Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 83- Utilisation des groupes en géométrie.

Commentaires du jury 2016 : C'est une leçon dans laquelle on s'attend à trouver des utilisations variées. On s'attend à ce que soient définis différents groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations) et à voir résolus des problèmes géométriques par des méthodes consistant à composer des transformations. De plus, les actions de groupes sur la géométrie permettent aussi de dégager des invariants essentiels (angle, birapport, excentricité d'une conique). Les groupes d'isométries d'une figure sont incontournables.
Commentaires du jury 2017 : Mêmes qu'en 2016.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
[Fr. MMG96] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996)
[Fr. MMG10] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 2010)
et
[A. F. B] Arnaudies J.M., Fraysse H. *Cours de mathématiques, Algèbre bilinéaire* (Dunod 1987)

Proposition de plan (par type de géométrie)

A. Géométrie affine :

(1) Construire une ligne polygonale connaissant les milieux des côtés, [Fr. MMG96] A.4.3.11 , [Fr. MMG10] A.4.3.7 avec les homothéties-translations.
(2) Construire un triangle connaissant les médianes, [Fr. MMG96] A.4.3.29 et [Fr. MMG10] A.4.3.17.
(3) Action du groupe affine et classification des coniques et des quadriques, [Fr. MMG10] p.297 et [A. F. B] dans le cas du corps des nombres réels.

B. Géométrie euclidienne :

(1) Action du groupe $SO_2(\mathbb{R})$ et définition du groupe des angles orientés ; leur mesure, [Fr. B-C-D] p. 75, [Fr. MMG96] C.1.1.2, [Fr. MMG10] C.1.1.2.
(2) Sous-groupes de torsion de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$, [F. M. 2'] complément à la page 121.
(3) Action du groupe des isométries du plan et classification des coniques du plan euclidien, [Fr. MMG10] p. 313.
(4) Tourniquet sur le cercle, [Fr. MMG96] C.3.6.17 , [Fr. MMG10] C.3.6.14 avec le groupe des isométries.
(5) Configuration de plusieurs cercles ayant un point commun, [Fr. MMG96] C.2.8.18 , [Fr. MMG10] C.2.8.13 avec le groupe des similitudes.
(6) Construire un triangle connaissant les bissectrices, les médiatrices, [Fr. MMG96] C.2.8.12 et [Fr. MMG10] C.2.8.10) avec des symétries orthogonales.
(7) Tuilage du plan [F. M. 1] $n°123$ p. 361.
(8) Construction du triangle de lumière, [Fr. MMG96] C.2.8.21 , [Fr. MMG10] C.2.8.6. , [F. M. 1] $n°118$) avec les isométries.
(9) Constructibilité du polygone régulier à n côtés ; le théorème de Gauss avec le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, [F. M. 1] $n°104$.
(10) Le coloriage du disque, du collier, des sommets du cube, des faces du cube avec le théorème de Burnside ([F. M. 1] $n°39$ et $n°60$).
(11) Polyèdres réguliers en dimension 3 [Fr. MMG10] p. 379.

(12) Une application d'un espace affine euclidien qui conserve les distances est une isométrie affine, [Fr. MMG10] prop. 145 p 157, voir exercice ci dessous.

(13) Groupes et propriétés géométriques de l'orbite, [Fr. MMG96] C.1.6.11, partie 00 , [Fr. MMG10] C.1.6.11.

Soient E un espace affine euclidien, $f \in \mathrm{Is}(E)$, G le sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$ engendré par f, $o \in E$. Alors on a les équivalences suivantes :

i) L'orbite de o sous G est bornée,

ii) toute orbite sous G est bornée,

iii) f a un point fixe.

C. Géométrie projective en dimension 1 :

(1) *Rappel. Si K est un corps commutatif la droite projective $P^1(K)$ est l'ensemble quotient $\frac{K^2-\{(0,0)\}}{\mathcal{R}}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x, y sont colinéaires. Ainsi un point de $P^1(K)$ est donné par un couple de coordonnées homogènes $(x : y)$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. Par construction $P^1(K)$ s'identifie avec l'ensemble des droites vectorielles de K^2 et si $\infty = (1 : 0)$ alors $P^1(K) - \infty$ s'identifie à la droite affine $(K, 1) = (0, 1) + K(1, 0)$. Plus généralement si D est une droite de K^2 alors $P^1(K) - D$ s'identifie "naturellement" avec toute droite du plan affine K^2 non vectorielle qui est parallèle à D.*

Une homographie h de la droite projective $P^1(K)$ est une bijection de $P^1(K)$ qui se déduit par passage au quotient d'une application linéaire bijective de K^2 i.e. il existe $(a, b, c, d) \in K^4$ avec $ad - bc \neq 0$ et $h((x : y)) = (ax + by : cx + dy)$. ///

(2) Birapport de 4 points et groupe des homographies de la droite projective $P^1(K)$, [Fr. MMG10] p. 73 et cor. 5.1.4 p. 74.

(3) Le groupe des homographies permutant 4 points de la droite projective sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ (peut-être utilisé dans les leçons 01-Actions de groupes, 06-Groupes des permutations), [Fr. MMG10] exercice 5.3.17 p. 84, [F. M. 1] p. 420.

(4) Birapport et application à l'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et S_5, [F. M. 1] $n°75$.

Développements conseillés :

(1) Constructions des polygones réguliers à la règle et au compas, [F. M. 1] ex. 71 + [Fr. MMG10] p. 275.

(2) Construire une ligne polygonale connaissant les milieux des arêtes, [Fr. MMG10] p. 50 + tourniquet dans un cercle, [Fr. MMG10] p. 266 ex. 3.6.17.

(3) Coloriage du cube, [F. M. 1] $n°39$.

Exercice 1 Voir [Fr. MMG10] p. 221 et [F. M. 2'] complément à la page 121. On rappelle la présentation du groupe diédral $D_{2n} =< r, s >$ avec ordre de r égal n, ordre de s égal 2 et $srs^{-1} = r^{-1}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $S(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

(1) Montrer que $S(\theta) \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$.

Preuve. On vérifie que $S(\theta)\,{}^tS(\theta) = Id$ et que $S(\theta)^2 = Id$; ainsi $S(\theta)$ est une symétrie orthogonale et puisque $S(\theta)\ {}^t(1, 0) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ le résultat suit.///

(2) Montrer que le groupe $G_n(\theta)$ engendré par $R(\frac{2\pi}{n})$ et $S(\theta)$ est isomorphe au groupe diédral D_{2n} de cardinal $2n$.

Preuve. On vérifie que $S(\theta)R(\frac{2\pi}{n})S(\theta)\ {}^t(1, 0) = {}^t(\cos\frac{2\pi}{n}, -\sin\frac{2\pi}{n})$ et puisque $\det S(\theta)R(\frac{2\pi}{n})S(\theta) = 1$ il suit que $S(\theta)R(\frac{2\pi}{n})S(\theta) = R(-\frac{2\pi}{n})$.///

(3) Soit G un sous-groupe de $SO_2(\mathbb{R})$. Montrer que G est soit dense dans $SO_2(\mathbb{R})$ soit fini et si son cardinal est n alors $G =< R(\frac{2\pi}{n}) >$ (on pourra utiliser le fait qu'un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense soit monogène i.e. de la forme $\mathbb{Z}a$, [Fr. B-C-D] p. 84).

Preuve. L'application $R : \mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$ est un homomorphisme de groupes (formules d'addition). Il est surjectif par la paramétrisation polaire du cercle unité. Enfin le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$; ainsi R induit un isomorphisme $\tilde{R}$ entre $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ et $SO_2(\mathbb{R})$. De plus $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ est compact, il suit que $\tilde{R}$ est un homéomorphisme. Il s'agit donc de préciser la nature des sous-groupes G de $\mathbb{R}$ qui contiennent $2\pi\mathbb{Z}$. Si G est discret alors $G = a\mathbb{Z}$ avec $2\pi \in a\mathbb{Z}$; ainsi $2\pi = na$ avec $n \in \mathbb{N}$ et donc $a = \frac{2\pi}{n}$. Il suit que $R(G) =< R(\frac{2\pi}{n}) >$ est fini de cardinal n. Si G n'est pas discret, il est dense dans $\mathbb{R}$ et il en est donc de même de $R(G)$.///

(4) Soit G un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ et $G^+ := G \cap SO_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\sigma \in G - G^+$. Montrer que $G = G^+ \cup \sigma G^+$, en déduire que G est soit dense dans $O_2(\mathbb{R})$ soit fini et si son cardinal est m alors $m = 2n$ et G est isomorphe au groupe diédral D_{2n}.

Preuve. Seule l'inclusion $G^+ \cup \sigma G^+ \subset G$ est à prouver. Si $g \in G - G^+$ alors $\sigma g \in G^+$ et puisque $\sigma^2 = Id$ l'inclusion suit. Notez que la réunion $G^+ \cup \sigma G^+ \subset G$ est de plus disjointe (déterminant).///

(5) Le groupe $G_n(\theta) \subset O_2(R)$ opère sur l'ensemble T des points $m = (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_m^2 + y_m^2 = 1$ par la formule $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \star (x_m, y_m) = (ax_m + by_m, cx_m + dy_m)$. On note $G_n(\theta)_m$ le groupe d'isotropie de m.

Montrer que $G_n(\theta)_m$ est d'ordre 1 ou 2; en déduire une description de l'orbite de M sous $G_n(\theta)$.

Preuve. Puisque $m \neq (0,0)$ il suit que $SO_2(\mathbb{R})_m = \{Id\}$ et donc $G_n(\theta)_m^+ = \{Id\}$. Si $\sigma, \tau \in G_n(\theta)_m - G_n(\theta)_m^+$ alors $\sigma\tau^{-1} \in G_n(\theta)_m^+$; ainsi $\sigma = \tau$ et $G_n(\theta)_m = \{Id, \sigma\}$ est d'ordre 2. Si $G_n(\theta)_m = \{Id\}$, alors l'orbite $G_n(\theta) \star m$ est le polygone régulier à n côtés $< R(\frac{2\pi}{n}) > \star m$ et si $G_n(\theta)_m = \{Id, \sigma\}$ c'est la réunion de deux polygones réguliers à n côtés qui sont $< R(\frac{2\pi}{n}) > \star m$ et $< R(\frac{2\pi}{n}) > \sigma \star m$; de plus ils sont distincts puisque l'orbite a $2n$ éléments et c'est un polygone régulier à $2n$ côtés pour les n valeurs de $\theta = k\frac{\pi}{n}$ avec $k = 1, 3, ..., 2n-1$ avec k impair (cf. 2.c) de l'exercice suivant).///

(6) Montrer que l'application qui à $\theta \in [0, \frac{2\pi}{n}[$ associe $G_n(\theta)$ définit une bijection sur les sous-groupes de $O_2(\mathbb{R})$ d'ordre $2n$ qui ne sont pas inclus dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Preuve. Il faut montrer que tout groupe $G_n(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ est égal à un unique groupe $G_n(\theta)$ avec $\theta \in [0, \frac{2\pi}{n}[$. Pour cela on remarque que l'ensemble des symétries dans $G_n(\varphi)$ est $G_n(\varphi) - G_n(\varphi)^+ = \{R(k\frac{2\pi}{n})S(\varphi) = S(\varphi + k\frac{2\pi}{n}),\ k = 0, 1, ..., n-1\}$ et puisqu'il n'y a qu'une seule valeur $k_0 := -\lfloor \frac{n\varphi}{2\pi} \rfloor$ mod n de k telle que $0 \leq \varphi + k\frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{n}$, le résultat suit avec $G_n(\varphi) = G_n(\theta)$ et $\theta = \varphi - \lfloor \frac{n\varphi}{2\pi} \rfloor \frac{2\pi}{n}$.///

Exercice 2 Orbites sous l'action d'un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ sur l'ensemble T des points $m = (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_m^2 + y_m^2 = 1$.

Soit G un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ et $G^+ := G \cap SO_2(\mathbb{R})$, on rappelle que si il existe $\sigma \in G - G^+$ alors $G = G^+ \cup \sigma G^+$.

Soit $\Sigma \subset T$ une partie non vide de T avec $G \star \Sigma = \Sigma$, alors Σ est réunion disjointe d'orbites $G \star s$ de points $s \in \Sigma$.

Dans ce qui suit Σ est réduit à un point s, G désigne un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ et $O(s) := G \star s$, l'orbite de s sous l'action de G. Enfin $\hat{G} := \{g \in O_2(\mathbb{R}) \mid g \star O(s) = O(s)\}$ le stabilisateur dans $O_2(\mathbb{R})$ de $O(s)$.

(1) On suppose que $G \subset SO_2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\hat{G}^+ = G$.

Preuve. Soit $r \in \hat{G}^+$, ainsi r est une rotation avec $r \star O(s) = O(s)$; ainsi il existe $g \in G$ avec $r \star s = g \star s$ et puisque $G \subset SO_2(\mathbb{R})$ il suit que la rotation $g^{-1}r$ fixe le point s; c'est donc l'identité.///

(b) Soit σ_s la symétrie orthogonale avec $\sigma_s(s) = s$. Montrer que $\hat{G} = G^+ \cup \sigma_s G^+$.///

Preuve. On a $\sigma_s \in \hat{G}^+$ et puisque $\hat{G}$ est un sous-groupe de $O(2)(\mathbb{R})$, il suit que $\hat{G} = \hat{G}^+ \cup \sigma_s\hat{G}^+ = G^+ \cup \sigma_s G^+$.///

(2) On suppose qu'il existe $\sigma \in G - G^+$. Soit ρ, l'unique rotation telle que $\rho(s) = \sigma(s)$. On note $O(s)^+ := G^+ \star s$ et $O(s)^- := G^+\sigma \star s$; ainsi $O(s) = O(s)^+ \cup O(s)^-$.

(a) Montrer que $O(s)^+ = O(s)^-$ ou bien que $O(s)^+ \cap O(s)^- = \emptyset$.

Preuve. L'intersection $O(s)^+ \cap O(s)^-$ est non vide si et seulement si il existe $r, r' \in G^+$ avec $r \star s = r'\sigma \star s$ autrement dit si $r'^{-1}r \star s = \rho \star s$ et donc puisque $\rho \in SO_2(\mathbb{R})$, $O(s)^+ \cap O(s)^-$ est non vide si $\rho = r'^{-1}r \in G^+$ (réciproquement si $\rho \in G^+$, $r = \rho$ et $r' =$ conviennent). Dans ce cas on a $O(s)^+ = G^+ \star s = G^+\rho \star s = G^+\sigma \star s = O(s)^-$.///

(b) On suppose que $O(s)^+ = O(s)^-$. Montrer que $\hat{G} = G$. Construire un exemple.

Preuve. On a $O(s) = O(s)^+ \cup O(s)^- = O(s)^+ = O(s)^-$. Si $g \in \hat{G}^+$ il existe $r \in G^+$ avec $g \star s = r \star s$ et donc $g = r \in G$. Enfin si $g \in \hat{G}^+\sigma$, puisque $g \star O(s)^- = O(s)^-$ il existe $r \in G^+$ avec $g \star s = r\sigma \star s$, ainsi $g\sigma \star (\sigma \star s) = r \star (\sigma \star s)$ i.e. les deux rotations $g\sigma$ et r sont égales et donc $g = r\sigma \in G$.

Exemples. Soit $n > 1$ et $G_n :=< r, \sigma >$, avec r la rotation d'angle $2\frac{\pi}{n}$ et σ la symétrie orthogonale avec $\sigma(1,0) = (1,0)$. Soit $s := (1,0)$ alors $O(s)^+ = O(s)^-$ (on peut aussi noter que $\rho =$). ///

(c) On suppose que $O(s)^+ \cap O(s)^- = \emptyset$. Montrer que si $\rho^2 \notin G^+$ alors $\hat{G} = G$ et que si $\rho^2 \in G^+$ alors $\hat{G}^+ = G^+ \cup \rho G^+$ et donc $\hat{G} = \hat{G}^+ \cup \hat{G}^+\sigma$. Construire un exemple dans chacune des deux situations.

Preuve. Nous sommes donc dans la situation où $\rho \notin G$ et $O(s)$ est réunion disjointe de $G^+ \star s$ et de $G^+\sigma \star s$. Soit donc $h \in \hat{G}$ i.e. $h \in O_2(\mathbb{R})$ avec $h \star O(s) = O(s)$ ce qui équivaut aux deux conditions $h \star s \in O(s)$ et $h \star (\sigma \star s) \in O(s)$ (discuter en fonction de la nature de h, on n'a pas besoin de l'équivalence) . On distingue 2 cas.

- *On suppose que la rotation $\rho^2 \in G$ (et $\rho \notin G$). Il s'agit de montrer que $h \in G^+ \cup \rho G^+$. Il existe $g, g' \in G$ avec (1) $h \star s = g \star s$ et (2) $h \star (\sigma \star s) = g' \star s$. On discute en fonction de la nature de h.*
  - *Supposons que $h \in SO_2(\mathbb{R})$. Si $g \in SO_2(\mathbb{R})$ la relation (1) montre que $h = g \in G^+$. Si $g \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ la relation (1) devient $h \star s = g\sigma \star (\sigma \star s) = g\sigma\rho \star s$; ainsi (3) $h = (g\sigma)\rho = \rho(g\sigma)$ puisque $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif. Ainsi $h \in \rho G^+$.*
  - *Supposons que $h \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$. Alors $h' := \sigma h \in SO_2(\mathbb{R})$ et puisque les relations (1) et (2) sont équivalentes aux relations analogues pour h' à condition de remplacer g resp. g' par σg resp. $\sigma g'$ le résultat est alors conséquence du cas précédent appliqué à h'.*

    Exemples. Soit $n > 1$ et $G = G_n :=< R(2\frac{\pi}{n}), \sigma >$, avec r la rotation d'angle $2\frac{\pi}{n}$ et $\sigma = S(\theta)$ la symétrie orthogonale avec $S(\theta) \star (1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Soit $s := (1,0)$ alors $\rho = R(\theta)$, ainsi il faut et il suffit de choisir $\theta \notin \{2k\frac{\pi}{n} \mod 2\pi\}$ mais que $2\theta \in \{2k\frac{\pi}{n} \mod 2\pi\}$ avec $k \in \{0, 1, .., n-1\}$ pour que $\rho \notin G_n^+$ et $\rho^2 \in G_n^+$. Cela donne n possibilités qui sont $\theta = k\frac{\pi}{n}$ avec $k = 1, 3, ..., 2n-1$ avec k impair. L'orbite $O(s)$ est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone régulier dont le groupe des isométries est G_{2n} puisque $\hat{G}_n = G_{2n}$.
- *On suppose que la rotation $\rho^2 \notin G$. Il s'agit de montrer que $h \in G$.*
  - *Si $h \in SO_2(\mathbb{R})$ et si $g \in SO_2(\mathbb{R})$ comme précédemment on déduit que $h \in G$ et si $g \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ que (3) $h = \rho(g\sigma)$. On va conclure à l'aide de la relation (2) $h \star (\sigma \star s) = g' \star s$.*

    Si $g' \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ on a $\sigma h\sigma \star s = \sigma g' \star s$ avec $\sigma h\sigma$, $\sigma g' \in SO_2(\mathbb{R})$, ainsi $\sigma h\sigma = \sigma g'$ et donc $h = g'\sigma \in G^+$.

    Si $g' \in SO_2(\mathbb{R})$ on a $h \star (\sigma \star s) = h\rho \star s = g' \star s$, ainsi avec (3) $g' = h\rho = \rho(g\sigma)\rho = (g\sigma)\rho^2$ et donc $\rho^2 \in G$; contradiction!
  - *Supposons que $h \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ on conclut comme précédemment en considérant σh.*

*Exemples. Soit $n > 1$ et $G = G_n :=< R(2\frac{\pi}{n}), \sigma >$, avec r la rotation d'angle $2\frac{\pi}{n}$ et $\sigma = S(\theta)$ la symétrie orthogonale avec $S(\theta) \star (1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Soit $s := (1,0)$ alors $\rho = R(\theta)$, ainsi il faut et il suffit de choisir $\theta \notin \{k\frac{\pi}{n} \mod 2\pi\}$ avec $k \in \{0, 1, .., n-1\}$ pour que $\rho^2 \notin G_n^+$ et donc aussi $\rho \notin G_n^+$; autrement dit il faut éviter les exemples construits dans la question précédente. Dans ce cas $O(s)$ est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone convexe qui n'est pas régulier et dont le groupe des isométries est G_n puisque $\hat{G_n} = G_n$./// *

Exercice 3 Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (voir [Fr. B-C-D] p. 165), $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ (voir [F. M. 1] $n°26$ question 4) p. 49 et question 1) p. 46).

(1) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On va montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} \subset O_2(\mathbb{R})$; ainsi si $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le groupe G est cyclique et sinon G est diédral.

(a) On note q la forme quadratique euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ i.e. $q((x,y)) = x^2 + y^2$. Montrer que $q_G((x,y)) = \sum_{g\in G} q((x,y)\ {}^tg))$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$.
Preuve. La forme $\Phi_G((x,y),(x',y')) := \sum_{g\in G}((x,y)\ {}^tg)|(x,y)\ {}^tg))$ où $(.|.)$ désigne le produit scalaire, est une forme bilinéaire symétrique et $q_G((x,y)) = \Phi_G((x,y),(x,y))$ est la forme quadratique associée. Enfin puisque $q((x,y)\ {}^tg))) \geq 0$ et c'est nul si et seulement si $(x,y) = (0,0)$ il suit que Φ_G est un produit scalaire.///

(b) Montrer que $G \subset O(q_G)$, le groupe orthogonal de q_G.
Preuve. Soit $g \in G$, alors $q_G((x,y)\ {}^tg') = \sum_{g\in G} q((x,y)\ {}^tg'\ {}^tg)) = q_G((x,y))$ puisque $Gg' = G$.///

(c) Montrer que $O(q_G)$ et $O(q)$ sont des sous-groupes conjugués de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Preuve. Soit $S \in Sym_2(\mathbb{R})$ avec $q_G((x,y)) = (x,y)S\ {}^t(x,y)$. Soit (e_1, e_2) une BON de $\mathbb{R}^2$ pour q_G; si P est la matrice de passage telle que $(x,y) = (x',y')\ {}^tP$ avec $x'e_1 + y'e_2 = (x,y)$ alors $q_G((x,y)) = x'^2 + y'^2$; ainsi si $g \in O(q_G)$ alors $q_G((x,y)) = q_G((x,y)\ {}^tg) = q_G((x',y')\ {}^tP\ {}^tg)$ ainsi ${}^tP\ {}^tgSgP = Id$ et puisque ${}^tPSP = Id$ (cas $g = Id$) on a $P^{-1}gP \in O_2(\mathbb{R})$.///

(d) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ avec $P^{-1}GP \subset O_2(\mathbb{R})$ en déduire que si $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, le groupe G est cyclique et sinon G est diédral.
Preuve. L'inclusion $P^{-1}GP \subset O_2(\mathbb{R})$ est conséquence de la question qui précède. Ainsi le groupe fini $P^{-1}GP$ est cyclique et sinon G est diédral par l'exercice 1 .///

(e) On suppose que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de cardinal n. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} =< R(\frac{2\pi}{n}) >$ où $R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
Preuve. Puisque $\det PgP^{-1} = 1$ si $g \in G$, ainsi PGP^{-1} est égal à l'unique sous-groupe de $SO_2(\mathbb{R})$ de cardinal n (voir exercice 1).///

(f) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $B_{1,2}(a) := \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.
On suppose que $n \neq 2$, montrer que les deux groupes $< B_{1,2}(a)R(\frac{2\pi}{n})B_{1,2}(-a) >$ et $< B_{1,2}(b)R(\frac{2\pi}{n})B_{1,2}(-b) >$ sont égaux si et seulement si $a = b$.
Preuve. Pour simplifier le calcul on écrit $c(k)$ resp. $s(k)$ pour $\cos k$ resp. $\sin k$. Une CNS est qu'il existe $k \mid (k,n) = 1$ avec $B_{1,2}(a-b)R(\frac{2\pi}{n})B_{1,2}(b-a) = R(\frac{2k\pi}{n})$. Ce qui donne les 4 conditions $c(1) + (a-b)s(1) = c(k)$, $s(1) = s(k)$, $(a-b)c(k) - s(k) = -s(1) + (a-b)c(1)$, $c(k) + (a-b)s(k) = c(1)$. Il suit que $s(k) = s(1)$ et $c(k) = c(1)$; ainsi $k = 1 \mod n$ et donc $(a-b)s(1) = 0$. Si $n \neq 2$ alors $s(1) \neq 0$ et donc $a = b$.///

(2) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ contient un unique sous-groupe d'ordre 2.
Preuve. Soit $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, avec $A^2 = Id$. Ainsi le polynôme minimal de A divise $X^2 - 1$; il est donc scindé à racines simples. Il suit que A est diagonalisable et puisque $\det A = 1$, il suit que A est l'homothétie $\pm Id$.///

(3) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ non inclus dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ainsi par ce qui précède on sait que $G \simeq D_{2n}$.

(a) En considérant la trace des éléments de G, montrer que $n \in \{1,2,3,4,6\}$.
Preuve. On a montré précédement qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *avec* $G^+ = P < R(\frac{2\pi}{n}) > P^{-1} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*; ainsi* $\mathrm{Tr}\, R(\frac{2\pi}{n}) = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$ *et donc* $2\cos\frac{2\pi}{n} \in \{-2,-1,0,1,2\}$*.///*

(b) Réciproquement montrer que pour $n \in \{1,2,3,4,6\}$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ contient un sous-groupe isomorphe à D_{2n} (on pourra considérer la matrice compagnon du polynôme caractéristique de la rotation $R(2\frac{\pi}{n})$).
Preuve. Si $n \in \{1,2,3,4,6\}$*, comme vu précédement* $\mathrm{Tr}\, R(\frac{2\pi}{n}) \in \mathbb{Z}$ *et puisque* $\det R(\frac{2\pi}{n}) = 1$*, il suit que le polynôme caractéristique de* $R(\frac{2\pi}{n})$ *est dans* $\mathbb{Z}[X]$ *et par conséquent la matrice compagnon* $CompR(2\frac{\pi}{n})$ *du polynôme caractéristique de la rotation* $R(2\frac{\pi}{n})$ *est dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*; c'est la matrice de la rotation dans la base* $(1,0),(1,0)\ {}^tR(2\frac{\pi}{n})$ *(l'espace est monogène!) si* $n \notin \{1,2\}$ *auquel cas* $s(1) \neq 0$*.*

Supposons que $n \notin \{1,2\}$*. La matrice de passage est* $P = \begin{bmatrix} 1 & c(1) \\ 0 & s(1) \end{bmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c(1)}{s(1)} \\ 0 & -\frac{1}{s(1)} \end{bmatrix}$*.*

On vérifie que $P^{-1}R(\frac{2\pi}{n})P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2c(1) \end{bmatrix} = CompR(2\frac{\pi}{n})$*.*

On calcule $P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} 1 & 2c(1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =: S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$*. Ainsi* $G =< CompR(2\frac{\pi}{n}), S >$ *convient.*

Supposons que $n \in \{1,2\}$*. Dans ces cas* $R(\frac{2\pi}{n}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *et alors* $G =< R(\frac{2\pi}{n}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} >$ *convient.///*

(4) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On note $M := \sum_{g\in G}\mathbb{Z}(1,0)g + \sum_{g\in G}\mathbb{Z}(0,1)g \in \mathbb{Q}^2$ et $p_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ la première projection i.e. $p_1((x,y)) = x$.

(a) Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ avec $d\mathbb{Z}^2 \subset dM \subset \mathbb{Z}^2$.
Preuve. Puisque $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ *est fini; il existe* $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ *un dénominateur commun aux coefficients des matrices dans* G*; ainsi* $dG \subset M_2(\mathbb{Z})$ *et donc le sous groupe* dM *de* $\mathbb{Q}^2$ *engendré par* dG *est dans* $\mathbb{Z}^2$*. Enfin par construction* M *contient* $\mathbb{Z}^2$ *donc* $d\mathbb{Z}^2 \subset dM$*.///*

(b) Montrer que $p_1(dM) = a\mathbb{Z}$ avec $a \in \{\mathbb{Z} - \{0\}$.
Preuve. Il suit de la question précédente que la projection $p_1(dM)$ *est un sous-groupe de* $p_1(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}$ *et donc* $p_1(dM) = a\mathbb{Z}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$*. Puisque* $d\mathbb{Z}^2 \subset dM$*, il suit que* $d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$*; ainsi* $a \neq 0$*.///*

(c) Montrer que $dM \cap \mathbb{Z}(0,1) = \mathbb{Z}(0,b)$ avec $b \neq 0$.
Preuve. Puisque $d\mathbb{Z}^2 \subset dM$*, il suit que* $d\mathbb{Z}(0,1) \subset dM \cap \mathbb{Z}(0,1)$*; ainsi* $dM \cap \mathbb{Z}(0,1)$ *est un sous-groupe non réduit à 0 du groupe monogène* $\mathbb{Z}(0,1)$*.///*

(d) Montrer que $M = \mathbb{Z}m_1 \bigoplus \mathbb{Z}m_2$.
Preuve. Soit $m \in M$*.Par ce qui précède* $dm = (x,y)$ *avec* $x = p_1(dm) \in a\mathbb{Z}$ *ainsi* $x = \lambda a$ *avec* $\lambda \in \mathbb{Z}$*. Puisque* $p_1(dM) = a\mathbb{Z}$*, il existe* $m_1 \in M$ *avec* $p_1(dm_1) = a$*; ainsi* $p_1(dm - \lambda m_1) = 0$ *et donc* $dm - \lambda m_1 \in dM \cap \mathbb{Z}(0,1) = \mathbb{Z}(0,b)$*. Soit* $m_2 \in M$ *avec* $dm_2 = (0,b)$*, alors* $m \in \mathbb{Z}m_1 + \mathbb{Z}m_2$*. Puisque* $p_1(m_2) = 0$*, il suit que la somme est directe.///*

(e) Soit $H := \{h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid M\ {}^th = M$, montrer que $H = P\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})P^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
Preuve. Soit $B := ((1,0),(0,1))$ *et* $B' := (m_1, m_2)$*; ce sont des bases de* $\mathbb{Q}^2$*. Si* $h \in H$ *alors* $m_1\ {}^th \in \mathbb{Z}m_1 \bigoplus \mathbb{Z}m_2$*; ainsi la matrice* $[h]_{B'}$ *de* h *dans la base* B' *est dans* $M_2(\mathbb{Z})$*; en considérant* h^{-1} *il suit que son inverse est aussi dans* $M_2(\mathbb{Z})$ *et donc* $[h]_{B'} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$*. Réciproquement si* $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ *avec* $[h]_{B'} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *on a* $M\ {}^th = M$ *et donc* $h \in H$*. Soit* P *la matrice de l'identité de la base* B' *dans la base* B *alors* P *convient.///*

(f) En déduire la liste des sous-groupes finis à isomorphisme près de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
Preuve. Soit G *un sous-groupes fini de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$*. On a construit précédemment un sous groupe* M *de* $\mathbb{Q}^2$*. Par construction* $G \subset H$*; ainsi* $P^{-1}HP$ *est un sous-groupe fini de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *et donc les*

sous-groupes finis à isomorphisme près de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ *sont les sous-groupes finis de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *donc les sous-groupes de* D_{2n} *avec* $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$*.///*

Exercice 4 Groupes et propriétés géométriques de l'orbite, [Fr. MMG96] C.1.6.11, partie 00 , [Fr. MMG10] C.1.6.11.

Soient E un espace affine euclidien, $f \in \mathrm{Is}(E)$, G le sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$ engendré par f, $o \in E$. Alors on a les équivalences suivantes :

(1) L'orbite de o sous G est bornée,
(2) Toute orbite sous G d'un point de E est bornée,
(3) f a un point fixe.

Preuve.

- *Montrons que (1) implique (2).*
  Soit $m \in E$ *avec* $f(m) = m$ *alors* $\forall k \in \mathbb{N}$ *on a* $d(m, f^k(o)) = d(f^k(m), f^k(o)) = d(m, o)$ *ainsi l'orbite de* m *sous* G *est bornée.*
- *Montrons que (2) implique (3).*
  Il existe $r > 0$ *avec* $d(o; f^k(o)) \leq r$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$*. Soit* $m \in E$ *alors* $d(f^k(o), f^k(m)) = d(o, m)$ *et donc* $d(o, f^k(m)) \leq d(o, f^k(o)) + d(f^k(o), f^k(m)) \leq r + d(o, m)$*.///*
- *Montrons que (3) implique (1).*
  Par le théorème de la forme réduite des isométries de E *il existe* $g \in Is(E)$ *avec un point fixe* A *et* $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$ *avec* $f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$*. Ainsi* $f^k(A) = A + k\vec{v}$ *et donc* $d(A, f^k(A)) = k\|\vec{v}\| \to \infty$ *si* $\vec{v} \neq \vec{0}$*. Puisque la suite* $f^k(A)$ *est bornée il suit que* $\vec{v} = \vec{0}$ *ainsi* $f = g$ *a un point fixe.///*

Exercice 5 Une application d'un espace affine euclidien qui conserve les distances est affine car produit de réflexions, [Fr. MMG10] prop. 1.4.5 p. 157 et [Fr. MMG96] lemme 1.2.2.2 p. 149.

Soit E un espace affine euclidien de dimension n et f une application de E dans E qui conserve les distances. Soient $(x_0, x_1, ..., x_n)$ un repère affine de E et $y_i := f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. On veut montrer que f est un produit de réflexions (i.e. symétries orthogonales hyperplanes), en particulier $f \in Is(E)$, le groupe des isométries affines de E.

(1) Montrer par récurrence sur k l'existence de $g \in Is(E)$ qui est produit de réflexions et telle que $g(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq k$.
Preuve. Montrons cela pour $k = 0$*. Si* $y_0 = g(x_0)$*,* $g := Id_E$ *convient (produit vide de réflexions) et si* $y_0 \neq x_0$ *soit* H_0 *l'hyperplan médiateur de* x_0, y_0 *et* r_{H_0} *la réflexion par rapport à* H_0*, alors* $g := r_{H_0}$ *convient.*
On suppose le résultat satisfait pour $k-1$ *i.e; il existe* $g \in Is(E)$ *avec* $g(x_i) = y_i$ *pour* $0 \leq i \leq k-1$*. On suppose que* $z_k := g(x_k) \neq y_k$*, Soit* H_k *l'hyperplan médiateur de* y_k, z_k*. Puisque* $\|x_i - x_j\| = \|y_i - y_j\|$ *pour tout* i, j*, il suit que* $\|g(x_i) - g(x_k)\| = \|y_i - y_k\|$ *pour tout* $0 \leq i \leq k-1$ *et donc par hypothèse de récurrence que* $\|y_i - g(x_k)\| = \|y_i - y_k\|$ *pour tout* $0 \leq i \leq k-1$*. Ainsi* y_i*,* $0 \leq i \leq k-1$ *appartient à l'hyperplan médiateur* H_k *de* $g(y_k)$ *et* y_k*. Soit* r_{H_k} *la réflexion d'hyperplan* H_k *alors* $r_{H_k} \circ g$ *convient. ///*

(2) On suppose que $y_i = x_i$ pour $0 \leq i \leq n$. Montrer que $f = Id_E$.
Preuve. Soit $x \in E$ *avec* $y := f(x) \neq x$*. Soit* H *l'hyperplan médiateur de* x, y*, alors* $x_i \in H$ *pour* $0 \leq i \leq n$ *et donc* $H = E$*, ce qui est une contradiction. ///*

(3) Conclure.
Preuve. On a construit dans la question 2, $g \in Is(E)$ *qui coïncide avec* f *sur le repère affine* $(x_0, x_1, ..., x_n)$*, alors* $h := g^{-1} \circ f$ *est une application qui conserve les distances et qui est l'identité sur un repère affine; c'est donc l'identité par la question précédente et donc* $f = g$ *est produit d'au plus* n *réflexions. ///*

Exercice 6 Le normalisateur dans $\mathrm{GL}_n(K)$ du sous-groupe $\mathcal{D}$ des matrices diagonales inversibles. Une variante "géométrique" de [Fr. A] ex. 2.3.4. p. 122.
On suppose que $K \neq \mathbb{F}_2$. Montrer que c'est le sous-groupe de N de $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices qui laissent stable $V := \cup_{1\leq i\leq n} Ke_i$ où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de K^n.

Preuve. Puisque V est stable par le groupe $\mathcal{D}$ il suit que $N\mathcal{D}N^{-1}$ a la même propriété et ainsi $N\mathcal{D}N^{-1} = \mathcal{D}$; ainsi N est dans le normalisateur dans $\mathrm{GL}_n(K)$ du sous-groupe $\mathcal{D}$. Réciproquement soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $P\mathcal{D}P^{-1} = \mathcal{D}$. Si $|K| > n$ soit D une matrice diagonale inversible avec $d_{i,i} \neq d_{j,j}$ si $i \neq j$, alors $DP = PD'$ avec $D' \in \mathcal{D}$. Ainsi $D(P(e_i)) = P(d'_{i,i}e_i)$, ainsi $P(e_i)$ est un vecteur propre de D et donc $P(e_i) \in V$. Dans le cas général il faut se fatiguer un peu plus : soit $a \in K$ avec $a \notin \{0, -1\}$ and $D_i := Id + aE_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme précédemment $D_iP = PD'_i$ avec $D'_i \in \mathcal{D}$. Supposons que $P(e_1) \notin V$ puisque $P(e_1)$ est un vecteur propre de D_i et que $P(e_1) \notin Ke_i$, il suit que $P(e_1) \in \bigoplus_{j\neq i} Ke_j$ et donc $e_i^\star(P(e_1)) = 0$; ainsi $P(e_1) = 0$, ce qui est absurde. ///

Exercice 7 Le groupe des matrices inversibles réelles à coefficients positifs ou nuls. Une variante "géométrique" de [Fr. A] ex. 2.3.17. p. 131.
On se propose d'étudier le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} ont leurs coefficients ≥ 0. Soit $C := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n\}$., alors G opère naturellement sur le cône C.

(1) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in C$. On suppose que l'équation $x = y + z$ avec $y, z \in C$ implique y et z sont colinéaires; montrer alors que $x \in \cup_{1\leq i\leq n}\mathbb{R}^+e_i$.
(2) Retrouver ainsi le fait que dans chaque ligne et chaque colonne de $M \in G$ il y a un et un seul coefficient non nul.