z(S(X)^p - S(X))$,

$$\begin{aligned} g_i(X+y) - g_i(X) &= \tfrac{1}{(i+1)!}\left\{(S(X)+S(y))^{i+1} - S(X)^{i+1}\right\} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{S(y)^{i-j}}{(i-j)!}\frac{S(X)^{j+1}}{(j+1)!} + \frac{S(y)^i}{i!}S(X) + \frac{S(y)^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

*<u>Idée:</u>* Pour tout $i \geq 1$ et tout $y \in V = Z(S(X)^p - S(X))$,

$$\begin{aligned} g_i(X+y) - g_i(X) &= \tfrac{1}{(i+1)!}\left\{(S(X)+S(y))^{i+1} - S(X)^{i+1}\right\} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{S(y)^{i-j}}{(i-j)!}\,\frac{S(X)^{j+1}}{(j+1)!} + \frac{S(y)^i}{i!}\,S(X) + \frac{S(y)^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

Comme $S(y) \in \mathbb{F}_p$ et $S(X) = X^p - X$,

$$\begin{aligned} g_i(X+y) - g_i(X) &= \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{S(y)^{i-j}}{(i-j)!}\,g_j(X) + \wp\left(\frac{S(y)^i}{i!}X\right) + g_i(y) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \ell_{j,i}(y)\,g_j(X) \qquad \mathrm{mod} \quad \wp(k[X]) \end{aligned}$$

avec

$$\ell_{j,i}(y) := \frac{S(y)^{i-j}}{(i-j)!} \in \mathbb{F}_p$$

D'où,

$$L(y) = \exp(S(y)\,J)$$

avec

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par changement de base, on atteint $s \geq 1$ quelconque.

Par changement de base, on atteint $s \geq 1$ quelconque.

### Proposition (Ro1)

*Soit $(C,G)$ la grosse action précédente. On considère le changement de base:*

$$\begin{array}{ccc} C & \longleftarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/G_2 \simeq \mathbb{P}^1_k & \xleftarrow{S_0} & \mathbb{P}^1_k \end{array}$$

*où $S_0$ est un polynôme additif séparable de $k[X]$ de degré $p^{s_0}$.*

Par changement de base, on atteint $s \geq 1$ quelconque.

## Proposition (Ro1)

*Soit $(C, G)$ la grosse action précédente. On considère le changement de base:*

$$\begin{array}{ccc} C & \longleftarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/G_2 \simeq \mathbb{P}^1_k & \stackrel{S_0}{\longleftarrow} & \mathbb{P}^1_k \end{array}$$

*où $S_0$ est un polynôme additif séparable de $k[X]$ de degré $p^{s_0}$.*

- *La courbe $\tilde{C} := C \times_{\mathbb{P}^1_k} \mathbb{P}^1_k$ a pour genre $g_{\tilde{C}} = p^{s_0} g_C$.*
- *$\tilde{C} \rightarrow C/G$ est un revêtement galoisien de groupe $\tilde{G} \simeq G \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s_0}$.*
- *Donc $\frac{|G|}{g_C} = \frac{|\tilde{G}|}{g_{\tilde{C}}}$ et $(\tilde{C}, \tilde{G})$ est une grosse action avec $\tilde{G}_2 \simeq G_2 \times \{0\}$.*
- *Cette grosse action vérifie "$\forall i, f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$" avec $s = s_0 + 1$.*

# Familles universelles.

- Les résultats précédents facilitent la paramétrisation des grosses actions $(C,G)$ vérifiant "$\forall\, i, f_i \in \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$".
- On en donne ici une illustration avec $p = 5$ et $s = 1$.

# Paramétrisation de la famille universelle pour $p = 5$ et $s = 1$.

- $\underline{n = 2}$ [Ro1]

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(X) &= X^6 + 2\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,X^2 \\ f_2(X) &= b_{11}^5\,X^{11} + 4\,b_{11}^{25}\,X^7 + 2\,(b_{11}^{50} - b_{11}^2)\,b_{11}^{-5}\,X^3 + b_1\,X \end{aligned}}$$

avec $b_{11} \in k^{\times}$ et $b_1 \in k$ algébriquement indépendants.

# Paramétrisation de la famille universelle pour $p = 5$ et $s = 1$.

- $\underline{n = 2}$ [Ro1]

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(X) &= X^6 + 2\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,X^2 \\ \\ f_2(X) &= b_{11}^5\,X^{11} + 4\,b_{11}^{25}\,X^7 + 2\,(b_{11}^{50} - b_{11}^2)\,b_{11}^{-5}\,X^3 + b_1\,X \end{aligned}}$$

avec $b_{11} \in k^\times$ et $b_1 \in k$ algébriquement indépendants.

- L'espace des paramètres est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}_k^2$. Il est donc irréductible: $G$ est unique à isomorphisme près.

# Paramétrisation de la famille universelle pour $p = 5$ et $s = 1$.

- $\underline{n = 2}$ [Ro1]

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(X) = X^6 + 2\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,X^2 \\ \\ f_2(X) = b_{11}^5\,X^{11} + 4\,b_{11}^{25}\,X^7 + 2\,(b_{11}^{50} - b_{11}^2)\,b_{11}^{-5}\,X^3 + b_1\,X \end{array}}$$

avec $b_{11} \in k^\times$ et $b_1 \in k$ algébriquement indépendants.

  - L'espace des paramètres est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}_k^2$. Il est donc irréductible: $G$ est unique à isomorphisme près.
  - Deux courbes $C(b_{11}, b_1)$ et $C(b'_{11}, b'_1)$ sont isomorphes si et seulement si:

$$\left(\frac{b'_{11}}{b_{11}}\right)^{24} = 1 \qquad \text{et} \qquad b'_1 = \pm\frac{b'_{11}}{b_{11}}\,b_1$$

- $\underline{n=3}$ [Ro1]

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_1(X) = {} & X^6 + 2\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,X^2 \\
f_2(X) = {} & b_{11}^5\,X^{11} + 4\,b_{11}^{25}\,X^7 + 2\,(b_{11}^{50} - b_{11}^2)\,b_{11}^{-5}\,X^3 + 2\,(c_6 - c_6^5)\,b_{11}^{-5}\,X \\
f_3(X) = {} & 4\,b_{11}^{10}\,X^{16} + 4\,b_{11}^{30}\,X^{12} + c_{11}^5\,X^{11} + 4\,b_{11}^{50}\,X^8 + 4\,c_{11}^{25}\,X^7 \\
& + c_6^5\,X^6 + 4\,(b_{11}^{75} + b_{11}^3)\,b_{11}^{-5}\,X^4 \\
& + \{(b_{11}^{25} + b_{11})\,c_{11}\,b_{11}^{-5} + 2\,(b_{11}^{25} + b_{11})^2\,c_{11}^5\,b_{11}^{-10}\}\,X^3 \\
& + 2\,(c_6^5\,b_{11}^{25} + c_6\,b_{11})\,b_{11}^{-5}\,X^2 + c_1\,X
\end{aligned}
}
$$

avec $b_{11} \in k^{\times}$, $c_6 \in k$ et $c_1 \in k$ algébriquement indépendants et $c_{11} \in k$ tel que:

$$c_{11}^{25} + 4\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,c_{11}^{5} + c_{11} = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad c_{11}^{5} \in V)$$

avec $b_{11} \in k^{\times}$, $c_6 \in k$ et $c_1 \in k$ algébriquement indépendants
et $c_{11} \in k$ tel que:

$$c_{11}^{25} + 4\,(b_{11}^{25} + b_{11})\,b_{11}^{-5}\,c_{11}^{5} + c_{11} = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad c_{11}^{5} \in V)$$

**Remarque**

*L'espace des paramètres n'est pas connexe.*
*On trouve deux modèles de groupes G non isomorphes, et chacun est réalisé.*

# Eléments pour la classification des grosses actions [Ro2].

## Remarque

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action.*
*Soit* $\mathscr{S}$ *un p-Sylow de* $\mathrm{Aut}_k(C)$ *tel que* $G \subset \mathscr{S}$.

# Eléments pour la classification des grosses actions [Ro2].

**Remarque**

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action.*
*Soit* $\mathscr{S}$ *un p-Sylow de* $\mathrm{Aut}_k(C)$ *tel que* $G \subset \mathscr{S}$.

- *Alors,* $(C,\mathscr{S})$ *est une grosse action.*
- *Si* $\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0$, $(C,\mathscr{S})$ *vérifie la même condition.*

Conclusion: on peut supposer que $G$ est un $p$-Sylow de $\mathrm{Aut}_k(C)$.

**Proposition (Ro2)**

*Soit $C/k$ une courbe algébrique projective lisse connexe de genre $g \geq 2$. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$ tel que $(C, G)$ soit une grosse action.*

## Proposition (Ro2)

*Soit $C/k$ une courbe algébrique projective lisse connexe de genre $g \geq 2$. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_k(C)$ tel que $(C, G)$ soit une grosse action.*

- *Alors, il existe un point $\infty \in C$ tel que $G \subset A_{\infty,1} := (\mathrm{Aut}_k(C))_{\infty,1}$ et*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D(A_{\infty,1}) = A_{\infty,2} & \longrightarrow & A_{\infty,1} & \xrightarrow{\pi} & W & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \bigcup & & \bigcup & & \\
0 & \longrightarrow & D(G) = G_{\infty,2} & \longrightarrow & G = G_{\infty,1} & \xrightarrow{\pi} & V & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

### Proposition

- $A_{\infty,1}$ *est un p-sous-groupe de Sylow de* $\mathrm{Aut}_k(C)$.

## Proposition

- *$A_{\infty,1}$ est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Aut}_k(C)$.*
- *Ce p-Sylow est **unique** (et par suite $\infty$) sauf lorsque $C$ est isomorphe à*

## Proposition

- $A_{\infty,1}$ *est un p-sous-groupe de Sylow de* $\mathrm{Aut}_k(C)$.
- *Ce p-Sylow est* ***unique*** *(et par suite $\infty$) sauf lorsque C est isomorphe à*
    - *La courbe hermitienne:*
      $$C_H : \quad W^q + W = X^{1+q} \ \text{ avec } p \geq 2,\ q = p^s,\ s \geq 1.$$
    - *La courbe de Deligne-Lusztig liée au groupe de Suzuki:*
      $$C_S : \quad W^q + W = X^{q_0}\left(X^q + X\right) \text{ avec } p = 2,\ q_0 = 2^s,\ s \geq 1 \text{ et } q = 2^{2s+1}.$$
    - *La courbe de Deligne-Lusztig liée au groupe de Ree:*
      $$C_R : \quad W_1^q - W_1 = X^{q_0}\left(X^q + X\right) \quad \text{et} \quad W_2^q - W_2 = X^{2q_0}\left(X^q + X\right)$$
      *avec* $p = 3$, $q_0 = 3^s$, $s \geq 1$ *and* $q = 3^{2s+1}$.

Conclusion: Dans notre classification,

- on se cible sur le(s) $p$-Sylow: $A_{\infty,1}$.
- on discute suivant l'ordre de son deuxième groupe de ramification.

Conclusion: Dans notre classification,

- on se cible sur le(s) $p$-Sylow: $A_{\infty,1}$.
- on discute suivant l'ordre de son deuxième groupe de ramification.

En effet...

**Proposition (Ro2)**

*Soit $(C,G)$ une grosse action telle que $\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0$.*
*Alors $|G_2|$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Question: Qu'en est-il pour $g$, $|V|$ et par suite $\frac{|G|}{g}$?

# Résultats de finitude.

**Remarque**

*Si* $(C,G)$ *est une grosse action,* $\mathrm{Fratt}(G_2) \subset [G_2, G]$.

# Résultats de finitude.

### Remarque

*Si* $(C, G)$ *est une grosse action,* $\mathrm{Fratt}(G_2) \subset [G_2, G]$.

### Proposition (Ro2)

*Soit* $(C, G)$ *une grosse action telle que* $\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0$.

# Résultats de finitude.

### Remarque

*Si* $(C,G)$ *est une grosse action,* $\mathrm{Fratt}(G_2) \subset [G_2,G]$.

### Proposition (Ro2)

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action telle que* $\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0$.

- *Si* $\mathrm{Fratt}(G_2) \subsetneq [G_2,G]$,
  - $g$, $|V|$ *et* $\frac{|G|}{g}$ *prennent un nombre fini de valeurs.*

# Résultats de finitude.

### Remarque

*Si* $(C,G)$ *est une grosse action,* $\mathrm{Fratt}\,(G_2) \subset [G_2, G]$.

### Proposition (Ro2)

*Soit* $(C,G)$ *une grosse action telle que* $\frac{|G|}{g^2} \geq M > 0$.

- *Si* $\mathrm{Fratt}\,(G_2) \subsetneq [G_2, G]$,
  - $g$, $|V|$ *et* $\frac{|G|}{g}$ *prennent un nombre fini de valeurs.*
- *Si* $\mathrm{Fratt}\,(G_2) = [G_2, G]$,
  - $\frac{|G|}{g}$ *n'est pas toujours borné (voir* $W^p - W = XS(X)$ *et* $G = A_{\infty,1}$*).*
  - *si* $\mathrm{Fratt}\,(G_2) = [G_2, G] = \{e\}$, $\frac{|G|}{g^2}$ *prend un nombre fini de valeurs.*
  - *si* $\mathrm{Fratt}\,(G_2) = [G_2, G] \neq \{e\}$ *et si* $p > 2$, $G_2$ *est non abélien.*