Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 50- Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Commentaires du jury 2015 :
Cette leçon demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête. On pourra aussi travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.
Commentaires du jury 2016 :
Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...), d'autre part des algorithmes comme le pivot de Gauss. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête. S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Remarque : Le qualificatif "espaces de matrices" peut sembler limiter l'étude aux "espaces vectoriels de matrices". Il y a beaucoup d'exemples dans le programme mais si l'on souhaite parler de la décomposition LU ou de la décomposition de Bruhat il est facile de les replacer dans ce contexte. Voir exercices 3 et 5 ci-dessous.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2'] Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
et
[Bo.] Boyer P. *Algèbre et Géométrie* (Calvage Mounet 2016)
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Une proposition de plan.

(1) Actions par multiplication à gauche.

(a) Le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ opère par multiplication à gauche sur $M_{n,p}(K)$, [Fr. A] p. 47.
Un système de représentants des orbites est donné par les matrices échelonnées normalisées. Rappelons qu'une matrice échelonnée normalisée est nulle ou de rang $r > 0$ et associée à une suite $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_r \leq n$, ce sont alors les matrices $N(a) = [C_1, C_2, ..., C_p] \in M_{n,p}(K)$ de rang r telles que les colonnes C_{j_k}, $1 \leq k \leq r-1$ sont les $r-1$ premiers vecteurs de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de K^n, et $C_{j_r} = ae_{j_r}$ avec $a = 1$ si $r < n$ et $a \in K - \{0\}$ si $r = n$. Les autres colonnes étant sujettes à la règle suivante : $C_i = 0$ pour $1 \leq i \leq j_1$, $C_j \in \bigoplus_{1 \leq i \leq k} Ke_i$ pour $j_k \leq i \leq j_{k+1}$) et enfin $C_j \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} Ke_i$ pour $j_r \leq i$.
Le stabilisateur de la matrice $N(a)$ précédemment définie est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices $\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $B \in M_{r,n-r}(K)$ et $C \in \mathrm{SL}_{n-r,n-r}(K)$.
Remarque. Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ opère par multiplication à gauche sur $M_{n,p}(K)$, voir exercice 1 ci-dessous. Le noyau donc le rang est constant sur chaque orbite. Un système de représentants des orbites est donné par la matrice nulle union les matrices normalisées $N(1)$ (i.e. $a = 1$). De

plus 2 matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau et les noyaux décrivent les sous-espaces vectoriels V de K^p avec $\dim V \geq p-n$.

(b) Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ opère sur $M_n(\mathbb{R})$; c'est la décomposition polaire, [Fr. B-C-D] exercice 10.25 p. 148 et exercice 7 ci-dessous.

Un système de représentants des orbites est donné par les matrices symétriques positives $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ (il y a en effet unicité dans $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ de la racine carrée, [Fr. B-C-D] exercice 10.26 p. 149 et exercice 7 ci-dessous).

Le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ avec $S \in \mathrm{Sym}_{n-r}^{++}(\mathbb{R})$ (matrices symétriques définies positives) est le sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ des matrices $\begin{pmatrix} O_r(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Ainsi les orbites avec un stabilisateur trivial sont les orbites des matrices inversibles ; c'est l'unicité de la décomposition polaire pour les matrices inversibles.

(c) On étudie de la même façon l'action de $SO_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$; cette action est fidèle (i.e. le stabilisateur est trivial) et un système de représentants est donné par les matrices symétriques définies positives de déterminant 1. Dans le cas particulier $n=2$, il y a une bijection entre l'ensemble des orbites i.e. les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avec $ac-b^2=1$ et le demi-plan de Poincaré, [Fr. B-C-D] exercice 10.81 p. 210.

(2) Actions par multiplication à gauche et à droite.

(a) Le groupe $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_p(K)$ opère sur $M_{n,p}(K)$ par $(G_1, G_2) \star M = G_1 M G_2^{-1}$. Un système de représentants des orbites est 0 si $r := \mathrm{rang}(M) = 0$, $J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $0 < r$. Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même rang, dans le langage courant on parle de matrices équivalentes. Il y a donc $1 + \min(n,p)$ orbites. Le stabilisateur de J_r est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_p(K)$ constitué des couples $(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix})$ avec A, D, D' inversibles.

(b) Le groupe $O_n(K) \times O_p(K)$ opère sur $M_{n,p}(K)$ par $(G_1, G_2) \star M = G_1 M G_2^{-1}$, c'est la décomposition de Cartan, [Fr. B-C-D] exercice 10.18 p. 142.

Un système de représentants des orbites est donné par la matrice nulle et les matrices $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) avec $D \in M_r(\mathbb{R})$ diagonale de diagonale $(d_1, d_2, ..., d_r)$ avec $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_r > 0$ et $r > 0$. Pour une description du stabilisateur on renvoie à [Fr. B-C-D] exercice 10.18, partie 3).

(c) La décomposition "LDU" (plus communément dénommée "LU") ,[F. M. 1] p.8 et pour la généralisation aux matrices de $M_{n,p}(K)$ voir [F. M. 2] p. 27 et exercice 3 ci-dessous pour le cas $n=2$.

On note $L_{n,s}(K)$ resp. $U_{n,s}(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices triangulaires inférieures avec que des 1 sur la diagonale, resp. des matrices triangulaires supérieures avec que des 1 sur la diagonale. Le groupe $L_{n,s}(K) \times U_{n,s}(K)$ opère sur $M_n(K)$ par $(G_1, G_2) \star M = G_1 M G_2^{-1}$. La décomposition "LDU" classique est la restriction aux matrices dont les déterminants principaux ne sont pas nuls auquel cas l'action est fidèle (i.e. le stabilisateur est trivial) et un système de représentants est alors donné par les matrices diagonales inversibles. La dénomination "LU" vient du fait que l'action à droite par $U_{n,s}(K)$ est remplacée par celle du groupe $U(K)$ des matrices triangulaires supérieures inversibles ; i.e. "DU" se confond avec "U".

(d) La décomposition de Bruhat, [F. M. 1] $n°5$ et [F. M. 2] p. 43.

On note $U_n(K)$ resp. $U_{n,s}(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures, resp. des matrices triangulaires supérieures avec que des 1 sur la diagonale. Le groupe $U_{n,s}(K) \times U_n(K)$ opère sur $\mathrm{GL}_n(K)$ par $(G_1, G_2) \star M = G_1 M G_2^{-1}$.

Un système de représentants des orbites est donné par les matrices de permutations $Q(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

La seule orbite sur laquelle l'action est fidèle (i.e. le stabilisateur est trivial) est celle de $Q(\tau)$ où $\tau(i) = n + 1 - i$ pour $1 \leq i \leq n$. Dans le cas où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'orbite de $Q(\tau)$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(K)$.

Remarque. Dans [F. M. 2] p. 43 on trouvera plus généralement l'étude de cette action sur $M_n(K)$ en lien avec la décomposition LDU.

(e) La décomposition d'Iwasawa, [Fr. B-C-D] exercice 10.4 p. 132.

Le groupe $O_n(\mathbb{R}) \times U_{n,s}(\mathbb{R})$ opère sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $(G_1, G_2) \star M = G_1 M G_2^{-1}$. Un système de représentants des orbites est donné par les matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs. L'action est fidèle.

(3) Actions par conjugaison.

(a) La décomposition de Frobenius, [F. M. 2] p. 11.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ opère sur $M_n(K)$ par conjugaison. Un système de représentants des orbites est donné par les matrices formées de tableaux diagonaux $(C(P_m), C(P_{m+1}), ..., C(P_n))$ avec $P_i \in K[X]$, unitaire de degré > 0, $P_m | P_{m+1} | ... | P_n$, $C(P_i)$ est la matrice compagnon de P_i (nécessairement on a donc $\deg P_m + \deg P_{m+1} + ... + \deg P_n = n$). Les polynômes P_i sont les invariants de similitude de M. Si $\mathrm{Com}(M)$ est le commutant de M ; c'est un K-espace vectoriel, le stabilisateur de M est le groupe $\mathrm{Com}(M) \cap \mathrm{GL}_n(K)$, voir [F. M. 2] p. 45 pour la dimension de $\mathrm{Com}(M)$.

(b) Réduction des matrices symétriques réelles, [Fr. B-C-D] cor. 8.14 p. 118.

Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ opère sur $Sym_n(\mathbb{R})$ par conjugaison. Un système de représentants des orbites est donné par les matrices diagonales avec $(d_1, d_2, ..., d_n)$ sur la diagonale et $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$. Le stabilisateur de la matrice diagonale par blocs $(d_1 \,\mathrm{Id}_{n_1}, d_2 \,\mathrm{Id}_{n_2}, ..., d_s \,\mathrm{Id}_{n_s})$ avec $d_1 < d_2 < ... < d_s$ est le sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ des matrices formées de tableaux diagonaux $(\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_s)$ avec $\Delta_i \in O_{n_i}(\mathbb{R})$.

(c) La réduction des matrices orthogonales, [Fr. B-C-D] prop. 5.1.1 p. 89. Cité pour mémoire puisque l'on n'est pas précisément dans le cas d'une action sur un espace vectoriel...

(4) Matrices congruentes.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ opère sur $Sym_n(K)$ par $P \star S = PS\,{}^tP$ (on se limite à la caractéristique de K différente de 2). Il est essentiel d'avoir en tête que les orbites sont en bijection avec les classes d'isomorphismes d'espaces quadratiques (K^n, Φ) ; précisément on associe à $S \in Sym_n(K)$ la forme bilinéaire symétrique $\Phi_S \ : \ K^n \times K^n \to K$ définie par $\Phi_S(X, Y) = {}^tXSY$, alors $S' = PS\,{}^tP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ si et seulement si les espaces quadratiques (K^n, Φ_S) et $(K^n, \Phi_{S'})$ sont isomorphes. On note que le rang est constant sur chaque orbite et dans chaque orbite il y a des matrices diagonales ; c'est l'existence de bases orthogonales [Fr. B-C-D] p. 18. On est ainsi ramené à l'action sur les matrices diagonales nulles ou avec $(d_1, d_2, ..., d_r, 0, 0, ..., 0)$ sur la diagonale et $d_i \in K^\star$.

Le stabilisateur de la matrice diagonale avec $(d_1, d_2, ..., d_r, 0, 0, ..., 0)$ sur la diagonale est le sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathrm{GL}_r(K)$, $Z \in \mathrm{GL}_{n-r}(K)$, $V \in M_{r,n-r}(K)$ et $UD\,{}^tU = D$ où D est la matrice diagonale avec $(d_1, d_2, ..., d_r)$ sur la diagonale. Autrement dit U parcourt le groupe orthogonal de $\Phi_{D^{-1}}$, Z parcourt le groupe $\mathrm{GL}_{n-r}(K)$ et V parcourt $M_{r,n-r}(K)$.

On peut rentrer plus dans le détail en fonction du corps K.

(a) Le corps K est algébriquement clos.

Un système de représentants des orbites est donné par la matrice nulle ou $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $1 \leq r \leq n$.

(b) Le corps $K = \mathbb{R}$.

Un système de représentants des orbites est donné par la matrice nulle ou $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_q \end{pmatrix}$ avec $1 \leq r \leq n$ avec $p+q=r$ est le rang, c'est la loi d'inertie de Sylvester, [Fr. B-C-D] exercice 10.45 p. 166.

Pour le stabilisateur on pourra consulter [F. M. 2] p. 105.

(c) Le corps $K = \mathbb{F}_q$ est un corps fini.

La classification des orbites se déduit de la décomposition des espaces quadratiques non dégénérés en somme directe orthogonale d'un espace hyperbolique et d'un espace défini, [Fr. B-C-D] exercice 16.3 p. 46.

Si le rang est pair, $r = 2t$, il y a 2 orbites de matrices de rang r et ce sont les orbites de $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec

A_1 un tableau diagonal de t matrices 2×2 égales à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

A_2 un tableau diagonal de $t-1$ matrices 2×2 égales à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ suivies de la matrice 2×2 égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, avec $s \in \mathbb{F}_q - {\mathbb{F}_q}^2$.

Si le rang $r = 2t+1$ est impair il y a 2 orbites de matrices de rang r et ce sont les orbites de $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec

A_1 un tableau diagonal de t matrices 2×2 égales à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ suivies de la matrice scalaire 1 et

A_2 un tableau diagonal de $t-1$ matrices 2×2 égales à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ suivies de la matrice scalaire s avec $s \in \mathbb{F}_q - {\mathbb{F}_q}^2$.

Développements conseillés :

(1) Action à gauche du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ et matrices échelonnées, [Fr. A] p. 47-53 et [C. G.] p. 128-135. Notez que si N est échelonnée normalisée alors $\mathrm{GL}_n(K)N = \mathrm{SL}_n(K)D_n(K^*)N$, alors si $rg(N) < n$ puisque $D_n(K^*)N = N$ on a $\mathrm{GL}_n(K)N = \mathrm{SL}_n(K)N$ et ainsi les orbites de $M_{n,p}(K)$ sous $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ coïncident. Enfin si $rg(N) = n$ l'orbite sous $\mathrm{GL}_n(K)$ de N est réunion disjointe des orbites sous $\mathrm{SL}_n(K)$ des matrices normalisées $D_n(a)N$ pour a parcourant K^* (voir exercice ci-dessous pour l'action à gauche du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$.

(2) Action à gauche et à droite du groupe $L_{n,s} \times U_{n,s}$ sur $M_n(K)$, restriction au matrices dont les déterminants principaux sont non nuls, [F. M. 1] $n°4$ et pour le cas général [F. M. 2] p. 27. Voir exercice 3 ci-dessous.

(3) Comptages des matrices de rang $n-1$ dans $M_n(\mathbb{F}_q)$ ainsi que des matrices nilpotentes et de rang $n-1$ dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, [F. M. 2] p. 8-11.

(4) Les matrices congruentes : classification sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les corps finis, [Fr. B-C-D] IV p. 47 et exercice 10.45 p 166.

(5) Décomposition de Cartan, [Fr. B-C-D] p. 142 et 5.9 p. 276. Application $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] p. 142 et 145 et exercice ci-dessous.

Exercice 1 Orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche, matrices échelonnées normalisées et sous-espaces vectoriels de K^n.

Rappel, [Fr. A] p. 47-49.

Une matrice échelonnée normalisée est nulle ou de rang $r > 0$ et associée à une suite $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_r \leq n$, ce sont alors les matrices $N(a) = [C_1, C_2, ..., C_p] \in M_{n,p}(K)$ de rang r telles que les colonnes C_{j_k}, $1 \leq k \leq r-1$ sont les $r-1$ premiers vecteurs de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de K^n, et $C_{j_r} = ae_{j_r}$ avec $a = 1$ si $r < n$ et $a \in K - \{0\}$ si $r = n$. Les autres colonnes étant sujettes à la règle suivante : $C_i = 0$ pour $1 \leq i \leq j_1$, $C_j \in \bigoplus_{1 \leq i \leq k} Ke_i$ pour $j_k \leq i \leq j_{k+1}$) et enfin $C_j \bigoplus_{1 \leq i \leq r} Ke_i$ pour $j_r \leq i$.

Dans ce qui suit les matrices "échelonnée normalisées unité "sont la matrice nulle ou les matrices échelonnées normalisées $N(a)$ avec $a = 1$. Dans [Fr. A] p. 47-49, on montre que les matrices échelonnées normalisées forment un système de représentants des orbites de l'action de $\mathrm{SL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche.

On va montrer que les matrices "échelonnée normalisées unité " forment un système de représentants des orbites de l'action de $\mathrm{SL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche.

(1) Soit $A \in M_{n,p}(K)$ avec $\mathrm{rang}(A) < n$, montrer que les orbites de A sous $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ coïncident.

Preuve. On a $\mathrm{SL}_n(K)A = \mathrm{SL}_n(K)N_r(1)$ *où* $N_r(1)$ *est le représentant échelonné normalisé avec* $a = 1$ *puisque* $\mathrm{rang}(A) < n$. *Maintenant si* $b \in K^\times$ *et* $D_n(b)$ *la dilatation de diagonale* $(1, ..., 1, b)$, *alors* $N_r(1) = D_n(b)N_r(1)$ *; ainsi* $\mathrm{SL}_n(K)N_r(1) = \mathrm{SL}_n(K)D_n(K^\times)N_r(1)$ *et donc* $\mathrm{SL}_n(K)N_r(1) = \mathrm{GL}_n(K)N_r(1)$ *et* $\mathrm{GL}_n(K)A = \mathrm{SL}_n(K)A$. */ / /*

(2) Soit $A \in M_{n,p}(K)$ avec $\mathrm{rang}(A) = n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $PA = N$ échelonnée normalisée unité.

Preuve. Comme rappelé au-dessus il existe $S \in \mathrm{SL}_n(K)$ *avec* $SA = N_n(a)$ *échelonnée normalisée. Ainsi* $P := D_n(\frac{1}{a})$ *convient.*

(3) Mêmes notations que précédemment. Montrer l'unicité d'un représentant échelonné normalisé unité dans l'orbite $\mathrm{GL}_n(K)A$).

Preuve. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ *avec* $PA = N_n(1)$, *alors* $D_n(\frac{1}{\det P})PA = D_n(\frac{1}{\det P})N_n(1)$ *est échelonnée normalisée et* $S := D_n(\frac{1}{\det P})P \in \mathrm{SL}_n(K)$. *Ainsi* $D_n(\frac{1}{\det P})N_n(1) = N_n(a)$ *est le représentant échelonné normalisé dans l'orbite* $\mathrm{SL}_n(K)A$. */ / /*

(4) Montrer par un procédé algorithmique que deux matrices échelonnées normalisées unité sont égales si et seulement si elles ont le même noyau. Ainsi on retrouve la bijection entre les orbites sous $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices de $M_{n,p}(K)$ et les sous-espaces vectoriels V de K^p avec $\dim V \geq p - n$; précisément si $A \in M_{n,p}(K)$ l'espace V correspondant est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $A\ {}^t(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$.

Preuve. Soient donc $N = (n_{i,j})$ *et* $N' = (n'_{i,j})$ *deux matrices échelonnées normalisées unité de rang* r *resp.* r' *avec* $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$. *Par le théorème du rang on a* $r = r'$. *On note* C_{j_k}, $1 \leq k \leq r$ *resp.* $C'_{j'_k}$, $1 \leq k \leq r$ *la colonne de* N *resp.* N' *qui est égale à* e_k.

Ainsi $e_1, ..., e_{j_1-1} \in \ker N$ *d'où* $j'_1 \geq j_1$ *et par symétrie* $j'_1 = j_1$.

Soit $j_1 < j < j_2$, *montrons que* $n_{1,j} = n'_{1,j}$ *et* $n_{i,j} = n'_{i,j}$ *si* $i > 1$. *Pour cela on remarque que* $n_{1,j}e_{j_1} - e_j \in \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$, *il suit que* $0 = N'({}_{1,j}e_{j_1} - e_j) = (n_{1,j} - n'_{1,j})e_1 + \sum_{i>1} n'_{i,j}e_i$ *d'où le résultat. Il suit en sus de cela que* $j'_2 \geq j_2$ *avec égalité par symétrie.*

Si $j_2 < j < j_3$, *alors* $n_{1,j}e_{j_1} + n_{2,j}e_{j_2} - e_j \in \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$ *et donc* $0 = (n_{1,j} - n'_{1,j})e_1 + (n_{2,j} - n'_{2,j})e_2 + \sum_{i>2} n'_{i,j}e_i$ *...etc... . / / /*

Exercice 2

(1) Si $A, B \in M_{n,p}(K)$ alors $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$ si et seulement si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $B = PA$.

Preuve. On traduit cela en terme d'applications linéaires c'est alors une application du théorème de factorisation : il existe une unique application linéaire v de $\mathrm{Im}\, A$ dans $\mathrm{Im}\, B$ telle que $v \circ A = B$ et puisque $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$, v est bijective. Il faut prolonger v en un automorphisme w de K^n. Pour cela on écrit $K^n = \mathrm{Im}\, A \bigoplus S = ImB \bigoplus S'$ et puisque S, S' ont la même dimension on prolonge v à S en envoyant une base donnée de S sur une base de S'.

(2) Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ quelle est la fermeture des orbites ?

Preuve. Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et r le rang de A.

Si $r < n$, $\mathrm{GL}_n(K)A = \mathrm{SL}_n(K)D_n(K^\times)A = \mathrm{SL}_n(K)A$, ainsi l'orbite de A est dense dans l'espace vectoriel $M_n(K)A$ qui est fermé ...

Si $r = n$ et donc $n \leq p$ on écrit $A = P(I_n, 0.., 0)Q$ avec P dans $\mathrm{SL}_n(K)$ et Q dans $\mathrm{GL}_n(K)$ (utiliser une dilatation). Ainsi l'orbite de A est homéomorphe à $\mathrm{SL}_n(K)(I_n, 0.., 0) = (\mathrm{SL}_n(K), 0.., 0)$ qui est fermé dans $M_{n,p}(K)$. ///

Exercice 3 Action à gauche et à droite du groupe $L_{n,s} \times U_{n,s}$ sur $M_n(K)$, [F. M. 2] p. 27, c'est un complément à la décomposition "LU",[F. M. 1] $n°4$.

Commentaires. La décomposition "LU" est vue ici comme la décomposition "LDU" en lien avec l'action du groupe $L_s \times U_s$ sur $M_n(K)$ où L_s est le groupe triangulaire inférieur strict (Id sur la diagonale) et U_s est le groupe triangulaire supérieur strict (Id sur la diagonale) définie par $(L, U) \star M = LMU^{-1}$. Dans [F. M. 2] on montre qu'un système de représentants des orbites est donné par les matrices $DQ(\sigma)$ où D est diagonale (unique mais pas nécessairement inversible) et $Q(\sigma)$ est une matrice de permutation avec σ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ qui elle n'est pas nécessairement unique. On se contentera alors ici seulement d'examiner les orbites de $M_2(K)$ et de renvoyer à [F. M. 2] p. 27 pour le cas n quelconque.

Soient $L_s \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le groupe triangulaire inférieur strict (Id sur la diagonale) et $U_{n,s} \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le groupe triangulaire supérieur strict (Id sur la diagonale), il agit sur $M_n(K)$ par $(L, U) \star M = LMU^{-1}$. Soit $\mathcal{D} \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices diagonales inversibles et $P \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices de permutations $Q(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$. Enfin si $M \in M_n(K)$ et $1 \leq k \leq n$, on note M_k, la matrice principale construite sur les k-premières lignes et colonnes de M et $\Delta_k(M)$ son déterminant et $\Delta(M_n(K)) \subset M_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices telles que $\prod_{1 \leq i \leq n} \Delta_i(M) \neq 0$.

(1) La décomposition "LDU".

(a) Soit $M = LU$ avec $L \in M_n(K)$ triangulaire inférieure et , $U \in M_n(K)$ quelconque. Montrer que $M_k = L_k U_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Preuve. Le plus lumineux est de faire un produit par blocs. On écrit $L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{pmatrix}$ avec $L_{1,1} \in M_{k,k}$, $L_{1,2} \in M_{k,n-k}$, $L_{2,1} \in M_{n-k,k}$ et $L_{2,2} \in M_{n-k,n-k}$ et de même pour U. Alors $LU = \begin{pmatrix} L_{1,1}U_{1,1} + L_{1,2}U_{2,1} & L_{1,1}U_{1,2} + L_{1,2}U_{2,2} \\ L_{2,1}U_{1,1} + L_{2,2}U_{2,1} & L_{2,1}U_{1,2} + L_{2,2}U_{2,2} \end{pmatrix}$. Puisque L est triangulaire inférieure on a $L_{1,2} = 0$ et $L_{1,1} = L_k$, $U_{1,1} = U_k$, d'où le résultat. ///

(b) Soit $M \in M_n(K)$ et $\Delta(M) := (\Delta_1(M), ..., \Delta_n(M))$. Montrer que la fonction $M \to \Delta(M)$ est constante sur l'orbite de M.

Preuve. Soit donc $L \in L_{n,s}$ et $U \in U_{n,s}$, il suit de la question 1) que $(LMU)_k = (LM)_k U_k = L_k M_k U_k$. ///

(c) Soit $M \in \Delta(M_n(K))$. En appliquant le pivot de Gauss aux lignes de la matrice M, montrer qu'il existe $L \in L_s$, $U \in U_{n,s}$ et $D \in \mathcal{D}$ avec $M = LDU$.

Preuve. Puisque $m_{1,1} = \Delta_1(M)$ la multiplication à gauche par les matrices $B_{i,1}(-\frac{m_{i,1}}{m_{1,1}})$ pour $1 < i \leq n$ donne la matrice M' avec M'_2 triangulaire supérieure de diagonale $m'_{1,1} = m_{1,1}$, $m'_{2,2}$. Par la question 1 (il faut remarquer que $B_{i,1}(-\frac{m_{i,1}}{m_{1,1}}) \in L_{n,s}$) on déduit que $\Delta_2(M) = \Delta_2(M') = m_{1,1}m'_{2,2}$, ainsi $m'_{2,2} \neq 0$ et on reitère le procédé jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire supérieure. ///

(d) On conserve les hypothèses de la question précédente. Montrer que le triplet (L, D, U) est unique.
Preuve. Si $LDU = L'D'U'$ *on déduit que* $L^{-1}L' = (DU)(D'U')^{-1}$ *est dans* $L_{n,s}$ *et triangulaire supérieure, c'est donc la matrice* Id. *Il suit que* $L = L'$ *et* $DU = D'U'$. *Ainsi* $D^{-1}D' = UU'^{-1}$ *est diagonale et dans* $U_{n,s}$, *c'est donc la matrice* Id. *///*

(e) Soit $M \in M_n(K)$ et $\Delta(M) := (\Delta_1(M), ..., \Delta_n(M))$ où $\Delta_i(M)$ est le déterminant de la matrice principale construite sur les i-premières lignes et colonnes de M.
Montrer que $\Delta(M_n(K))$ est une réunion d'orbites, qu'un système de représentants des orbites des $M \in \Delta(M_n(K))$ est donné par les matrices diagonales inversibles et que leurs stabilisateurs sont triviaux.
Ainsi $\Delta(M_n(K))$ est l'ensemble des matrices qui admettent une décomposition "LDU" avec $L \in L_{n,s}$, $D \in \mathcal{D}$ et $U \in U_{n,s}$.
Preuve. C'est une relecture des questions précédentes. ///

(f) Dans cette question K est le corps fini à q éléments. Montrer que le nombre de matrices de $M_n(\mathbb{F}_q)$ qui admettent une décomposition "LDU" est $(q-1)^n q^{n(n-1)}$.
Preuve. Puisque décomposition "LDU" est unique il suffit de compter les choix respectivement pour L, D *et* U.
Dans [C. G.] une solution par récurrence est proposée : Soit $M_n \in M_n(\mathbb{F}_q)$ *qui admet une décomposition "LDU" et* $M \in M_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ *une matrice dont la matrice principale construite sur les* n *premières colonnes coïncide avec* M_n. *On montre qu'une CNS pour que* M *admette une décomposition "LDU" est que le coefficient* $m_{n+1,n+1}$ *évite une valeur fonction des autres coefficients. Précisément il s'agit d'éviter les solutions de l'équation* $\Delta_{n+1}(M_{n+1}) = 0$. *Puisque les colonnes de la matrices* M_n *sont linéairement indépendantes il existe des coefficients uniquement définis* λ_i *pour* $i \leq n$ *tels que* $m_{i,n+1} = \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{i,k}$ *(les* λ_i *sont les solutions d'un système de Cramer) ainsi* $\det M_{n+1} = (m_{n+1,n+1} - \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{n+1,k}) \det M_n$. *Alors* M_{n+1} *admet une décomposition "LDU" si et seulement si* $m_{n+1,n+1} \neq \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{n+1,k}$. *Ainsi si* N_n *est le nombre de matrices de* $M_n(\mathbb{F}_q)$ *qui admettent une décomposition "LDU" alors* $N_{n+1} = (q-1)q^{2n} N_n$. *On conclut avec* $N_1 = q - 1$. *///*

(2) Généralisation. Dans ce qui suit nous nous limitons à décrire la situation pour $n = 2$ et nous renvoyons à [F. M. 2] p. 27 pour le cas général.

Montrer que dans le cas $n = 2$ un système de représentants des $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ est donné par :

(a) Si $\Delta_1(M)\Delta_2(M) \neq 0$
Représentant : $\begin{pmatrix} \Delta_1(M) & 0 \\ 0 & \Delta_2(M) \end{pmatrix}$
Stabilisateur : $\mathrm{Id} \times \mathrm{Id}$

(b) Si $\Delta_1(M)\Delta_2(M) = 0$ et $\Delta_1(M) \neq 0$, ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ et $d = \frac{bc}{a}$.
Représentant : $\begin{pmatrix} \Delta_1(M) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Stabilisateur : $\mathrm{Id} \times \mathrm{Id}$

(c) Si $\Delta_1(M)\Delta_2(M) = 0$ et $\Delta_2(M) \neq 0$, ainsi $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $bc \neq 0$.
Représentant : $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Stabilisateur : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu c & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\mu b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mu \in K$

(d) Si $\Delta_1(M) = \Delta_2(M) = 0$ et $b \neq 0$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Représentant : $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Stabilisateur : $\mathrm{Id} \times U_s$

(e) Si $\Delta_1(M) = \Delta_2(M) = 0$ et $c \neq 0$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$.

Représentant : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Stabilisateur : $L_s \times \mathrm{Id}$

(f) Si $\Delta_1(M) = \Delta_2(M) = 0$, $b = c = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est seul dans son orbite.

Stabilisateur : $L_s \times U_{n,s}$

Exercice 4 La décomposition "$PLDU$" , [F. M. 2] p. 28.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K)$. On montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ une matrice de permutation avec $M_1 := P^{-1}M$ qui admet une décomposition "LDU" i.e. les déterminants des matrices principales de M_1 ne sont pas nuls, d'où il s'en suit une décomposition "$PLDU$" de $M \in \mathrm{GL}_n(K)$. La preuve est algorithmique.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(1) Montrer qu'il existe $m_{i_1,1}$ avec $m_{i_1,1} \neq 0$.

(2) Montrer en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qu'il existe $\sigma_1 \in \mathcal{S}_n$ et $U_1 \in U_{n,s}$ le groupe triangulaire supérieur strict (Id sur la diagonale), avec $Q(\sigma_1)MU_1 = \begin{pmatrix} m_{i_1,1} & 0 \\ C_1 & M_1 \end{pmatrix}$ où $C_1 \in M_{n-1,1}$ et $M_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$.

(3) Conclure.

(4) Montrer que l'ensemble des matrices de permutations P avec $P^{-1}M$ qui admet une décomposition "LDU" est réduit à l'identité si et seulement si la $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ est triangulaire supérieure.

Exercice 5

La décomposition de Bruhat, [F. M. 1] $n°5$ et [F. M. 2] p. 43.

Commentaires : il faut présenter la décomposition de Bruhat comme l'action du groupe $T_{ss} \times T_s$ sur $M_n(K)$ où T_s est le groupe triangulaire supérieur et T_{ss} est le groupe triangulaire supérieur strict (Id sur la diagonale) définie par $(T, T') \star M = TMT'^{-1}$. Un système de représentants des orbites des $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ est donné par les matrices de permutations. On notera que pour $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ et τ la permutation $\tau(i) = n + 1 - i$ (notez que $\tau^2 = \mathrm{Id}$) alors la décomposition de Bruhat de $Q(\tau)M \in Gl_n(K)$ s'écrit $Q(\tau)\ {}^tM = UQ(\sigma)DU'$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$, U, U' 2 matrices triangulaires supérieures strictes et D diagonale. Ce qui en transposant donne $MQ(\tau) = {}^tU'DQ(\sigma^{-1})\ {}^tU' = {}^tU'DQ(\sigma^{-1})Q(\tau)^{-1}Q(\tau)\ {}^tU'$ et ainsi $M = {}^tU'(DQ(\sigma^{-1})Q(\tau)^{-1})Q(\tau)\ {}^tU'Q(\tau)^{-1}$. En posant $L := {}^tU'$ et $U" := Q(\tau)\ {}^tU'Q(\tau)^{-1}$, alors $U"$ est triangulaire supérieure stricte et on a une décomposition LDU de M, $M = LDQ(\sigma^{-1}\tau^{-1})U"$.

Exercice 6 Comptage des matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$, [F. M. 2] p. 6.

Exercice 7 Décomposition polaire dans $M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, [Fr. B-C-D] exercice 10.25 question 5 p. 148 et exercice 10.26. p. 283 pour $K = \mathbb{C}$.

Rappeler le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien et sa conséquence sur la réduction des matrices symétriques réelles.

Preuve. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E, alors il existe une base orthonormale de E de vecteurs propres pour u. Autrement dit $E = \bigoplus^{\perp}(\ker(u - \lambda \operatorname{Id})$ où λ parcourt le spectre de u. Si $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, l'endomorphisme $X \to SX$ où X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique est un endomorphisme autoadjoint (on a $(SX|Y) = (X|SY)$) ; ainsi il existe une matrice de changement de base $O \in O_n(R)$ et D une matrice diagonale avec $S = ODO^{-1} = OD\,{}^tO$ (en particulier S et D sont simultanément semblables et congruentes). Cela montre qu'une matrice symétrique réelle est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). ///

(1) Décomposition polaire.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive i.e. ${}^tXSX \geq 0,\ \forall\, {}^tX \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer qu'il existe $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive avec $S_1^2 = S$.

Preuve. Par le théorème de réduction des matrices symétriques réelles on a $S = ODO^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $(d_1, ..., d_n)$ et d_i parcourt les valeurs propres. Si X_i est un vecteur colone propre non nul avec $SX_i = d_iX_i$ alors $(SX_i|X_i) = d_i(X_i|X_i) \geq 0$ puisque S est positive et donc $d_i \geq 0$. Soit D_1 la matrice diagonale réelle de diagonale $(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})$ et $S_1 := OD_1O^{-1}$. On a $S_1^2 = OD_1^2O^{-1} = S$. Puisque $O^{-1} = {}^tO$, il suit que S_1 est congruente à D_1 qui est symétrique positive ; il en est donc de même de S_1. ///

(b) On suppose désormais que $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive telle que $S_1^2 = S$. Soit Λ (resp. Λ_1) le spectre de S (resp. S_1) . Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans Λ_1 si et seulement si $\lambda \geq 0$ et $\lambda^2 \in \Lambda$.

Preuve. On a $\chi_S(X^2) = \det(X^2 \operatorname{Id} - S_1^2) = \chi_{S_1}(X)\chi_{S_1}(-X)$. Et d'autre part $\chi_S(X^2) = \prod_i(X^2 - d_i)$. Puisque S_1 est symétrique positive les racines de $\chi_{S_1}(X)$ sont les racines positives de $\prod_i(X^2 - d_i)$. ///

(c) Montrer que si $\lambda \in \Lambda_1$ alors $\ker(S_1 - \lambda \operatorname{Id}) \subset \ker(S - \lambda^2 \operatorname{Id})$ et en déduire l'égalité $\ker(S_1 - \lambda \operatorname{Id}) = \ker(S - \lambda^2 \operatorname{Id})$.

Preuve. Si $S_1(X) = \lambda X$, on a $S(X) = S_1^2(X) = \lambda^2 X$ d'où l'inclusion. Pour l'égalité on a vu (théorme de réduction des matrices symétriques réèlles) que $n = \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \dim \ker(S_1 - \lambda \operatorname{Id})$ et $n = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim \ker(S - \lambda \operatorname{Id})$. Enfin puisque par la question précédente $\Lambda = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda_1\}$ il suit que $\dim \ker(S_1 - \lambda \operatorname{Id}) = \dim \ker(S - \lambda^2 \operatorname{Id})$, d'où l'égalité. ///

(d) Montrer l'unicité de $S' \in M_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive telle que $S'^2 = S$.

Preuve. Les mêmes raisonnements qui précèdent montrent que si $S' \in M_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive telle que $S'^2 = S$ alors $\ker(S' - \lambda \operatorname{Id}) = \ker(S - \lambda^2 \operatorname{Id})$ et le spectre de S' est l'ensemble des racine carrées positives des éléments du spectre de S. Ainsi S' est l'homothétie de rapport $\sqrt{d_i}$ sur le sous espace propre $\ker(S - d_i \operatorname{Id})$ de S. L'unicité suit alors de légalité $\mathbb{R}^n = \bigoplus_i \ker(S - d_i \operatorname{Id})$ .///

(e) Une digression. Soit S_0 une matrice symétrique réelle. En s'inspirant de ce qui précède résoudre l'équation $S_1^3 = S_0$ avec S_1 une matrice symétrique réelle.

Preuve. On remarque que la condition de positivité a disparu cependant la même méthode fonctionne puisque l'application $x \to x^3$ définit une bijection de $\mathbb{R}$. L'équation $S_1^3 = S_0$ avec S_1 symétrique réelle admet pour unique solution la matrice de l'endomorphisme dont la restriction sur le sous espace propre $\ker(S_0 - d_i \operatorname{Id})$ de S_0 est l'homothétie de rapport $d_i^{1/3}$, l'unique racine réelle de $x^3 - d_i = 0$ et ceci pour d_i parcourant le spectre de S_0.

Remarque. Si $m \in 2\mathbb{N}^\star$ et $S \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ on note $s_1, ..., s_t$ les valeurs propres distinctes (elles sont ≥ 0) de S et $\mu_1, ..., \mu_t$ leurs multiplicités respectives et E_{S,s_i} le sous-espace propre correspondant, alors $\dim E_{S,s_i} = \mu_i$ et $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus^{\perp}{}_{1 \leq i \leq t} E_{S,s_i}$. Soit B_i une base orthonormale de E_{S,s_i} et $B := \cup B_i$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice de changement de base avec $PS\,{}^tP = D$ et D est la *matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport s_i sur B_i. Soit $D^{1/m}$ la matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/n}$ sur B_i. Soit $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $P\Sigma\, {}^tP = D^{1/m}$, elle est congruente à une matrice de $Sym^+(\mathbb{R}^n)$; ainsi $\Sigma \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ et par construction $\Sigma^m = S$. Pour l'unicité : soit $\Sigma \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ avec $\Sigma^m = S$. On note $\sigma_1, ..., \sigma_t$ les valeurs propres distinctes (elles sont ≥ 0) de Σ et $\nu_1, ..., \nu_r$ leurs multiplicités respectives et E_{Σ,σ_i} le sous-espace propre correspondant alors S induit l'homothétie de rapport σ_i^m sur E_{Σ,σ_i}. Puisque les σ_i^m pour $1 \leq i \leq r$ sont deux à deux distincts et que $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus^{\perp}{}_{1\leq i\leq r} E_{\Sigma,\sigma_i}$ il suit que $r = t$ et quitte à ranger les σ_i, E_{Σ,σ_i} est le sous-espace propre $E_{S,s_i=\sigma_i^n}$; ainsi Σ induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/n}$ sur E_{S,s_i} et donc Σ est uniquement ainsi définie. ///*

(f) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique définie positive tel que $M = OS$.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. On a ${}^tMM = S\, {}^tOOS = S^2$. Puisque ${}^tMM$ est symétrique et que $({}^tMMX|X) = (MX|MX) > 0$ pour X un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$, il suit que S est l'unique matrice symétrique réelle positive (de fait définie positive) telle que $S^2 = {}^tMM$. On a alors $O = MS^{-1}$. D'où l'unicité. Ce qui précède donne la clé pour l'existence. Soit S symétrique définie positive avec $S^2 = {}^tMM$ et $O := MS^{-1}$, on a ${}^tOO = S^{-1}\, {}^tMMS^{-1} = \mathrm{Id}$.

(g) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe un couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique positive tel que $M = OS$.

Preuve. On considère la suite $M_k := M - \frac{1}{k}\mathrm{Id}$. Pour $k >> 0$, $1/k$ évite les valeurs propres de M, ainsi $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc $M_k = O_kS_k$ avec $O_k \in O_n(\mathbb{R})$ et S_k symétrique définie positive. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est compact on peut extraire une suite $O_{\varphi(k)}$ convergente vers $O \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $S_{\varphi(k)}$ converge vers S une matrice réelle symétrique et pour X vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ on a $(S_{\varphi(k)}X|X) \geq 0$ et donc à la limite $(SX|X) \geq 0$. ///

(2) Décomposition polaire et action de groupe.

Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ opère sur $M_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche. Déduire de ce qui précède qu'un système de représentants des orbites est donné par les matrices symétriques positives $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, que le stabilisateur de M est $O_n(\mathbb{R})$ si M est nulle, I_n si M est inversible et un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ qui est conjugué du groupe $\begin{pmatrix} O_r(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ si $0 < r = \mathrm{rang}(M) < n$.

Preuve. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r, il suit de la décomposition polaire que $M = OS$ avec $S \in \mathrm{Sym}^+(\mathbb{R})$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$, de plus S est unique. Si $r = n$ i.e. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors S est inversible et donc le stabilisateur de M est réduit Id. Si M est nulle le stabilisateur est clairement $O_n(\mathbb{R})$. Supposons donc que $0 < r = \mathrm{rang}(M) < n$, en considérant le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}\, S$, on peut écrire $S = O'\Sigma O'^{-1}$ avec $\Sigma = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix}$, $S' \in \mathrm{Sym}_{n-r}^{++}(\mathbb{R})$ et $O' \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi le stabilisateur $Stab(M)$ de M est $OO'Stab(\Sigma)(OO')^{-1}$. Il reste à montrer que $Stab(\Sigma) = \begin{pmatrix} O_r(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Soit $U \in Stab(\Sigma)$, on écrit $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{pmatrix}$ avec $U_1 \in M_r(\mathbb{R})$, ainsi $U_3S' = 0$ et $U_4S' = S'$ et puisque S' est inversible il suit que $U_3 = 0$ et $U_4 = I_{n-r}$. Puisque $U \in O_n(\mathbb{R})$ il suit que $U_1\, {}^tU_1 = I_r$ et $U_2\, {}^tU_2 = 0$, ainsi $U_1 \in O_r(\mathbb{R})$ et $U_2 = 0$. L'autre inclusion est immédiate. On remarque que les orbites correspondant à une action fidèle (i.e. le stabilisateur est trivial) sont celles des matrices inversibles ; c'est la décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. ///

(3) Décomposition de Cartan.

(a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe $O_1,\ O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs avec $M = O_1DO_2$.

Preuve. On écrit $M = OS$ et on diagonalise S dans une base orthonormée ainsi $S = O_2^{-1}DO_2$ alors $O_1 := OO_2^{-1}$ convient puisque D est positive. ///

(b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M - O$ est inversible.

Preuve. On écrit $M = O_1DO_2$ avec $O_1,\ O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs. Ainsi cela revient à trouver $O \in O_n(\mathbb{R})$ avec $D - O_1^{-1}OO_2^{-1}$ inversible. Il suffit de considérer une matrice diagonale D' avec des 1 ou des -1 sur la diagonale de façon que $D - D'$ soit inversible ($D' = -\mathrm{Id}$ convient puisque D est positive). Puisque $D' \in O_n(\mathbb{R})$ alors $O := O_1D'O_2$ convient. ///

Exercice 8 Application de la décomposition polaire, voir aussi [F. M. 2] théorème 4 p. 42.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Preuve on rappelle que la décomposition polaire induit un homéomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour conclure on rappelle que l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ (dans [F. M. 2] théorème 4 p. 42 on utilise le théorème spectral) On conclut puisque $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. On peut aussi conclure en utilisant la décomposition de Cholesky qui induit un homéomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (\mathbb{R}^{++})^n$ et on conclut avec l'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{++}$.

Exercice 9 Une application de la décomposition de Cartan : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit G un groupe compact avec $O_n(\mathbb{R}) \subset G \subset GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que $M \in G - O_n(\mathbb{R})$.

(1) Rappeler la décomposition de Cartan dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Preuve. On suppose que $M \in M_{n,m}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Il existe $O_1 \in O_n(\mathbb{R})$, $O_2 \in O_m(\mathbb{R})$ et des réels (uniques) $0 < d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_r$ où r est le rang de M tels que $M = O_1DO_2$ où $D = \sum_{1\leq i\leq r} d_iE_{i,i}$. ///

(2) Montrer en utilisant la décomposition de Cartan qu'il existe une matrice diagonale $D \in G - O_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Par la décomposition de Cartan on a $M = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R}) \subset G$ et D une matrice diagonale à termes positifs. Ainsi $D = O_1^{-1}MO_2^{-1} \in G - O_n(\mathbb{R})$. ///

(3) En considérant les suites $D^k,\ k \in \mathbb{N}^\star$ et $D^{-k},\ k \in \mathbb{N}^\star$, trouvez une contradiction.

Preuve. Ainsi les suites $D^k,\ k \in \mathbb{N}^\star$ et $D^{-k},\ k \in \mathbb{N}^\star$ sont à valeurs dans G et sont donc bornée par la compacité de G. Ainsi si $(d_1, ..., d_n)$ sont les éléments sur la diagonale de D on a $0 < d_i \leq 1$ et $0 < d_i^{-1} \leq 1$ et donc $d_i = 1$, i.e. $D = \mathrm{Id}$ ce qui est une contradiction. ///

Exercice 10 Une application de la décomposition de Cartan ou de la décomposition polaire : Points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$, [F. M. 2] p. 118 et [Bo.] p. 93. On pourra voir aussi l'application aux matrices bi stochastiques, [Bo.] p. 94.

Soit $B := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|U\|_2 \leq 1$, alors B est l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité B.

Preuve. Soit $U \in B$. On peut écrire $U = O_1DO_2$ avec $O_i \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale avec $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Alors $\|D\|_2 = \|U\|_2$ et $\|D\|_2 = max_i d_i = d_n$. Si $D = \sum_j \lambda_jO_j$ avec $O_j \in O_n(\mathbb{R})$ et $\sum_j \lambda_j = 1$ et $0 \leq \lambda_j \leq 1$, on a $U = \sum_j \lambda_jO_1O_jO_2$; ainsi il suffit de montrer que D est dans l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$. Pour cela on écrit $d_1 = \alpha_1(-1) + (1-\alpha_1)(1)$ alors $D = \alpha_1D_{-1} + (1-\alpha_1)D_1$ où D_{-1} resp. D_1 est la matrice diagonale D dans la quelle on a substitué -1 (resp. 1) à d_1. En itérant le procédé on montre avec l'associativité du barycentre que D est dans l'enveloppe convexe des matrices diagonales avec des $-1, 1$ sur la diagonale.

Montrons maintenant que $O \in O_n(\mathbb{R})$ est un point extrémal de B. Si $O = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2$ avec $U_i \in B$, quitte à multiplier par O^{-1} on peut supposer que $O = \mathrm{Id}$. Alors si $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$ on a $x = \frac{1}{2}U_1(x) + \frac{1}{2}U_2(x)$

et $1 = \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\|U_1(x)\|_2 + \frac{1}{2}\|U_2(x)\|_2 \leq 1$*, ainsi on a un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ce qui donne* $U_i(x)$ *colinéaires à* x *et de même sens et l'inégalité précédente implique alors que* $U_i(x) = x$*, ainsi* $U_i = \mathrm{Id}$.

Maintenant si $U \in B - O_n(\mathbb{R})$ *alors toujours avec Cartan on peut supposer* $U = D$ *est diagonale avec* $0 \leq d_i \leq 1$ *et* $d_{i_0} < 1$*. On peut écrire* $d_{i_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2d_{i_0} - 1)$ *. Alors* $2D = D_1 + D_2$ *avec* D_i *des matrices diagonales qui coïncident avec* D *en dehors de la ligne* i_0 *et valent respectivement* 1 *et* $2d_{i_0} - 1$ *pour le terme diagonal à la ligne* i_0*. Par construction* $D_i \in B$ *et* $D_1 \neq D$.

On retrouve là un cas particulier du théorème de Krein-Milman à savoir que tout convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. ///