Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 55- Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Commentaires du jury 2015 : Il faut ici pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On peut voir que le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques. Mentionnons que l'affirmation ≪l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$≫ nécessite quelques précisions sur le corps K et la topologie choisie pour $M_n(K)$. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation. Le lien peut aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.
Commentaires du jury 2016 : Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps K et la topologie choisie pour $M_n(K)$. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Remarque : Il faut inclure un paragraphe relatif au théorème spectral (diagonalisation des endomophismes réels autoadjoints ou des matrices symétriques réelles dans une BON de vecteurs propres).

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
[Fr. F] Fresnel J. *Anneaux* (Hermann 2001)
et
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

$\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_m(K)$ **Développements conseillés :**

(1) Critère de diagonalisation (diagonalisable équivalent à polynôme minimal se factorise en polynômes unitaires distincts de degré 1), [Fr. A] p.167 + application : tout élément d'ordre fini de $\mathrm{GL}_n(C)$ est diagonalisable. Un sous-groupe commutatif et de torsion de $\mathrm{GL}_n(C)$ est conjugué d'un groupe de matrices diagonales avec des racines de l'unite sur la diagonale (admettre alors la diagonalisation simultanée), [Fr. A] p.186.

Application à $\mathrm{GL}_n(C)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$) isomorphe à $\mathrm{GL}_m(C)$ (resp. $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$) ssi $n = m$, [F. M. 2] p. 63.

Application aux représentations linéaires, [F. M. 2] p. 171-172.

(2) Matrices diagonalisables et groupes bornés [F. M. 1] $n°36$ p 77. On peut compléter par l'exercice suivant :

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, on suppose que la suite $M^k, k \in \mathbb{N}$ est bornée. Montrer que M est d'ordre fini.

Preuve. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ *est racine de* χ_M *alors la suite* λ^k *est bornée ainsi* $|\lambda| \leq 1$. *Le théorème de Kronecker, [Fr. F] exercice 4.4.2 p. 201, appliqué au polynôme* χ_M *implique que les racines de* χ_M

sont des racines de l'unité ; ainsi il existe $m > 0$ avec $\chi_{M^m} = (X-1)^n$ alors $M^m = Id + N$ où N est nilpotente. Montrons que $N = 0$. Pour cela nous allons montrer que si $m_N(X) = X^d$ avec $d \geq 2$ alors la suite M^{mk} est non bornée pour $k \to \infty$. La somme $\mathbb{C}N^0 + \mathbb{C}N + ... + \mathbb{C}N^{d-1} \subset M_n(\mathbb{C})$ est directe ainsi par l'équivalence des normes en dimension finie il existe $c > 0$ avec $\| \sum_{0 \leq i \leq d-1} a_i N^i \| \geq c \max_{0 \leq i \leq d-1} |a_i|$. Puisque $M^{mk} = (Id+N)^k = Id + \binom{k}{1}N + ... + \binom{k}{d-1}N^{d-1}$ et que $d \geq 2$, le résultat suit. ///

A propos des ordres des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ voir [F. M. 1] $n°26$ p. 46.

Exercice 1 Voir [F. M. 2] p. 171-172.

(1) Montrer que le groupe fini G est abélien ssi ses caractères irréductibles sont de degré 1 (considérer la représentation régulière de G ; elle est fidèle ...).

(2) Soit A est un sous-groupe commutatif du groupe fini G alors toute représentation irréductible de G est de degré $\leq \frac{|G|}{|A|}$.

Exercice 2 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est diagonalisable avec $\lambda_i, i \in 1, ..., s$ les valeurs propres distinctes. Soit $P(X) = \prod_{1 \leq i \leq s}(X - \lambda_i) \in \mathbb{C}[X]$ et pour $1 \leq i \leq s$, on note $Q_i(X) := \frac{\prod_{1 \leq k \leq s,\ k \neq i}(X - \lambda_k)}{\prod_{1 \leq k \leq s,\ k \neq i}(\lambda_i - \lambda_k)}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $P(A) = 0$. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$ on a $A^m = \sum_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^m Q_i(A)$. En déduire un calcul de l'exponentielle de $M \in M_n(\mathbb{C})$ sans diagonaliser la matrice M. Voir [F. M. 1] p. 88 pour la généralisation.

Exercice 3 Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$ et p un entier ≥ 2. Montrer que si M est diagonalisable et si $N \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $N^p = M$, alors N est diagonalisable.

Exercice 4 Une application du théorème de la base incomplète, [F. M. 2] p. 1.
Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}_k E$.

(1) On suppose que u est diagonalisable. Montrer en utilisant le théorème de la base incomplète que tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u.

(2) On suppose que tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u montrer alors que u est diagonalisable (on pourra considérer des supplémentaires d'hyperplans bien choisis).

Exercice 5 Endomorphismes semi-simples, [Fr. A] p. 221.
Notez qu'il y a une caractérisation des matrices semisimples sur les corps finis : précisément, si $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$ alors ses valeurs propres sont dans $\mathbb{F}_{q^m}$ où $m = ppcm(2, \ldots, n)$, et il existe $P \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ tel que $P^{-1}AP$ estun tableau diagonal de blocs de Jordan $\lambda_i Id + N_i$ avec $1 \leq i \leq s$. Puisque $(\lambda_i Id + N_i)^{q^m} = \lambda_i Id$ (notez que $q^m > n$), ainsi A est semisimple ssi $A^{q^m} = A$.

Exercice 6 Dénombrer les matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, [F. M. 2] p. 6 , Caldero Tome 1 p. 264.

Exercice 7 Un théorème de Burnside,[Fr. A] p. 243.

Exercice 8 Calculs d'invariants de similitude d'une matrice diagonalisable, [F. M. 1] $n°12$ p. 19.

Exercice 9 Composantes connexes de l'ensemble des matrices racines d'un polynôme, [Fr. A] par. 5.7.40 et 41 p. 280 dans le cas du corps des nombres complexes.

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ on note $\chi_M(X)$ (resp. $m_M(X)$) son polynôme caractéristique (resp. minimal). On note $\mathbb{C}[X]_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]_n$ de leur topologie canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

(1) Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \to \chi_M(X) \in \mathbb{C}[X]_n$ est continue pour les topologies de $M_n(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{C}[X]_n$.

Preuve. Les coefficients de $\chi_M(X)$ sont des fonctions polynomiale des coefficients de M. ///

(2) L'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \to m_M(X) \in \mathbb{C}[X]_n$ est-elle continue ?

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on considère la matrice $M_k := \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & -1/k \end{bmatrix}$. Alors $m_{M_k} = X^2 - 1/k^2$ sa limite est $X^2 \neq m_{0_{M_2(\mathbb{C})}}$. Pour $n > 2$ on complète la matrice M_k précédente par un tableau diagonale de 1. Ainsi l'application n'est pas continue si $n > 1$. ///

(3) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables. Montrer qu'elles sont semblables si et seulement si $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

(4) Soit $P(X) := X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ et $D(P) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$.

(a) Montrer que $D(P)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve. La condition est fermée puisque les coefficients de M^3- sont des fonctions polynômiales des coefficients de M. ///

(b) Rappelez brièvement pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, par le pivot de Gauss sur les lignes on montre que $A = TD(\det A)$ où T est un produit de matrices de transvections $B_{i,j}(\lambda)$. L'application $t \in [0,1] \to B_{i,j}(t\lambda)$ définit un chemin continu de l'identité à $B_{i,j}(\lambda)$; ainsi en composant les chemins on obtient un chemin continu de l'identité à T. Enfin puisque $\mathbb{C}^\star$ est connexe par arc on déduit un chemin continu de l'identité à $TD(\det A)$. ///

(c) Soit $M \in D(P)$, montrer que la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve. La classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est PMP^{-1} avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $t \in [0,1] \to P_t$ un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de P à l'identité. Puisque l'application $Q \to Q^{-1}$ est continue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (pensez à la formule $Q^{-1} = (\det Q)^{-1}\, {}^t com(Q)$), l'application $t \in [0,1] \to P_t M P_t^{-1}$ est un chemin continu dans la classe de similitude de M. ///

(d) Soit $M \in D(P)$, montrer que la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ coincide avec la composante connexe de M dans $D(P)$.

Preuve. Soit $M \in D(P)$ alors $m_M | X^3 - 1$ ainsi M est diagonalisable. Considérons l'application $\phi : D(P) \to \mathbb{C}[X]_n$ définie par $\phi(M) = \chi_M$. Elle est continue (c'est 1.), ainsi l'image de la composante connexe de $M \in D(P)$ est réduite au polynôme χ_M. Or $\phi^{-1}(\chi_M)$ est inclus dans la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ (c'est 3.). Inversement si $M' \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à $M \in D(P)$ alors $P(M') = 0$, ainsi $M' \in D(P)$. Finalement $\phi^{-1}(\chi_M)$ est la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est c'est aussi la composante connexe de M dans $D(P)$. ///

(e) Calculer le nombre de composantes connexes de $D(P)$ pour $n = 5$ puis pour n quelconque.

Preuve. Par ce qui précède cela revient à compter les polynômes caractéristiques possibles i.e. les polynômes unitaires de degré n ayant leurs racines dans $\{1, j, j^2\}$; ce sont les polynômes $(X-1)^a(X-j)^b(X-j^2)^c$ avec $a+b+c = n$. Cela revient à compter le nombre de possibilités à choisir 2 boîtes en positions respectives $a+1$, $a+b+2$ parmi $n+2$ boîtes rangées de 1 à $n+2$. Il y en a donc $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. ///

(5) Soit $P(X) := X^3 \in \mathbb{C}[X]$ et $D(P) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$.

(a) Calculer le nombre de classes de similitude dans $D(P)$ pour $n = 4$.

Preuve. Les matrices dans $D(P)$ sont les matrices nilpotentes d'ordre de nilpotence ≤ 3. Un système de représentants des classes de similitude est donné par les tableaux de réduites de Jordan

$J_{\ell_i}(0)$ de tailles croissantes dans $\{1,2,3\}$. Si α_i est le nombre de tableaux de taille i, le nombre de classes de similitude de $M_n(\mathbb{C})$ dans $D(X^3)$ est donc le nombre de triplets $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{N}^3$ avec $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=n$. ///

(b) On considère la fraction rationnelle $F(X) := \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$. Montrer que le coefficient de X^n dans le développement de $F(X)$ en série formelle $\in \mathbb{Z}[[X]]$ coincide avec le nombre de classes de similitude de $M_n(\mathbb{C})$ dans $D(X^3)$. En déduire un équivalent pour $n >> 0$.

Preuve. En effet dans $\mathbb{Z}[[X]]$ on calcule $(1-X)\sum_{0\leq i} X^i = \sum_{0\leq i} X^i - \sum_{0\leq i} X^{i+1} = 1$. Ainsi $F(X) = (\sum_{0\leq\alpha_1} X^{\alpha_1})(\sum_{0\leq\alpha_2} X^{2\alpha_2})(\sum_{0\leq\alpha_3} X^{3\alpha_3}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=n} X^n)$. D'autre part la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est $\frac{a}{1-X}+\frac{b}{(1-X)^2}+\frac{c}{(1-X)^3}+\frac{d}{1+X}+\frac{e}{1-jX}+\frac{e}{1-j^2X}$ et dans cette écriture le coefficient de X^n est $a+b(n+1)+c\frac{(n+2)(n+1)}{2}-d+ej^n+fj^{2n}$. Puisque $c=((1-X)^3F(X))(X=1)=\frac{1}{6}$ il suit qu'un équivalent pour $n >> 0$ est donc $\frac{1}{12}n^2$. ///

Exercice 10 Matrices circulantes diagonalisables, [F. M. 2] p. 2-5.

Exercice 11 Soient $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un sous-espace de E stable par u avec $1\leq \dim V\leq 2$, [Fr. B-C-D] p. 91. En déduire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une BON de vecteurs propres.

Exercice 12 Soit $S\in M_n(\mathbb{R}),\ n\geq 1)$ une matrice symétrique réelle.

(1) Montrer qu'il existe $S_3 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que ${S_3}^3 = S$

(2) On suppose que $S'\in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle telle que $S'^3 = S$. Soit Λ (resp. Λ') le spectre de S (resp. S').

  (a) Montrer que si $\lambda\in\Lambda'$ alors $\ker(S'-\lambda Id)\subset\ker(S-\lambda^3 Id)$ et en déduire l'égalité $\ker(S'-\lambda Id) = \ker(S-\lambda^3 Id)$.

  (b) Montrer que $S' = S_3$.

(3) Soit $S\in M_n(\mathbb{R}),\ n\geq 1$, une matrice symétrique réelle positive et $m\geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle positive S_m avec ${S_m}^m = S$.