Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 51 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Commentaires du jury 2015 : Dans cette leçon, il est important de bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier, ce qui rend la leçon plus difficile qu'on ne le croit. Des questions élémentaires comme " un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? " peuvent dérouter un candidat. Les diverses caractérisations du rang trouvent bien leur place ainsi que, pour les candidats plus chevronnés, l'utilisation du degré d'une extension dans la théorie des corps.
Commentaires du jury 2016 : Dans cette leçon, il est important de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions. S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques.

Références. A propos de rang des matrices, voir [Fr. A] p. 42; le théorème 1.2.1.3 et le corollaire ont leur place dans cette leçon.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
[Fr. E] Fresnel J. *Groupes* (Hermann 2001)
[Fr. MMG] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996, 2010)
[Fr. F] Fresnel J. *Anneaux* (Hermann 2001)

Développements conseillés :

(1) Rang d'une matrice de $M_{n,p}(K) - \{0\}$, [Fr. A] Théorème p. 43 et corollaires p. 44.
(2) Soit V un sous K-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que $V - \{0\} \subset GL_n(K)$. On discute de la dimension de V et de l'existence de V en fonction de K, [F. M. 2] p. 80 et compléments [F. M. 2'].
(3) Comptage des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{F}_q)^n$,[F. M. 1] $n°131$ p. 376 questions 0, 1 et 2.
(4) Corps intermédiaires: Soit K un corps infini et L une extension finie sur K. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
 i) $L = K(a)$
 ii) L'ensemble des sous-corps de L contenant K est fini. cf [F. M. 1] $n°103$ p. 280
 Et si c'est trop court ajouter "le théorème de l'élément primitif", [Fr. F] p. 266.

Exercice 1 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim F \leq \dim E$. De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim F = \dim E$, [Fr. A] p. 17.

Le résultat est vrai si $F = \{0\}$. Supposons $F \neq \{0\}$. Soit L une famille libre de F, c'est aussi une famille libre de E aussi son cardinal est-il $\leq \dim E$ est fini. Soit donc L_{max} une famille libre de F de *cardinal maximal; c'est donc une famille libre maximale de F et donc une famille génératrice de F; en effet si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une famille libre maximale de F et si $x \in F$ alors la famille $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ avec $x_{n+1} := x$ est liée, on a donc une relation $\sum_{1 \le i \le n+1} \lambda_i x_i = 0$ où les $\lambda_i \in K$ ne sont pas tous nuls, alors $\lambda_{n+1} \neq 0$ et donc $x \in \sum_{1 \le i \le n} K x_i$. Si maintenant* $\dim F = \dim E$*; il suit que L_{max} est aussi une famille libre maximale de E et donc une base de F et de E. ///*

Exercice 2 Si F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies alors par l'exercice précédent $F_1 \cap F_2$ est de dimension finie. Donner 3 démonstrations de l'égalité $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2$.

Preuve.

(1) *Avec les supplémentaires ou les bases.*
Soit S_i un sous-espace avec $F_i = (F_1 \cap F_2) \bigoplus S_i$. Montrons que $(S_1 + S_2) \cap (F_1 \cap F_2) = \{0\}$; en effet si $x_1 + x_2 = f \in F_1 \cap F_2$, alors $x_1 = f - x_2 \in F_2$ et donc $x_1 \in F_1 \cap F_2$ est donc nul, idem pour x_2. Puisque $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, il suit que $F_1 + F_2 = S_1 + S_2 + (F_1 \cap F_2) = S_1 \bigoplus S_2 \bigoplus (F_1 \cap F_2)$ et donc $\dim(F_1 + F_2) = (\dim F_1 - \dim F_1 \cap F_2) + (\dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2) + \dim F_1 \cap F_2$.

(2) *Avec les quotients.*
Soit $\pi : F_1 + F_2 \to \frac{F_1+F_2}{F_2}$, la surjection canonique; alors sa restriction à F_1 est une application linéaire $\pi' :\ F_1 \to \frac{F_1+F_2}{F_2}$ dont le noyau est $F_1 \cap F_2$ et l'image est $\{x_1 + F_2,\ x_1 \in F_1\}$; c'est donc aussi $\{x_1 + x_2 + F_2,\ x_i \in F_i\}$; ainsi π' est surjective et induit un isomorphisme d'espace vectoriels $\frac{F_1}{F_1 \cap F_2} \simeq \frac{F_1+F_2}{F_2}$ d'où la formule.

(3) *Avec une application linéaire et le théorème du rang.*
Soit $f :\ F_1 \times F_2 \to F_1 + F_2$ l'application linéaire définie par $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$, elle est surjective et son noyau est $\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\} = \{(x, x) \mid x \in F_1 \cap F_2\}$*, il est donc isomorphe à $F_1 \cap F_2$. La formule suit du théorème du rang. ///*

Exercice 3 Soient V un espace vectoriel de dimension n , $F_1, F_2, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de V avec $dimF_1 + dimF_2 + \ldots. + dimF_r > (r-1)n$. Alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_r \neq \{0\}$. Voir [F. M. 2] p. 114 pour une application aux inégalités de H. Weyl qui compares les valeurs propres de u, v et $u + v$ pour des endomorphismes symétriques d'une espace vectoriel euclidien.

Preuve. Soit $f : F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_r$ dans V^{r-1} l'application définie par $f(x_1, x_2, \ldots, x_r) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{r-1} - x_r)$; alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_r$ est le noyau de f et le reste est sans problème.

Exercice 4 Une application du théorème de la base incomplète, [F. M. 2] p. 1.

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \operatorname{End}_k E$.

(1) On suppose que u est diagonalisable. Montrer en utilisant le théorème de la base incomplète que tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u.
(2) On suppose que tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u montrer alors que u est diagonalisable (on pourra considérer des supplémentaires d'hyperplans bien choisis).

Exercice 5 Indépendance linéaire et angles obtus, [Fr. B.C.D] p. 129.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, soient $x_1, x_2, ..., x_p$, p vecteurs de E. On suppose que le produit scalaire $(x_i|x_j) \le 0$ pour tout $i \neq j$ et qu'il existe un vecteur t de E tel que $(x_i|t) > 0$ pour tout i. On veut montrer que les vecteurs x_i sont linéairement indépendants.

(1) Montrer cela en faisant un dessin dans les cas $n = 3$ et $p = 2$ (resp. $p = 3$).
(2) Montrer cela dans le cas général.

(Indication: supposer le contraire et considérer une sous-famille liée de $x_1, x_2, ..., x_p$ de cardinal minimal : $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$. Etudier alors les vecteurs $V^+ := \sum \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i > 0$ et $V^- := \sum \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i < 0$.)

Preuve. *Soit $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$, une liaison minimale i.e. $\forall i$,$\lambda_i \neq 0$ et $|I|$ est minimal. Il faut en déduire une contradiction. Soit $I^+ := \{i,\ \lambda_i > 0\}$ et $I^- := \{i,\ \lambda_i < 0\}$ alors $v := V^+ = \sum_{i\in I^+} \lambda_i x_i = -\sum_{i\in I^-} \lambda_i x_i = -V^-$. On remarque que si I^+ ou I^- est vide alors $v = 0$, ainsi $0 = (v|t) = \sum_{i\in I^+} \lambda_i(x_i|t) = -\sum_{i\in I^-} \lambda_i(x_i|t)$ ce qui est une contradiction avec $(x_i|t) > 0$ pour tout i. On calcule $(v, v) = (\sum_{i\in I^+} \lambda_i x_i, \sum_{j\in I^-}(-\lambda_j)x_j) = \sum_{i,j} \lambda_i(-\lambda_j)(x_i|x_j) \leq 0$. Ainsi $v = 0$ et $(v|t) = \sum_{i\in I^+} \lambda_i(x_i|t) < 0$. Contradiction! ///*

(3) Construire une base e_i de E et t avec $(e_i|t) > 0$ pour tout i et $(e_i|e_j) < 0$ pour tout $i \neq j$.

Preuve. *Une idée est de partir d'une BON $B := (f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et de l'"écraser" sur l'hyperplan affine $\sum_{1\leq i\leq n} x_i = 1$ où x_i est la i-ième forme coordonnée dans la base B. Soit $t := \sum_{1\leq i\leq n} f_i$, alors $(f_i|t) = 1$. Soit $\epsilon > 0$ et $e_i := f_i - \epsilon t$, alors $(e_i|t) = 1 - n\epsilon$ et $(e_i|e_j) = -2\epsilon + n\epsilon^2$. Ainsi pour $0 < \epsilon < \frac{1}{n}$, la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famile de n-vecteurs dans le demi-espace ouvert $(v|t) > 0$ et $(e_i|e_j) < 0$ pour tout $i \neq j$; c'est une base par la première question. ///*

Exercice 6 Comptage de sous-espaces supplémentaires et dualité.

Soit $k := \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le corps à p éléments (p premier). Soit H un hyperplan du k-espace vectoriel $E := k^n$ et $D \subset E$ une droite vectorielle.

(1) Quel est le nombre de droites vectorielles dans E?

Preuve. *Si $D \subset E$ une droite vectorielle on a $D = kx$ avec $x \neq 0$. De plus $D = kx'$ ssi $x' = \lambda x$ avec $\lambda \in k - \{0\}$. Ainsi le nombre de droites vectorielles dans E est $\frac{|E-\{0\}|}{|k-\{0\}|} = \frac{p^n-1}{p-1}$. ///*

(2) Dénombrer les sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires de H.

Preuve. *S est supplémentaire de H ssi $\dim S = n - \dim H = 1$ et $S \cap H = \{0\}$. Il faut donc dénombrer les droites vectorielles qui sont dans E mais pas dans H. Par la question précédente appliquée à H il suit qu'il y a $\frac{p^{n-1}-1}{p-1}$ droites vectorielles dans H et donc $\frac{p^n-p^{n-1}}{p-1} = p^{n-1}$ supplémentaires de H. ///*

(3) Dénombrer les sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires de D (on pourra considérer une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E avec $D = ke_n$ et caractériser les supplémentaires de D à l'aide de la base duale).

Preuve. *S est supplémentaire de D ssi $\dim S = n - \dim D = n - 1$ et $S \cap D = \{0\}$. Il faut donc dénombrer les hyperplans H de E qui ne contiennent pas D. Un tel hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi = \sum_i \lambda_i e_i$ avec $\varphi(e_n) = \lambda_n \neq 0$. Il y a $p^{n-1}(p-1)$ telles formes linéaires. Puisque une forme linéaire non nulle φ' vérifie $\ker \varphi' = H$ ssi $\varphi' \in k^\star\varphi$ il y a $\frac{p^{n-1}(p-1)}{p-1} = p^{n-1}$ supplémentaires de D. ///*

(4) On note $E^\star$ l'espace dual de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour la dualité. Montrer que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Preuve. *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq t}$, une base de F que l'on complète en une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Soit $(e_i^\star)_{1\leq i\leq n}$ la base duale alors $F^\perp = \bigoplus_{t+1\leq i\leq n} ke_i^\star$, d'où l'égalité. ///*

(5) Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E avec $E = F \bigoplus G$. Montrer que $E^\star = F^\perp \bigoplus G^\perp$.

Preuve. *Puisque $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$ pour V un sous espace vectoriel de E, il suffit de montrer que $F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$. Soit $\varphi \in F^\perp \cap G^\perp$ et $x \in E$, alors $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, ainsi $\varphi(x) = 0$ et donc $\varphi = 0$. ///*

(6) Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $S(F)$ (resp. $S(F^\perp)$) l'ensemble des supplémentaires de F (resp. $F^\perp$). Montrer que $\Phi : S(F) \to S(F^\perp)$ définie par $\Phi(G) = G^\perp$ est une bijection.

Preuve. *Si V est un sous-espace de $E^\star$ on définit $V^{"\perp"} := \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\ \forall\varphi \in V\}$. On a $(F^\perp)^{"\perp"} = F$ pour tout sous-espace vectoriel F de E (par construction on a l'inclusion $F \subset (F^\perp)^{"\perp"}$ et mêmes dimensions) et $(V^{"\perp"})^\perp = V$ pour tout sous-espace vectoriel V de $E^\star$ (cela vient de* *l'identification canonique de E avec son bidual $E^{\star\star}$ par l'application j qui à $x \in E$ associe la forme linéaire $j(x)$ sur $E^\star$ qui à $\varphi \in E^\star$ associe $j(x)(\varphi) := \varphi(x) \in k$. L'application j est injective et donc bijective en dimension finie. On a facilement l'inclusion $V \subset (V^{"\perp"})^\perp$. Pour la dimension on considère $(e'_i)_i$ une base de $E^\star$ obtenue en complétant une base de V, alors $j^{-1}(e_i)$ est la base duale antéduale de $(e'_i)_i$ et on vérifie que $\dim V^{"\perp"} + \dim V = \dim E$, ainsi $\dim(V^{"\perp"})^\perp = \dim V$). Il suit que Φ est une bijection de $S(F)$ dans $S(F^\perp)$ et il y a donc autant de supplémentaires de F dans E que de supplémentaires de $F^\perp$ dans $E^\star$. Si $\dim F = m$, on montre cf. [F. M. 1] p. 377 que le nombre de supplémentaires de F est $\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)...(p-1)}{[(p^m-1)(p^{m-1}-1)...(p-1)][(p^{n-m}-1)(p^{n-m-1}-1)...(p-1)}$. On vérifie que la formule est invariante par le changement m en $n-m$. ///*

Exercice 7 Le théorème de factorisation des applications linéaires.
Soit E un k-espace vectoriel de dimension n et $u, v \in \mathrm{End}_k(E)$.

(1) Rappeler le théorème de factorisation des applications k-linéaires.
Preuve. On se donne E, F, G des k-espaces vectoriel, $u \in L_k(E,F)$ et $v \in L_k(E,G)$. On suppose que v est surjective alors il existe une unique $w \in L_k(G,E)$ avec $u = w \circ v$ ssi $\ker v \subset \ker u$. De plus w est injective ssi $\ker v = \ker u$. ///

(2) Montrer qu'il existe $w \in L_k(\mathrm{Im}\, v, E)$ avec $u = w \circ v$ si et seulement si $\ker v \subset \ker u$
Preuve. On applique ce qui précède à $E, F := \mathrm{Im}\, v, G := E$. ///

(3) Montrer qu'il existe $w' \in \mathrm{End}_k(E)$ avec $u = w' \circ v$ si et seulement si $\ker v \subset \ker u$ (on pourra considérer un sous-espace vectoriel de E qui est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, v$).
Preuve. La condition est nécessaire de façon évidente. Supposons donc que $\ker v \subset \ker u$. Par la question précédente on a une unique $w \in L_k(\mathrm{Im}\, v, E)$ avec $u = w \circ v$. Il suffit donc de prolonger w en $w' \in \mathrm{End}_k(E)$. Soit S un sous-espace de E supplémentaire de $\mathrm{Im}\, v$. Soit $(f_i)_{1 \le i \le m}$, une base de $\mathrm{Im}\, v$ que l'on complète par une base $(f_{t+1 \le i \le n})$ de S en une base de E. Soient $f'_i \in E$ pour $t+1 \le i \le n$. Alors $w' \in \mathrm{End}_k(E)$ défini par $w'_{|\mathrm{Im}\, v} = w$ et $w'(f_i) = f'_i$ pour $t+1 \le i \le n$ convient. ///

(4) Montrer qu'il existe $w' \in \mathrm{End}_k(E)$ qui est de plus bijectif avec $u = w' \circ v$ si et seulement si $\ker v = \ker u$.
Preuve. On reprend la construction précédente de w' mais il faut choisir les $f'_i \in E$ de façon que w' soit surjectif. Soit S' un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$ alors $\dim \mathrm{Im}\, u + \dim S' = \dim E$ et $\dim \mathrm{Im}\, v + \dim S = \dim E$. Enfin par le théorème du rang on a $\dim E = \dim \ker u + \dim \mathrm{Im}\, u$ et $\dim E = \dim \ker v + \dim \mathrm{Im}\, v$, ainsi $\dim S = \dim S'$. Il suffit donc de choisir pour les $(f'_i)_{t+1 \le i \le n}$, une base de S'. ///

(5) On suppose que $\ker v = \ker u$. A quelle condition existe-t-il un unique $w' \in \mathrm{End}_k(E)$ bijectif avec $u = w \circ v$?
Preuve. Il ne faut pas avoir multiples choix pour S, ce qui n'est le cas que si u est surjective et donc si v est surjective. et dans ce cas on a bien unicité. ///

(6) En utilisant la dualité montrer qu'il existe $w \in \mathrm{GL}(E)$ avec $u = v \circ w$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v$.
Preuve. En effet on applique la question précédente on a ${}^t u = w \circ v$ ssi ${}^t u = {}^t v \circ {}^t w$ et puisque $\mathrm{Im}\ {}^t u = (\ker u)^\perp$ le résultat suit pour les endomorphismes ${}^t u$ et ${}^t v$ de l'espace $E^\star$. Puisque la transposée est une bijection linéaire de $\mathrm{End}_k E$ dans $\mathrm{End}_k E^\star$ et que $\dim E = \dim E^\star$ le résultat vaut pour tout k-espace vectoriel.///

Remarque. *On considère l'action de groupe suivante : $\mu_g : \mathrm{GL}_n(k) \times M_n(k) \to M_n(k)$ avec $\mu_g((P,A)) := PA$ (resp. $\mu_d : \mathrm{GL}_n(k) \times M_n(k) \to M_n(k)$ avec $\mu_d((Q,A)) := AQ^{-1}$). La traduction matricielle de l'exercice précédent montre que l'orbite de A est l'ensemble des matrices $M \in M_n(k)$ telles que $\ker \hat{M} = \ker \hat{A}$ (resp. $\mathrm{Im}\, \hat{M} = \mathrm{Im}\, \hat{A}$) où $\hat{M}$ désigne l'application linéaire de $\mathrm{End}_k(k^n)$ définie par $\hat{M}((x_1, ..., x_n)) := M^t(x_1, ..., x_n)$.*

Exercice 8 Opération de $Gl_n(K) \times Gl_m(K)$ sur $M_{n,m}(K)$, $((P,Q),M) \to PMQ^{-1}$, changement de base, matrices équivalentes et rang, [Fr. A] voir Fresnel, Algèbre des matrices

Exercice 9 Calcul pratique du rang, d'équations de l'image d'une matrice.

Soit K un corps commutatif, $A = [C_1, ..., C_p] \in M_{n,p}(K)$ et A son rang.

(1) Soit $X = (x_i) \in M_{n,1}(K)$ et $B := [A, X] \in M_{n,p+1}(K)$. Montrer que $X \in \mathrm{Im}(A)$ si et seulement si $B = A$.

Preuve. Puisque $\mathrm{Im}\, B$ *est engendré par les colonnes de* A *et* X*, il suit que* $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Im}\, B$ *avec égalité si et seulement si* $B = A$ *d'où le résultat. ///*

(2) Soit A la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 10 & 11 & 7 & 7 \\ 6 & 12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

En appliquant le pivot de Gauss sur les lignes de la matrice B caractériser les $X \in \mathrm{Im}\, A$ et en déduire une base de $\mathrm{Im}\, A$.

Preuve. On note L_i *la i-ième ligne de* B*. Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes* $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ *donne la matrice*

$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & -5x_1 + x_3 \\ 0 & 9 & 3 & 3 & -3x_1 + x_4 \end{bmatrix}$. *Puis* $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$ *donne*

$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_1 - 3x_2 + x_4 \end{bmatrix}$.

Il suit que A *est équivalente à* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *et que* $A = 2$*. Enfin* $B = 2$ *si et seulement si* $-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ *et* $3x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$*. Ainsi* $X \in \mathrm{Im}\, A$ *si et seulement si* ${}^tX = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2) = x_1\ {}^t(1, 0, 1, -3) + x_2\ {}^t(0, 1, 2, 3)$*. Puisque* $A = 2$*, il suit que* ${}^t(1, 0, 1, -3)$, ${}^t(0, 1, 2, 3)$ *est une base de* $\mathrm{Im}\, A$*. ///*

Exercice 10 Rang d'une matrice extraite.

Soit $M \in M_{n,m}(K)$ et $M_{I,J}$ la sous-matrice de M obtenue en supprimant les lignes resp. les colonnes d'indices qui ne sont pas dans I, resp. J. Montrer que $rang(M_{I,J}) \leq rang(M)$ (considérer une combinaison linéaire de colonnes de M et son image par la projection linéaire de $K^n \to K^{|I|}$ en supprimant les lignes d'indices qui ne sont pas dans I).

Exercice 11 Solutions d'un système linéaire et changement de base.

Soient $K \subset L$, deux corps commutatifs , $A, B \in M_n(K)$. Soit $C_L := \{M \in M_n(L) \mid MA = BM\}$.

1. Montrer que $dim_K C_K = dim_L C_L$, [Fr. A] p. 81.

Preuve. Manifestement C_L est un sous-L-espace vectoriel de $M_n(L)$. Soit $\mathcal{B} := (E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(L)$ (elle ne dépend pas de L) et $\varphi : M_n(L) \to M_n(L)$ l'endomorphisme défini par $\varphi(M) := MA - BM$. On note Φ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice ne dépend pas du corps L et puisque le rang de Φ est donné par la taille du plus grand mineur non nul son rang ne dépend pas lui aussi du corps L. Puisque $C_L = \ker \varphi$, le résultat suit.

2. Soit $M_1, ..., M_r$ une base de C_K, montrer que c'est encore une base de C_L

Preuve. On écrit la matrice des corrdonnées dans la base canonique $\mathcal{B} := (E_{i,j})_{i,j}$ de $M_n(L)$. Par hypothèse il existe un mineur de taille $r \times r$ non nul ce qui montre que $M_1, ..., M_r$ est une famille L-libre de C_L et puisque $dim_K C_K = dim_L C_L$, le résultat suit.

Remarque. C'est un cas particulier du résultat de structure des solutions d'un système linéaire affine, [Fr. A] corollaire p. 71.

Exercice 12 Sous-espaces vectoriels et changement de base, [F. M. 2] I.10. p. 92.

Soient $k \subset K$, deux corps commutatifs, $n \geq 1$ et H un sous-K-espace vectoriel de K^n, il s'agit de déterminer le plus grand (resp. le plus petit) sous-K-espace vectoriel de K^n contenu dans H (resp. contenant H) qui est engendré par un sous-k-espace vectoriel de k^n.

Exercice 13 Le polynôme minimal est indépendant du corps de base, [Fr. A] exercice 3.5.1. p. 157.

Preuve. Si $A \in M_n(K)$ alors le rang de la famille $S_k := \{A^0, A, ..., A^k\}$ dans $M_n(K)$ est indépendant du corps de base (cf. exercice précédent). Soit $m_{L,A}$ (resp. $m_{K,A}$) , le polynôme minimal de A dans $L[X]$ (resp. $K[X]$), alors $\deg m_{L,A}$ est le maximum des k avec S_k libre sur L; ainsi $\deg m_{K,A} \leq \deg m_{L,A}$ et puisque $m_{L,A} | m_{K,A}$, le résultat suit.

Exercice 14

- Dualité et intersection finie d'hyperplans vectoriels resp. affines.

  Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de formes linéaires sur E. Alors $\dim(\cap \operatorname{Ker} f_i, i \in I) = dimE - dim < f_i >$.

  Application. Dans un espace affine euclidien, il existe un unique point à égale distance de l'ensemble des points formant un repère affine; en d'autres termes il existe une unique sphère passant par les points d'un repère affine, [Fr. MMG] Hyperplans médiateurs p. 161.
- Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes de $Mn(K)$.

  Soit K un corps commutatif et $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes. Soit $E_{i,j} \in M_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. Si $M = (m_{i,j}) \in M_n(K)$, on note $\operatorname{Tr}(M) := \sum_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Si $A \in M_n(K)$ on note Φ_A l'application définie par $\Phi_A(M) := \operatorname{Tr}(AM)$ pour $M \in M_n(K)$.

  Partie I.

  (1) Montrer que $\Phi_A \in M_n(K)^\star$.
  Preuve. $M \to AM$ *est linéaire ainsi que* $M \to \operatorname{Tr}(M)$. ///

  (2) Calculer $\operatorname{Tr} AE_{i,j}$.
  Preuve. Puisque $E_{i,j}E_{i',j'} = \delta_{j,i'}E_{i,j'}$ *il suit que* $\operatorname{Tr}(E_{i,j}E_{i',j'}) = \delta_{j,i'}\delta_{i,j'}$. *On écrit* $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'}E_{i',j'}$ *on a donc* $\operatorname{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. ///

  (3) Montrer que $\Phi : M_n(K) \to M_n(K)^\star$ définie par $\Phi(A) = \Phi_A$ est linéaire bijective.
  Preuve. La linéarité vient de la linéarité de la trace. Soit $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'}E_{i',j'} \in \ker \Phi$ *alors* $0 = \Phi(A)(E_{i,j}) = \operatorname{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ *par la question précédente. Ainsi* $A = 0$. *La surjection suit puisque* $\dim M_n(k) = \dim M_n(k)^\star$. ///

  Partie II.

  Si $M \in M_n(K)$, on note $\hat{M}$ le K-endomorphisme de $E := K^n$ dont la matrice dans la base canonique (e_i) de K^n est égale à M (i.e. si $M = (m_{i,j})$ alors $\hat{M}(e_j) = \sum_i m_{i,j}e_i$). Soit $N_n(K)$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(K)$. On se propose de montrer que pour $N \in M_n(K)$ nilpotente alors $\operatorname{Tr} N = 0$ et $N^n = 0$.

  Soit $M \in M_n(K)$, on dit que M satisfait la propriété P_n si il existe une base de E dans laquelle la matrice de $\hat{M}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle. On va montrer par récurrence sur n que $N \in N_n(K)$ satisfait P_n.

(1) Montrer que $N \in N_1(K)$ satisfait P_1.
Preuve. Dans ce cas $N_1(K) = \{0\}$.///

(2) Soit $n > 1$ et $N \in N_n(K) - \{0\}$. Montrer que $\hat{N}$ induit un endomorphisme nilpotent w de $E/\ker \hat{N}$. En déduire l'existence d'une base $f_1, ..., f_r$ de $E/\ker \hat{N}$ dans laquelle la matrice de w satisfait P_n.
Preuve. Soit π la surjection canonique $\pi : E \to E/\ker \hat{N}$. Puisque $\ker(\hat{N}) \subset \ker(\pi \circ \hat{N})$ il suit du théorème des applications linéaires qu'il existe un unique K-endomorphisme w de $E/\ker \hat{N}$ avec $w \circ \pi = \pi \circ \hat{N}$. Ainsi $w^n \circ \pi = \pi \circ \hat{N}^n = 0$. Puisque $\ker \hat{N} \neq 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à w, d'où l'existence de la base f_i.///

(3) Soit $e'_i \in E$ un relèvement dans E de f_i. Montrer que $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille libre et que $S := \bigoplus_{1 \leq i \leq r} K e'_i$ est un sous-espace supplémentaire de $\ker \hat{N}$.
Preuve. Si $\sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i e'_i \in \ker \hat{N}$, il suit que $\sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i \pi(e'_i) = 0$ et donc $\lambda_i = 0$, ainsi la famille est libre et de plus $S \cap \ker \hat{N} = 0$. Puisque $r = \dim E/\ker \hat{N} = \dim E - \dim \ker \hat{N}$, il suit que $\dim S = r$.///

(4) En considérant $(e'_{r+1}, ..., e'_n)$ une base de $\ker \hat{N}$ montrer que N satisfait P_n.
Preuve. Il suit de la question précédente que $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E et puisque $\hat{N}(e'_i) = 0$ pour $r + 1 \leq i \leq n$, que $\hat{N}(e'_i) = \hat{N} \circ \pi(e_i) = \pi \circ w(f_i) \in \pi(\sum_{i<k\leq r} K f_k)$ et que $\hat{N}^n(e'_i) = \hat{N}^n \circ \pi(e_i) = \pi \circ w^n(f_i) = 0$ il suit que la matrice de $\hat{N}$ dans la base e'_i est trigonale inférieure à diagonale nulle.///

(5) Soit $N \in N_n(K)$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(k)$ avec $\mathrm{Tr}\, PNP^{-1} = 0$ et que $(PNP^{-1})^n = 0$.
Preuve. La matrice $\hat{N}$ dans la base e'_i est de la forme PNP^{-1} où P est la matrice de changement de base ainsi $\mathrm{Tr}\, PNP^{-1} = 0$ et $(PNP^{-1})^n = 0$.///

(6) Soit $N \in N_n(K)$. Montrer que $\mathrm{Tr}\, N = 0$ et que $N^n = 0$.
Preuve. On rappelle que si $A, B \in M_n(K)$ alors $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$ ainsi $0 = \mathrm{Tr}\, PNP^{-1} = \mathrm{Tr}\, N$. Enfin $(PNP^{-1})^n = PN^nP^{-1}$ et donc $N^n = 0$.///

Partie III. Soit $N_n \subset M_n(K)$ le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ engendré par $N_n(K)$ et $N_n^\perp$ son orthogonal dans $M_n(K)^\star$.

(1) Peut-on avoir $N_n = N_n(K)$?
Preuve. Si $n = 1$, on a bien égalité. Dès que $n > 1$ on peut considérer $A := E_{2,1} + E_{1,2}$, alors $A^m = E_{1,1} + E_{2,2}$ dès que $m > 1$. Ainsi $A \in N_n - N_n(K)$.///

(2) Désormais $n > 1$, montrer alors que $N_n^\perp \neq \{0\}$.
Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, il suit l'égalité n'est possible que si $N_n = M_n(K)$. Or par linéarité de la trace $\mathrm{Tr}(N_n) = 0$, ainsi $E_{1,1} \notin N_n$.///

(3) Soit $\varphi \in N_n^\perp - \{0\}$. Montrer qu'il existe une unique $P = (p_{i,j}) \in M_n(K) - \{0\}$ telle que $\varphi(M) = \mathrm{Tr}\, PM$ pour tout $M \in M_n(K)$.
Preuve. Cela résulte immédiatement de la partie I.3.///

(4) En considérant $E_{i,j} \in M_n(K)$ montrer que $p_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
Preuve. Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}^2 = 0$, ainsi $0 = \varphi(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\, PE_{i,j} = p_{j,i}$.///

(5) Soit $J := E_{i,i} - E_{i+1,i} + E_{i,i+1} - E_{i+1,i+1}$. Calculer J^2 et en déduire que $P = \lambda Id \neq 0$.
Preuve. Il suffit décrire la matrice J et vérifier que $J^2 = 0$. Alors $0 = \varphi(J) = p_{i,i} - p_{i+1,i+1}$, ainsi $P = p_{1,1} Id$ avec $p_{1,1} \neq 0$ par III.2.///

(6) Caractériser N.
Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$, il suit que $N = \{A \in M_n(K) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\}$.///

(7) Soit N' le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ engendré par les matrices N avec $N^2 = 0$. Montrer que $N' = N$.

Preuve. Puisque les matrices $E_{i,i} \in N'$ si $i \neq j$, la preuve précédente s'applique à N' au lieu de N. Ainsi $N_n^{\perp} = {N'_n}^{\perp}$, d'où l'égalité.///

(8) Soit $N \in N_n(K)$, montrer que $U := Id - N$ est inversible et en déduire que le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$ est $M_n(K)$.
Preuve. On a $U(Id + N + N^2 + ... + N^{n-1}) = Id - N^n = Id$. Soit V le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$, alors $N_n(K) \in V$ et donc V contient les matrices de trace nulle. Si la caractéristique de K ne divise pas n, alors $E_{i,i} - \frac{1}{n}Id \in V$, ainsi $E_{i,j} \in V$ pour tout i, j et donc $V = M_n(K)$. Si caractéristique de K est $p > 0$ et divise n, il faut considérer un matrice inversible A avec $a_{i,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $a_{n,n} = 1$. Un candidat naturel est donné par la matrice de permutation $Q(\sigma)$ où σ est le cycle $(1, 2, ..., n-1)$. Puisque $A - E_{n,n} \in N$, il suit que $E_{n,n} \in V$. Puisque $E_{n,n} - E_{i,i} \in V$, on conclut encore que $E_{i,j} \in V$ pour tout i, j et donc $V = M_n(K)$.///

- Une application de la dualité aux espaces vectoriels de nilpotents, [Fr. A] exercice 3.7.15 p. 163.

Exercice 15 Application de la notion de base dans les groupes.
1. Nombre minimal de générateurs d'un groupe abélien fini, [Fr. E] exercice 8.45 p. 100.
2. Nombre minimal de générateurs d'un p-groupe [F. M. 1] $n°76$ proposition p. 193.

Exercice 16 Application de la notion de base dans les extensions de corps.
1. Le théorème de Wederburn, [Fr. F] p. 157.
2. Le théorème de l'élément primitif + finitude des extensions dans une extension monogène [F. M. 1] $n°103$.
3. Constructions à la règle et au compas. Le théorème de Wantzel faible et applications classiques [F. M. 1] $n°104$ appendice 1 p. 286.