Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 57- Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Commentaires du jury 2015 : Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée). Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables, mais une grande proportion de candidats pensent à tort que la réciproque est vraie. Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.
Commentaires du jury 2016 : L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, ceci pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables par exemple. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. E.] Fresnel J. *Groupes* (Hermann 2001)
et
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Développements conseillés :

(1) Sur l'isomorphisme entre $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_m(K)$ et entre $\mathrm{SL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_m(K)$ pour un corps K de caractéristique 2, [F. M. 2] p. 63.
(2) Un théorème de Burnside, [Fr. A] p. 243.

Exercice 1 Le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par les matrices nilpotentes, [Fr. A] ex. 1.4.17 p. 83.

Soit K un corps commutatif et $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes. Soit $E_{i,j} \in M_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. Si $M = (m_{i,j}) \in M_n(K)$, on note $\mathrm{Tr}(M) := \sum_{1\leq i\leq n} m_{i,i}$. Si $A \in M_n(K)$ on note Φ_A l'application définie par $\Phi_A(M) := \mathrm{Tr}(AM)$ pour $M \in M_n(K)$.

(1) Montrer que $\Phi : M_n(K) \to M_n(K)^\star$ définie par $\Phi(A) = \Phi_A$ est linéaire bijective.

Preuve. La linéarité vient de la linéarité de la trace. Soit $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'} E_{i',j'} \in \ker\Phi$ *alors* $0 = \Phi(A)(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = \sum_{i',j'} \mathrm{Tr}(a_{i',j'}E_{i',j'}E_{i,j}) = \sum_{i',j'} \delta_{i',j}\delta_{j',i}a_{i',j'} = a_{j,i}$. *Ainsi* $A = 0$. *La surjection suit puisque* $\dim M_n(k) = \dim M_n(k)^\star$. *///*

(2) Si $M \in M_n(K)$, on note $\hat{M}$ le K-endomorphisme de $E := K^n$ dont la matrice dans la base canonique (e_i) de K^n est égale à M (i.e. si $M = (m_{i,j})$ alors $\hat{M}(e_j) = \sum_i m_{i,j}e_i$). Soit $N_n(K)$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(K)$. Soit $\mathcal{N}_n \subset M_n(K)$ le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ engendré par $N_n(K)$ et $\mathcal{N}_n^\perp$ son orthogonal dans $M_n(K)^\star$. On veut caractériser $\mathcal{N}_n$.

Montrer que pour $N \in M_n(K)$ nilpotente alors $\mathrm{Tr}\, N = 0$ et $N^n = 0$.

Preuve. La matrice $N \in M_n(K)$ *est nilpotente si et seulement si il existe* $t > 0$ *avec* $N^t = 0$ *et donc par Cayley-Hamilton fort ssi son polynôme caractéristique* $\chi_N(X) = X^n$. *Puisque* $-\mathrm{Tr}\, N$ *est* *égal au coefficient de X^{n-1} et que $(-1)^n \det N$ est le terme constant dans $\chi_N(X)$, le résultat suit. ///*

(a) Désormais $n > 1$, montrer alors que $\mathcal{N}_n \neq N_n(K)$?

Preuve. Si $n = 1$, on a l'égalité. Dès que $n > 1$ on peut considérer $A := E_{2,1} + E_{1,2}$, alors $A^{2m} = E_{1,1} + E_{2,2}$ dès que $m > 0$. Ainsi $A \in \mathcal{N}_n - N_n(K)$. ///

(b) Montrer que $\mathcal{N}_n^{\perp} \neq \{0\}$.

Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$, il suit que l'égalité n'est possible que si $\mathcal{N}_n = M_n(K)$. Or par linéarité de la trace $\operatorname{Tr}(\mathcal{N}_n) = 0$, ainsi $E_{1,1} \notin \mathcal{N}_n$. //

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{N}_n^{\perp} - \{0\}$. On note $P = (p_{i,j}) \in M_n(K) - \{0\}$ l'unique matrice telle que $\varphi(M) = \operatorname{Tr} PM$ pour tout $M \in M_n(K)$. Montrer que $p_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

Preuve. Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}^2 = 0$, ainsi $0 = \varphi(E_{i,j}) = \operatorname{Tr} PE_{i,j} = p_{j,i}$. ///

(d) Soit $J := E_{i,i} - E_{i+1,i} + E_{i,i+1} - E_{i+1,i+1}$. Calculer J^2 et en déduire que $P = \lambda Id \neq 0$.

Preuve. Il suffit décrire la matrice J et vérifier que $J^2 = 0$. Alors $0 = \varphi(J) = p_{i,i} - p_{i+1,i+1}$, ainsi $P = p_{1,1} Id$ avec $p_{1,1} \neq 0$ par la question a). ///

(e) Caractériser $\mathcal{N}_n$.

Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a l'égalité $(F^{\perp})^{\perp} = F$, il suit que $\mathcal{N} = \{A \in M_n(K) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$. ///

(3) Montrer que le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$ est $M_n(K)$.

Preuve. Soit V le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$, alors pour $i \neq j$, $B_{i,j}(1) := \operatorname{Id} + E_{i,j} \in GL_n(K)$ et donc V contient les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$. Pour montrer que $E_{i,i} \in V$ on considère σ un cycle de longueur $n-1$ avec $\sigma(i) = i$. Alors $Q(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $E_{i,i} - Q(\sigma) \in V$ puisque la diagonale est nulle. ///

Exercice 2 Matrices simultanément triangularisables, application aux nilpotents qui commutent, [Fr. A] exercice 5.7.14. p. 236.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit $\emptyset \neq S \subset \operatorname{End}_K E$. On suppose que si $u, v \in S$ alors $uv = vu$.

(1) On suppose que les éléments de S sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise les éléments de S.

(2) On suppose que les éléments de S sont trigonalisables. Montrer qu'il existe une base de E qui trigonalise les éléments de S.

(3) On suppose que les éléments de S sont nilpotents.

(a) Soit $M(1), M(2), ..., M(m) \in M_n(K)$. On note $m(t)_{i,j}$ le coefficient de $M(t)$ à la ligne i et à la colonne j. Montrer que si $M := M(1)M(2)....M(m) = (m_{i,j})$, alors
$m_{i,j} = \sum_{k_1,k_2,...,k_{m-1}} m_{i,k_1} m_{k_1,k_2} .... m_{k_{m-2},k_{m-1}} m_{k_{m-1},j}$ où $1 \leq k_t \leq n$.

(b) Montrer qu'un produit de m éléments de S est nul dès que $m \geq n$.

Exercice 3 Espaces vectoriels de matrices nilpotentes, [Fr. B-C-D] ex. 16.16 p. 56 (notez que cela repose sur le théorème 4.2. qui est valable en toutes caractéristiques).

Exercice 4 Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. On suppose que pour tout $g \in G$, $g - Id$ est nilpotent (on dit que g est unipotent).

Montrer que dans une base convenable les éléments de G sont simultanément des matrices triangulaires supérieures, [Fr. E] ex. 8.41 p. 97.

Pour une généralisation voir [Fr. A] ex. 4. 7. 20 p. 200.

Exercice 5 Décomposition de Jordan des nilpotents, [F. M. 1] $n°9$ p.14.

Puisque le polynôme caractéristique est puissance d'un irréductible la décomposition de Jordan est aussi la décomposition de Frobenius, ainsi une variante consiste à démontrer dans ce cadre (le polynôme minimal est X^d) le lemme fondamental, [F. M. 2] lemme 2 p. 12 et pour l'existence d'un supplémentaire stable [F. M. 2] lemme 3 p. 14.

Exercice 6 Sur la topologie des nilpotents cf. [F. M. 1] $n°$ 34 p. 69.

Exercice 7 Comptage des matrices de rang $n-1$ (resp. rang $n-1$ et nilpotentes) dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, [F. M. 2] p. 8-11.

Exercice 8 Comptage des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$, [F. M. 1] $n°10$ p. 16, [C. G.] tome 2 p. 213.

Remarque. Soit $\mathcal{N}$ le sous ensemble de $M_n(\mathbb{F}_q)$ des matrices nilpotentes. C'est l'ensemble des solutions $(x_{i,j}) \in M_n(\mathbb{F}_q)$ qui annulent les coefficients du polynôme caractéristique $\det(XId - (x_{i,j}))$. On montre que le cardinal est q^{n^2-n} ce qui est aussi le cardinal d'un sous-espace vectoriel de codimension n et donc des solutions d'un système linéaire défini par des n-formes linéaires indépendantes (intersection de n hyperplans linéairement indépendants) ; c'est étonnant puisque $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel (notez que les coefficients du polynôme caractéristique sont des formes homogènes de degré 1 à n et définissent donc des hypersurfaces de degré 1 à n).

Exercice 9 Sur la valeur d'une série formelle en un nilpotent de $M_n(K)$, [F. M. 2] par. 1.7. p. 228, 2.2. et 2.3. p. 231.