

Compléments Errata à Algèbre et Géométrie (Hermann 2011) de Jean Fresnel et Michel Matignon

(le 20/01/2019)

Le complément ajouté le 20/01/2019 se trouve à la page 11 de ce document
Page 11 : Sur la matrice des P.G.C.D.

Les compléments et errata ajoutés le 22/11/2018 se trouvent aux pages suivantes de ce document :

Page 1 : Monoïde multiplicatif de matrices nilpotentes

Page 7 : complément à l'exercice 58

Page 8 : complément à l'exercice 82

Page 18 : Généralisation du déterminant de Vandermonde, applications à un théorème de Chebotarëv, au principe d'incertitude, à la majoration de racines d'un polynôme via la transformée de Fourier discrète

Les numéros des pages qui suivent sont celles de l'ouvrage.

p. 8 , rajouter $U \in M_n(K)$

p. 15, complément : Monoïde multiplicatif de matrices nilpotentes

Théorème (Köthe, Levitzki) Soient k un corps commutatif, V un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{S} une partie de $\text{End}_k V$ constituée de nilpotents, on suppose en plus que pour tout $u, v \in \mathcal{S}$, on a $uv \in \mathcal{S}$.

Alors il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de V de façon que pour tout $u \in \mathcal{S}$, la matrice $\text{Mat}(u; e_i)$ soit triangulaire supérieure avec une diagonale nulle. En particulier on a $\mathcal{S}^n = \{0\}$, i.e. si $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{S}$, alors $u_1 u_2 \dots u_n = 0$ ([F], ex. 5.7.13. p. 236).

Démonstration

1) Si $\dim V = 1$, on a $\mathcal{S} = \{0\}$, ainsi la proposition est trivialement satisfaite.

Maintenant, on suppose que $n \geq 2$ et que la proposition est satisfaite pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n et pour tout \mathcal{S} .

2) On suppose que $\dim V = n \geq 2$. Soit $\mathcal{S}(V)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{u(x) \mid u \in \mathcal{S} \text{ et } x \in V\}$, i.e. $\mathcal{S}(V) = \sum_{u \in \mathcal{S}} u(V)$.

On suppose que $\mathcal{S}(V) \neq V$. Soit donc $W := \mathcal{S}(V)$. Clairement W est stable

par tout élément de \mathcal{S} , ainsi tout $u \in \mathcal{S}$ induit un élément u_W de $\text{End}_k W$. Soit $\mathcal{S}_W := \{u_W \mid u \in \mathcal{S}\}$. Facilement \mathcal{S}_W est un ensemble de nilpotents de $\text{End}_k W$ et si $u_W, v_W \in \mathcal{S}_W$, alors $u_W v_W = (uv)_W \in \mathcal{S}_W$. Ainsi l'hypothèse de récurrence dit qu'il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_r) de W de façon que pour tout $u_W \in \mathcal{S}_W$, la matrice $\text{Mat}(u_W; e_1, \dots, e_r)$ soit triangulaire supérieure avec une diagonale nulle.

Soit $\rho: E \rightarrow \frac{E}{W}$ la surjection canonique, alors pour tout $u \in \mathcal{S}$ il existe $u_S \in \text{End}_k(\frac{E}{W})$ tel que $\rho u = u_S \rho$. Facilement si $u \in \mathcal{S}$, alors u_S est nilpotent et de plus pour $u, v \in \mathcal{S}$ on a $u_S v_S = (uv)_S$. Soit donc $\mathcal{S}_S := \{u_S \mid u \in \mathcal{S}\}$. Encore ici, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui veut dire qu'il existe une base $(\rho(e_{r+1}), \rho(e_{r+2}), \dots, \rho(e_n))$ de $\frac{E}{W}$ de façon que pour tout $u \in \mathcal{S}$, la matrice $\text{Mat}(u_S; \rho(e_{r+1}), \dots, \rho(e_n))$ soit triangulaire supérieure avec une diagonale nulle.

Il suit facilement de cela que $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de V et que pour tout $u \in \mathcal{S}$ la matrice $\text{Mat}(u; e_1, e_2, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure avec une diagonale nulle.

3) Il nous reste à montrer que $\mathcal{S}(V) \neq V$.

C'est le plus technique. Supposons le contraire, i.e. $\mathcal{S}(V) = V$.

3.1) Montrons qu'il existe $u_1, u_2, \dots, u_t \in \mathcal{S}$ tels que

$$V = u_1(V) + u_2(V) + \dots + u_t(V).$$

En effet $V = k e_1 \oplus k e_2 \oplus \dots \oplus k e_n$ et donc $e_i = \sum_{j \in I_i} u_{j,i}(x_{j,i})$ avec I_i qui est

fini, $u_{j,i} \in \mathcal{S}$, $x_{j,i} \in V$. Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_t\} = \{u_{j,i} \mid 1 \leq i \leq n \mid j \in I_i\}$.

On a donc $\mathcal{S}(V) \subset u_1(V) + u_2(V) + \dots + u_t(V)$ et donc

$$V = \mathcal{S}(V) = u_1(V) + u_2(V) + \dots + u_t(V).$$

3.2) Soit donc $T := \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$. Soit $k \geq 1$, on déduit

facilement de 3.1) que

$$V = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in T^k} a_1 a_2 \dots a_k(V).$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$, il existe $a_1, a_2, \dots, a_k \in T$ avec $a_1 a_2 \dots a_k \neq 0$.

3.3) On souhaite montrer qu'il existe $a \in T$ et $z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{S}$ tels que

$$(a z_1)(a z_2) \dots (a z_{m-1}) a \neq 0 \text{ avec } m \geq n.$$

Soit $k := n(n-1)t$, par 3.2), il existe $w_1, w_2, \dots, w_k \in T$ avec

$$w_1 w_2 \dots w_k \neq 0.$$

Soit $\theta_i := \text{card}\{j \in \{1, 2, \dots, k\} \mid w_j = u_i\}$, on a donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_t = k = n(n-1)t.$$

En conclusion, il existe i tel que $\theta_i \geq n(n-1)$. On note $a := u_i$.

Sachant que $a^n = 0$ et en regroupant les $w_i \neq a$, on peut écrire

$w := w_1 w_2 \dots w_k$ sous l'une des quatre formes suivantes.

- (1) $w = a^{\alpha_1} y_1 a^{\alpha_2} y_2 \dots a^{\alpha_m} y_m$ avec $1 \leq \alpha_j < n$, $y_j \in \mathcal{S}$,
- (2) $w = y_0 a^{\alpha_1} y_1 a^{\alpha_2} y_2 \dots a^{\alpha_m} y_m$ avec $1 \leq \alpha_j < n$, $y_j \in \mathcal{S}$,
- (3) $w = y_0 a^{\alpha_1} y_1 a^{\alpha_2} y_2 \dots a^{\alpha_{m-1}} y_{m-1} a^{\alpha_m}$ avec $1 \leq \alpha_j < n$, $y_j \in \mathcal{S}$,
- (4) $w = a^{\alpha_1} y_1 a^{\alpha_2} y_2 \dots a^{\alpha_{m-1}} y_{m-1} a^{\alpha_m}$ avec $1 \leq \alpha_j < n$, $y_j \in \mathcal{S}$.

Comme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \geq n(n-1)$, il suit que $m \geq n$. Comme $w \neq 0$, on a dans tous les cas

$$(a^{\alpha_1} y_1)(a^{\alpha_2} y_2) \dots (a^{\alpha_{m-1}} y_{m-1}) a^{\alpha_m} \neq 0.$$

On peut donc écrire la relation ci-dessus

$$a(a^{\alpha_1-1} y_1) a(a^{\alpha_2-1} y_2) \dots (a^{\alpha_{m-1}-1} y_{m-1} a^{\alpha_m-1}) a \neq 0.$$

En posant $z_i := a^{\alpha_i-1} y_i$ pour $i \leq m-2$ et $z_{m-1} := a^{\alpha_{m-1}-1} y_{m-1} a^{\alpha_m-1}$, on obtient la formule recherchée.

3.4) Soit $\mathcal{S}_1 := a\mathcal{S}$, alors \mathcal{S}_1 est un ensemble de nilpotents qui est stable pour la multiplication. Soit $X := a(V)$, facilement $v(X) \subset X$ pour tout $v \in \mathcal{S}_1$. Comme a est nilpotent, on a $\dim X < \dim V$.

Si $v \in \mathcal{S}_1$, on note v_X l'endomorphisme de X induit par v . Soit

$\mathcal{S}_{1,X} := \{v_X \mid v \in \mathcal{S}_1\}$, facilement $\mathcal{S}_{1,X}$ est une partie de $\text{End } X$ constituée de nilpotents et stable pour la multiplication. Alors par hypothèse de récurrence sur la dimension, on sait en particulier que si

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \in \mathcal{S}_{1,X}$, on a $s_1 s_2 \dots s_{n-1} = 0$. Si donc s_i est induit par $t_i \in \mathcal{S}_1$, on a $t_1 t_2 \dots t_{n-1}(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Ca veut dire que

$$t_1 t_2 \dots t_{n-1} a(y) = 0 \text{ pour tout } y \in V.$$

Il suit en particulier de cela que $(a z_1)(a z_2) \dots (a z_{m-1}) a = 0$ puisque $m \geq n$.

Ce qui donne une contradiction.

Commentaires

La démonstration du théorème de **Köthe et Levitzki** sur les monoïdes multiplicatifs de matrices nilpotentes utilise donc des techniques élémentaires de l'algèbre linéaire.

En revanche, le théorème de **Kolchin**, dont l'énoncé est assez proche (voir ci-après) nécessite l'utilisation d'un théorème de **Burnside** (voir ci-après) dont la démonstration utilise des méthodes plus élaborées.

Le théorème de Burnside ([F.] ex. 4.7.18. p.198) *Soient k un corps commutatif, algébriquement clos, V un k -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre unitaire de $\text{End } V$ telle que si W est sous-espace vectoriel de V stable par tout élément de \mathcal{A} , alors $W = \{0\}$ ou $W = V$. Alors $\mathcal{A} = \text{End } V$.*

Le théorème de Kolchin ([F.], ex. 4.7.20. p. 200) *Soient k un corps commutatif, V un k -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit \mathcal{G} un sous-groupe de $Gl(V)$ constitué d'éléments unipotents. Alors il existe une base \mathcal{B} de V de façon que pour tout $g \in \mathcal{G}$, la matrice $Mat(g; \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure avec une diagonale qui est I_n .*

Bibliographie

[F.] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)

[K.] Köthe G. *Über maximalenilpotente Unterringe und Nilringe.* Math. Ann. 103, 359-363 (1930)

[L.] Levitzki J. *Über nilpotente Unterringe* Math. Ann. 105, 620-627 (1931)

p. 87 ce qui suit remplace le 5.2.1. et 5.2.2. avec quelques éléments de démonstration

5.2. Sur "l'injectivité" de l'exponentielle de matrices réelles

5.2.1. *Soient $N, N' \in M_n(\mathbb{R})$, deux matrices nilpotentes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *On a $N=N'$, ii) on a $\exp(N)=\exp(N')$.*

5.2.2. *Soient $D, D' \in M_n(\mathbb{R})$, deux matrices semi-simples, $m_D(T)$ (resp. $m_{D'}(T)$) le polynôme minimal de D (resp. D'). On décompose $m_D(T)$ sous la forme $m_D(T) = U_1(T) U_2(T) U_3(T) U_4(T)$ avec*

$U_1(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2) \dots (T - \lambda_r)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$,

$U_2(T) = (T - \mu_1)(T - \mu_1)(T - \mu_2)(T - \mu_2) \dots (T - \mu_s)(T - \mu_s)$ avec

$\mu_k = \alpha_k + i b_k$, $\alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$, et $b_k \equiv 0 \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$ et $b_k \neq 0$,

$U_3(T) = (T - \nu_1)(T - \nu_1)(T - \nu_2)(T - \nu_2) \dots (T - \nu_t)(T - \nu_t)$ avec

$\nu_k = \alpha_k + i b_k$, $\alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$, et $b_k \equiv \pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$, et enfin

$U_4(T) = (T - \eta_1)(T - \eta_1)(T - \eta_2)(T - \eta_2) \dots (T - \eta_u)(T - \eta_u)$ avec

$\nu_k = \alpha_k + i b_k$, $\alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$, et $b_k \equiv \beta_k \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$, avec $0 < \beta_k < \pi$.

Soient $\Lambda_1 := \{ \lambda_k \mid 1 \leq k \leq r \}$, $\Lambda_2 := \{ \mu_k \mid 1 \leq k \leq s \}$, $\Lambda_3 := \{ \nu_k \mid 1 \leq k \leq t \}$,

$\Lambda_4 := \{ \eta_k \mid 1 \leq k \leq u \}$, $M_i := \{ e^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_i \}$.

On associe aussi à D' une décomposition analogue avec des $U'_i(T)$, des ensembles Λ'_i et M'_i .

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) *On a $\exp(D)=\exp(D')$,*

ii) *les trois propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. *On a $M_1 \cup M_2 = M'_1 \cup M'_2$. Soient $m \in M_1 \cup M_2$,*

$W_m := \left(\bigoplus_{e^\lambda = m, \lambda \in \Lambda_1} \ker_{\mathbb{R}}(D - \lambda I_n) \right) \oplus \left(\bigoplus_{e^\mu = m, \mu \in \Lambda_2} \ker_{\mathbb{R}}(D - \mu I_n)(D - \mu I_n) \right),$

$$W'_m := \left(\bigoplus_{e^\lambda = m, \lambda \in \Lambda'_1} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \lambda I_n) \right) \oplus \left(\bigoplus_{e^\mu = m, \mu \in \Lambda'_2} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \mu I_n) \right),$$

alors on a $W_m = W'_m$.

2. On a $M_3 = M'_3$. Soient $m \in M_3$,

$$W_m := \bigoplus_{e^v = m, v \in \Lambda_3} \ker_{\mathbb{R}}(D - v I_n) (D - v I_n),$$

$$W'_m := \bigoplus_{e^v = m, v \in \Lambda'_3} \ker_{\mathbb{R}}(D' - v I_n) (D' - v I_n), \text{ alors on a } W_m = W'_m.$$

3. On a $M_4 = M'_4$. Soient $m \in M_4$, $m = \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$,

$$W_m := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n) (D - \eta I_n),$$

$$W'_m := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda'_4} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta I_n) (D' - \eta I_n), \text{ alors on a } W_m = W'_m \text{ et il existe}$$

$u_m \in Gl(W_m)$ tel que $(u_m)^2 = -\mathbb{1}_{W_m}$, $u_m D = D u_m$, $u_m D' = D' u_m$, et pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n) (D - \eta I_n)$, si $\eta = a + ib \in \Lambda_4$, on a $D(X) = aX - b u_m(X)$; et pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta' I_n) (D' - \eta' I_n)$, si $\eta' = a' + ib' \in \Lambda_4$, on a $D'(X) = a'X - b' u_m(X)$.

(si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\ker_{\mathbb{R}}(A) := \{Z \in \mathbb{R}^n \mid AZ = 0\}$).

Plan de la démonstration de 5.2.2.

L'implication $i) \Rightarrow ii)$

1) Le calcul de $\exp(D)$

Soient $\xi \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\xi = a + ib$, $\ker_{\mathbb{C}}(D - \xi I_n) := \{Z \in \mathbb{C}^n \mid (D - \xi I_n)(Z) = 0\}$,

$$Q(T) := (T - \xi)(T - \bar{\xi}) = T^2 - 2aT + (a^2 + b^2),$$

$\ker_{\mathbb{R}} Q(D) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid Q(D)(X) = 0\}$. Alors

$\ker_{\mathbb{R}}(Q(D)) \subset \ker_{\mathbb{C}}(D - \mu_j I_n) \oplus \ker_{\mathbb{C}}(D - \bar{\mu}_j I_n)$ et l'application $Y \mapsto Y + -Y$ est une bijection \mathbb{R} -linéaire de $\ker_{\mathbb{C}}(D - \mu_j I_n)$ sur $\ker_{\mathbb{R}} Q(D)$.

Soit $u \in Gl(\ker(Q(D)))$ défini par $u(Y + -Y) := i(-Y - Y)$. Comme

$D(Y) = \xi Y$, on a $D(-Y) = -\bar{\xi} - Y$. Il suit facilement que

$D(Y + -Y) = a(Y + -Y) - b(i(-Y - Y))$. Ainsi pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(Q(D))$, on a

$D(X) = aX - b u(X)$; facilement $u^2 = -\mathbb{1}$ et donc $D(u(X)) = bX + a u(X)$

et $D u(X) = u D(X)$.

Calculons $\exp(D)(X)$ pour $X \in \ker_{\mathbb{R}} Q(D)$. Par ce qui précède on a

$$\begin{bmatrix} D(X) \\ D(u(X)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix} \text{ et donc}$$

$$\begin{bmatrix} D^k(X) \\ D^k(u(X)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix}. \text{ Il suit que}$$

$$\begin{bmatrix} \exp(D)(X) \\ \exp(D)(u(X)) \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix} \right).$$

Or $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a I_2 + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donc

$$\exp \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \exp(aI_2) \times \exp(b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}), \text{ soit}$$

$$\exp \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = e^a I_2 \times ((\cos b) I_2 + (\sin b) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}).$$

En résumé, on a

$$\exp(D)(X) = e^a ((\cos b) X - (\sin b) u(X))$$

$$\exp(D)(u(X)) = e^a ((\sin b) X + (\cos b) u(X)).$$

2) Comme D est une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$, il suit que $\exp(D)$ est une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ et que l'ensemble de ses valeurs propres est exactement $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_4$. Les valeurs propres réelles positives sont les éléments de $M_1 \cup M_2$, les valeurs propres réelles négatives sont les éléments de M_3 et enfin les valeurs propres non réelles sont les éléments de $M_4 \cup M_4$. Il suit bien de cela que $M_1 \cup M_2 = M_1' \cup M_2'$, $M_3 = M_3'$, $M_4 = M_4'$. Enfin en considérant l'espace propre associé à ces valeurs propres, on déduit que $W_m = W_m'$.

3) Il nous reste à montrer la partie 3.

$$\text{Soient } m \in M_4, V_m := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{C}}(D - \eta I_n),$$

$$V_m' := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4'} \ker_{\mathbb{C}}(D' - \eta I_n), \text{ alors } V_m \text{ est l'espace propre de } \exp(D)$$

associé à la valeur propre m , de même V_m' est l'espace propre de $\exp(D')$ associé à la valeur propre m ; comme $\exp(D) = \exp(D')$, on a $V_m = V_m'$. Il suit de 1) que l'application $Y \mapsto Y + -Y$ est une bijection \mathbb{R} -linéaire de

$$V_m := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{C}}(D - \eta I_n) \text{ sur}$$

$$W_m := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n)(D - \eta I_n), \text{ notée } u_m. \text{ De même}$$

l'application $Y \mapsto Y + -Y$ est une bijection \mathbb{R} -linéaire de

$$V_m' := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4'} \ker_{\mathbb{C}}(D' - \eta I_n) \text{ sur}$$

$$W_m' := \bigoplus_{e^\eta = m, \eta \in \Lambda_4'} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta I_n)(D' - \eta I_n), \text{ qui est aussi } u_m. \text{ Il suit encore}$$

de 1) que $u_m \in G\ell(W_m)$, $(u_m)^2 = -\mathbb{1}_{W_m}$, $u_m D = D u_m$, $u_m D' = D' u_m$, et

pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n)(D' - \eta I_n)$ on a pour $\eta = a + ib$,

$D(X) = aX - b u_m(X)$; de même pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta I_n)(D - \eta I_n)$ on a pour $\eta' = a' + ib'$, $D'(X) = a'X - b' u_m(X)$.

Enfin *ii)* implique *i)* est sans difficulté.

p. 89 , ligne 14

$e_i \exp A = e_i e^{a_i} (I_n + \frac{N_i}{1!} + \dots + \frac{(N_i)^{a_i-1}}{(\alpha_i - 1)!})$. Alors la formule de 6.1. suit du fait

ligne 16

4) Montrons 6.2. . Si $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_r)$ est le polynôme minimal de A , on sait que $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$. Il s'agit d'abord de montrer la formule $1 = u_1 Q_1 + u_2 Q_2 + \dots + u_r Q_r$. Posons

$Q(X) := u_1 Q_1(X) + u_2 Q_2(X) + \dots + u_r Q_r(X)$, facilement, on a $Q(a_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq r$; sachant que $\deg Q \leq r - 1$ et que les a_i sont distincts, on a $Q(X) - 1 = 0$, i.e. la formule de Bézout.

ligne -9

Comme $(X - a_i) Q_i(X) = P(X)$, on a donc $e_i (A - a_i I_n) = 0$, i.e. $e_i N_i = 0$ selon les notations de 6.1. , Alors par 6.1. on a bien $\exp(A) = \sum_{i=1}^r e_i e^{a_i}$.

ligne -8

5) Montrons 6.3. . Comme en 2) si $A' = B' + C'$ avec $B' C' = C' B'$ et

ligne -3

la formule de 6.3.

ligne -2

Application de 6.3. Soient $A \in M_n(K)$ avec $(A - I_n)^2 (A - 2I_n) = 0$, $t \in K$.

p. 92 , ligne -8, lire

$$x(t) = \frac{y(t)}{y_0} (x_0 + \frac{y_0}{\lambda} \text{Log}(\frac{y(t)}{y_0}))$$

p. 147, ex. 58, complément

Par cet exercice, on sait que si G opère transitivement sur X qui est fini, alors il existe $g \in G$ tel que $\text{Fix}(g) := \{x \in X \mid g(x) = x\} = \emptyset$; en particulier $\text{Fix}(G) := \{x \in X \mid \text{pour tout } g \in G, \text{ on a } g(x) = x\} = \emptyset$.

Question. On suppose que $\text{Fix}(G) = \emptyset$, existe-t-il $g \in G$ avec $\text{Fix}(g) = \emptyset$?

Un exemple qui dit NON.

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ défini comme il suit. Pour tout $g \in G$, on a $g(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$ et donc $g(\{4, 5\}) = \{4, 5\}$. Ainsi g induit un élément $u(g)$ de $\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ et un élément $v(g)$ de

$\mathfrak{S}(\{4, 5\})$. On suppose que $u: G \rightarrow \mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ est surjectif et que pour tout $g \in G$, on a $v(g) = (4)(5)$ si $\text{sgn}(u(g)) = 1$ et $v(g) = (4, 5)$ si $\text{sgn}(u(g)) = -1$.

Facilement $\text{Fix}(G) = \emptyset$ et $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ pour tout $g \in G$.

p.202, ex. 82, complément

Soient k un corps commutatif, \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux sous-groupes de $GL_n(k)$ et $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ un homomorphisme de groupes.

On suppose que pour tout $g \in \mathcal{G}$, il existe $A_g \in GL_n(k)$ tel que $f(g) = A_g g A_g^{-1}$.

Alors la question est la suivante.

Existe-t-il $B \in GL_n(k)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{G}$, on ait

$$f(g) = B g B^{-1} ?$$

0) Si \mathcal{G} est engendré par un élément, la réponse est trivialement oui.

1) La réponse est oui, si \mathcal{G} est fini.

Soit $\rho: \mathcal{G} \rightarrow GL_n(k)$, l'injection canonique, i.e. $\rho(g) = g$.

Soit $\mu: \mathcal{G}' \rightarrow GL_n(k)$, l'injection canonique et $\rho' := \mu f$, i.e. $\rho'(g) = \mu f(g)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Ainsi ρ et ρ' sont deux représentations linéaires de \mathcal{G} .

Il suit de l'hypothèse sur f qu'il existe $A_g \in GL_n(k)$ avec $\rho'(g) = A_g g A_g^{-1}$; en conséquence $\chi_{\rho'(g)}(X) = \chi_{\rho(g)}(X)$, où $\chi_{\rho'(g)}(X)$ (resp. $\chi_{\rho(g)}(X)$) est le polynôme caractéristique de $\rho'(g)$ (resp. $\rho(g)$).

Compte tenu de FM1, n°10, p. 208 et n°12, p. 208 il suit que les représentations ρ et ρ' sont isomorphes. Ce qui veut dire qu'il existe $B \in GL_n(k)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{G}$, on a $\rho'(g) = B \rho(g) B^{-1}$.

2) La réponse est oui, si \mathcal{G} est limite inductive de sous-groupes finis.

On fera la démonstration dans le cas plus simple où \mathcal{G} est réunion croissante d'une suite de sous-groupes finis de \mathcal{G} , i.e. $\mathcal{G} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{G}_i$ avec \mathcal{G}_i qui est fini et $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}$ pour tout $i \geq 0$.

2.1) En considérant l'isomorphisme $f_i: \mathcal{G}_i \rightarrow f(\mathcal{G}_i)$ défini par $f_i(g) := f(g)$ pour $g \in \mathcal{G}_i$, il suit de 1) qu'il existe $B_i \in GL_n(k)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{G}_i$, on a $f(g) = B_i g B_i^{-1}$.

2.2) Soit $\mathcal{E}_i := \{M \in M_n(k) \mid \text{pour tout } g \in \mathcal{G}_i, \text{ on a } f(g)M = M g\}$. Il suit facilement que \mathcal{E}_i est un k -espace vectoriel et que par 2.1), on a $\dim \mathcal{E}_i \geq 1$.

2.3) Facilement, si $j \geq i$, on a $\mathcal{E}_j \subset \mathcal{E}_i$, ainsi $\dim \mathcal{E}_i \geq \dim \mathcal{E}_j$, il suit que la suite décroissante $(\dim \mathcal{E}_i)_i$ est stationnaire et donc que la suite $(\mathcal{E}_i)_i$ est stationnaire.

Ainsi, il existe k avec $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_k$ pour tout $i \geq k$.

Il suit de cela que pour tout $g \in \mathcal{G}$, on a $f(g) = B_k g B_k^{-1}$.

3) Un exemple avec $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, un sous-groupe de $Gl_2(k)$ et $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ un automorphisme du groupe \mathcal{G} , tel que pour tout $g \in \mathcal{G}$, il existe $A_g \in Gl_2(k)$ avec

$$f(g) = A_g g A_g^{-1},$$

et tel qu'il n'existe pas $B \in Gl_n(k)$ avec $f(g) = B g B^{-1}$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Soit k un corps contenant \mathbb{Q} et $x, y \in k$ de façon que la famille (x, y) soit \mathbb{Q} -libre. Soient

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \right\}, .$$

Facilement l'application

$$(\alpha, \beta) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme du groupe additif \mathbb{Z}^2 sur \mathcal{G} . Comme

$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha + \beta, \beta)$ est un automorphisme de \mathbb{Z}^2 , il suit que l'application

$f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ définie par $f\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1 & (\alpha + \beta)x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est un

automorphisme de \mathcal{G} .

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, sachant que (x, y) est \mathbb{Q} -libre, on a

$(\alpha + \beta)x + \beta y \neq 0$, soit $d := \frac{\alpha x + \beta y}{(\alpha + \beta)x + \beta y}$ et $A(\alpha, \beta) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

Sachant que (x, y) est \mathbb{Q} -libre, on a $\alpha x + \beta y \neq 0$, ce qui veut dire que $A(\alpha, \beta) \in Gl_2(k)$. Facilement

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha(x+1) + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 1 & \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il suit de cela que pour tout $g \in \mathcal{G}$, il existe $A_g \in Gl_2(k)$ avec

$$f(g) = A_g g A_g^{-1}.$$

Il reste à montrer qu'il n'existe pas $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Gl_2(k)$ avec

$$\begin{bmatrix} 1 & (\alpha + \beta)x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = B \begin{bmatrix} 1 & \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sachant que cette dernière égalité est vraie pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on déduit que

(1) $d((\alpha + \beta)x + \beta y) = a(\alpha x + \beta y)$,

(2) $c(\alpha x + \beta y) = 0$.

Comme $\alpha x + \beta y \neq 0$ si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on a $c=0$. Ensuite (1) pour $\alpha=1$, $\beta=0$, donne $dx=ax$. De même (1) pour $\alpha=0$, $\beta=1$, donne $d(x+y)=ay$. Ainsi $dx=ax$ et $d(x+y)=ay$ impliquent $a=d=0$. Il suit que $B \notin Gl_2(k)$.

Remarque. Cette question évoque un "principe local-global" ou encore un "principe de Hasse" pour un groupe qui s'énonce comme il suit.

Soit G un groupe, $f:G \rightarrow G$ un automorphisme. On suppose que pour tout $g \in G$, il existe $x_g \in G$ tel que $f(g) = x_g g (x_g)^{-1}$.

On dit alors que le principe de Hasse est satisfait, s'il existe $x \in G$ tel que pour tout $g \in G$, on a $f(g) = x g x^{-1}$; i.e. f est un automorphisme intérieur.

A ce propos on pourra consulter [K.] pour une liste de groupes satisfaisant le principe de Hasse. Par exemple les groupes $Sl_n(D)$ ou $Gl_n(D)$ avec D un anneau commutatif euclidien satisfont le principe de Hasse ([W. 1], [W. 2]). Burnside a construit un groupe d'ordre 3^6 qui ne satisfait pas le principe de Hasse et Wall a construit un sous-groupe de \mathfrak{S}_8 d'ordre 2^5 qui ne satisfait pas le principe de Hasse ([W. 3])

Dans notre exemple 3) la situation est différente puisque $\mathcal{G} \subset Gl_2(k)$ et que l'on considère les automorphismes intérieurs de $Gl_2(k)$.

[K.] Kunyavskii Boris *Local-global invariants of finite and infinite groups: around Burnside from another side* Expo. Math. 31 (2013), n° 3, 256-273.

[W. 1] Wada Hideo *"Hasse principle" for $Sl_n(D)$* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 75 (1999), n° 5, 67-69.

[W. 2] Wada Hideo *"Hasse principle" for $Gl_n(D)$* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 76 (2000), n° 3, 44-46.

[W. 3] Wall G.E. *Finite groups with class-preserving outer automorphisms* J. London Math. Soc. 22 (1947) 315-320.

p. 209, ligne 9

sont θ_j pour $1 \leq j < p$ définies par $\theta_j(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

p. 220, ligne-8

13.2.2.3) Conclusion de 8.2. que $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}$ sont exactement

p. 243, ligne -10

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{\delta|d} g(\delta) \right) = \sum_{\delta|n} g(\delta) \left(\sum_{\frac{d}{\delta}|n} \mu\left(\frac{n}{\delta}\right) \right).$$

p. 244 , ligne 8

$d \neq n$. Ainsi X'_n est l'ensemble des $x \in X$ pour les quels n est le plus petit entier m avec $x \in X_m$, au sens de la relation d'ordre définie par d est inférieur ou égal à n si et seulement si $d | n$.

Complément à l'exercice 86 de FM1, partie 3, p. 245

Sur la matrice des P.G.C.D.

0. Introduction

L'exemple historique est celui de la matrice de Smith (1976). Il s'agit de la matrice $M = [m_{i,j}] \in M_n(\mathbb{Z})$ avec $m_{i,j} = \text{pgcd}(i,j)$. Alors Smith ([S.]) a montré que $\det M = \varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(n)$ où φ est l'indicateur d'Euler. Smith a lui-même généralisé ce résultat au cas où $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une suite de $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} - \{0\}$ telle que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fermé pour la factorisation ; ce qui veut dire que pour tout i, j le $\text{pgcd}(x_i, x_j)$ est élément de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si donc $M = [m_{i,j}] \in M_n(\mathbb{Z})$ avec $m_{i,j} = \text{pgcd}(x_i, x_j)$ alors $\det M = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)$.

En 1989 Beslin et Ligh ([B. L. 3]) ont tout d'abord considéré la matrice ci-dessus sans supposer que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fermé pour la factorisation. Alors ils ont montré que la matrice symétrique M est symétrique définie positive.

Pour notre complément la généralisation est assez profonde puisque l'on considère une suite $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sachant que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fermé ou non pour la factorisation. Ensuite, on considère une application $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ où A est un anneau commutatif et $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ est défini par $\psi(m) = \sum_{d|m} F(d) \mu\left(\frac{m}{d}\right)$ où μ est la fonction de Möbius. Et enfin

$M(X, F) := [m_{i,j}] \in M_n(A)$ avec $m_{i,j} = F(\text{pgcd}(i, j))$, qu'on appellera encore la matrice des P.G.C.D.

Le théorème principal dit qu'il existe une matrice rectangulaire $Z \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ telle que $M = Z \Delta^t Z$ où Δ est une matrice diagonale, de diagonale $(\psi(d_1), \psi(d_2), \dots, \psi(d_m))$, avec $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ qui est la fermeture pour la factorisation de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Si de plus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fermé pour la factorisation, alors on peut choisir $Z \in Gl_n(\mathbb{Z})$.

Dans le cas où $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfait $F(m) = m$ (resp. $\psi(m) = 1$, $\psi(m) = m$) , on retrouve le théorème Smith et quelques autres.

Si $A = \mathbb{R}$, sous la condition $\psi(m) > 0$ pour tout m , on trouve que M est symétrique définie positive. Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fermé pour la factorisation, alors la signature de M est le couple (p, q) où p (resp. q) est le nombre de i tels que $\psi(x_i) > 0$ (resp. $\psi(x_i) < 0$).

1. La matrice des P.G.C.D.

Soient $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} - \{0\}$, $n \geq 1$, $X := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, A un anneau commutatif, $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ une application.

Soit $M(X, F) = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(A)$, la matrice définie par

$$m_{i,j} := F(\text{pgcd}(x_i, x_j)).$$

On l'appelle *la matrice des P.G.C.D. associée à X et F* .

Si μ est la fonction de Möbius, alors les relations (1) et (2) suivantes sont équivalentes

$$(1) \quad \psi(m) = \sum_{d|m} F(d) \mu\left(\frac{m}{d}\right),$$

$$(2) \quad F(m) = \sum_{d|m} \psi(d),$$

ce qui veut dire que si $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ une application et si ψ est défini par (1), alors F satisfait la relation (2); de même si $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ est une application et si F est défini par (2), alors ψ satisfait la relation (1) ([FM 1], ex. 86, partie 1.2. et 1.3. p. 243).

Lemme Soient $X := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, A un anneau commutatif, $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ une application, $M(X, F)$ la matrice des P.G.C.D. associée à X et F comme ci-dessus.

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation, Y la suite $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ et $Q(\sigma) = [\varepsilon_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(2)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n)}]$ la matrice associée à σ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est la base canonique de A^n . Alors on a

$${}^t Q(\sigma) Q(\sigma) = I_n \text{ et } M(X, F) Q(\sigma) = Q(\sigma) M(Y, F).$$

2. Le théorème principal sur la matrice des P.G.C.D.

Théorème Soient $X := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, A un anneau commutatif, $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ une application, $M(X, F)$ la matrice des P.G.C.D. associée à X et F .

Soit D la fermeture de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pour la factorisation, i.e.

$D := \{d \in \mathbb{N}_+ \mid \text{il existe } x_i \text{ avec } d \mid x_i\}$. Notons $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ avec $d_i \neq d_j$ pour $i \neq j$.

Soit $Z := [z_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n,m}(A)$ avec $z_{i,j} = 1_A$ si $d_j \mid x_i$ et $z_{i,j} = 0$ autrement.

Soit Δ la matrice diagonale, de diagonale $(\psi(d_1), \psi(d_2), \dots, \psi(d_m))$ où ψ est défini en (1). Alors on a

$$M(X, F) = Z \Delta^t Z .$$

Démonstration

Soit $u_{i,j}$ le terme en position (i, j) de la matrice $Z \Delta^t Z$. On a

$$u_{i,j} = \sum_{k=1}^m z_{i,k} z_{j,k} \psi(d_k) ,$$

donc

$$u_{i,j} = \sum_{\substack{d_k | x_i \\ d_k | x_j}} \psi(d_k) = \sum_{d_k | \text{pgcd}(x_i, x_j)} \psi(d_k) ,$$

il suit alors de (2) que

$$u_{i,j} = F(\text{pgcd}(x_i, x_j)) .$$

Cela montre bien que $Z \Delta^t Z = M(X, F)$.

3. Le cas des ensemble fermés pour la factorisation

Définition 1 Soit E une partie finie de \mathbb{N}_+ , on dit que E est fermé pour la factorisation si pour tout $x \in E$ et pour tout $d \in \mathbb{N}_+$ tel que $d | x$, alors $d \in E$.

Exemple 1 L'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est fermé pour la factorisation.

Exemple 2 Soit p un nombre premier, alors l'ensemble $\{1, p, p^2, \dots, p^n\}$ est fermé pour la factorisation.

Corollaire 1 Soient $X := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite finie d'éléments de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, on suppose que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est fermé pour la factorisation. Soient A un anneau commutatif, $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow A$ une application, $M(X, F)$ la matrice des P.G.C.D. associée à X et F . Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, T une matrice triangulaire inférieure de $M_n(\mathbb{Z} 1_A)$ avec des 1_A sur la diagonale de façon que

$$T^t Q(\sigma) M(X, F) Q(\sigma)^t T = \Delta ,$$

où Δ est la matrice diagonale, de diagonale $(\psi(x_{\sigma(1)}), \psi(x_{\sigma(2)}), \dots, \psi(x_{\sigma(n)}))$ et où ψ est défini en (1).

Démonstration

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \dots < x_{\sigma(n)}$ et $y_i := x_{\sigma(i)}$. Enfin, soit Y la suite (y_1, y_2, \dots, y_n) , il suit du lemme que ${}^t Q(\sigma) Q(\sigma) = I_n$ et

$$M(X, F) Q(\sigma) = Q(\sigma) M(Y, F) .$$

Soit $Z := [z_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(A)$ avec $z_{i,j} = 1_A$ si $y_j | y_i$ et $z_{i,j} = 0$ autrement. Il

suit que Z est une matrice triangulaire inférieure avec des 1_A sur la diagonale.

Il suit alors du théorème que $M(Y, F) = Z \Delta^t Z$ où Δ est la matrice diagonale, de diagonale $(\psi(y_1), \psi(y_2), \dots, \psi(y_n))$. Si donc $T := Z^{-1}$, on a

$$T^t Q(\sigma) M(X, F) Q(\sigma)^t T = \Delta,$$

où Δ est la matrice diagonale, de diagonale

$(\psi(x_{\sigma(1)}), \psi(x_{\sigma(2)}), \dots, \psi(x_{\sigma(n)}))$ et où ψ est défini en (1).

4. Le cas $A = \mathbb{Z}$ (historiquement le plus riche)

Corollaire 2 (résultat historique de H.J.S. Smith, 1876)

Soit φ l'indicateur d'Euler, i.e. $\varphi(1) = 1$ et pour $n \geq 2$,

$\varphi(n) := \text{card}\{i \mid 0 \leq i < n \text{ et } 1 = \text{pgcd}(i, n)\}$.

1. Soit $M := [\text{pgcd}(i, j)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{Z})$, alors on a $\det M = \varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(n)$.

2. Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fermé de \mathbb{N}_+ pour la factorisation,

$M := [\text{pgcd}(x_i, x_j)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{Z})$, alors on a $\det M = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)$.

Démonstration

1) Soit X la suite finie $(1, 2, \dots, n)$ et $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $F(k) = k$. On sait alors que $\varphi(m) = \sum_{d|m} d \mu\left(\frac{m}{d}\right)$ ([F. M. 1] partie 2.3., p. 244). Ainsi la

partie 1. du corollaire 2 est conséquence du corollaire 1.

2) Soit X la suite finie (x_1, x_2, \dots, x_n) et $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $F(k) = k$. On sait alors que $\varphi(m) = \sum_{d|m} d \mu\left(\frac{m}{d}\right)$ ([F. M. 1] partie 2.3., p. 244). Ainsi la

partie 2. du corollaire 2 est conséquence du corollaire 1.

Remarque 1 La matrice définie à la partie 1 du corollaire est souvent appelée la matrice de Smith.

Remarque 2 On pourra trouver une application du déterminant de Smith lors de la démonstration d'un théorème Brauer ([F. M. 2] théorème 10.1. partie 1.2.3 de la démonstration p. 162).

Corollaire 3

Soit φ l'indicateur d'Euler, i.e. $\varphi(1)=1$ et pour $n \geq 2$,

$\varphi(n) := \text{card}\{i \mid 0 \leq i < n \text{ et } 1 = \text{pgcd}(i, n)\}$.

1. Soit $M := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, où $m_{i,j}$ est le nombre de diviseurs dans \mathbb{N}_+ de $\text{pgcd}(i, j)$. Alors $\det M = 1$.

Soit $M := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, où $m_{i,j}$ est la somme des diviseurs dans \mathbb{N}_+ de $\text{pgcd}(i, j)$. Alors $\det M = n!$.

2. Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fermé de \mathbb{N}_+ pour la factorisation.

Soit $M := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, où $m_{i,j}$ est le nombre de diviseurs dans \mathbb{N}_+ de $\text{pgcd}(x_i, x_j)$. Alors $\det M = 1$.

Soit $M := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, où $m_{i,j}$ est la somme des diviseurs dans \mathbb{N}_+ de $\text{pgcd}(x_i, x_j)$. Alors $\det M = x_1 x_2 \dots x_n$.

Démonstration

Il est clair que 2. est conséquence de 1.

Soient X la suite finie (x_1, x_2, \dots, x_n) et $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $\psi(k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il suit de l'équivalence de (1) et (2) que $F(k)$ est le nombre de diviseurs de k qui sont dans \mathbb{N}_+ . Il suit alors du corollaire 1 que $\det M = \psi(x_1)\psi(x_2) \dots \psi(x_n) = 1$.

Soit X la suite finie (x_1, x_2, \dots, x_n) et $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $\psi(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il suit de l'équivalence de (1) et (2) que $F(k)$ est la somme des diviseurs de k qui sont dans \mathbb{N}_+ . Il suit alors du corollaire 1 que $\det M = \psi(x_1)\psi(x_2) \dots \psi(x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

5. Le cas où $A = \mathbb{R}$

Corollaire 4 Soit $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $m \in \mathbb{N}_+$, on a $\psi(m) > 0$. Soit $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $F(m) = \sum_{d|m} \psi(d)$.

Soient $X := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite finie de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et $M(X, F) := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} := F(\text{pgcd}(x_i, x_j))$.

Alors $M(X, F)$ est une matrice symétrique définie positive.

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation telle que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \dots < x_{\sigma(n)}$ et Y la suite finie (y_1, y_2, \dots, y_n) avec $y_i := x_{\sigma(i)}$, il suit du lemme que

$$(3) \quad {}^t Q(\sigma) M(X, F) Q(\sigma) = M(Y, F) ,$$

en particulier $\text{rang} M(X, F) = \text{rang} M(Y, F)$.

Soit $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ la fermeture de $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ pour la factorisation et on choisit d_1, d_2, \dots, d_m tels que $d_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Soit $Z := [z_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ avec $z_{i,j} = 1$ si $d_j | y_i$ et $z_{i,j} = 0$ autrement.

Soit Δ la matrice diagonale, de diagonale $(\psi(d_1), \psi(d_2), \dots, \psi(d_m))$ où ψ est défini en (1). Alors il suit du théorème que

$$(4) \quad M(Y, F) = Z \Delta {}^t Z .$$

Si $m > n$, la matrice Z se décompose en deux blocs $Z = [E_1, E_2]$ où $E_1 \in M_n(\mathbb{Z})$, $E_2 \in M_{n, m-n}(\mathbb{Z})$, de plus E_1 est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Il suit de cela que $\text{rang} Z = n$. Si $m = n$, on a facilement $\text{rang} Z = n$.

Soit Δ_1 la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs et telle que $(\Delta_1)^2 = \Delta$. Soit $H := Z \Delta_1$, on a $\text{rang} H = n$ et

$$(5) \quad M(Y, F) = H {}^t H ,$$

il suit de la décomposition de Cartan ([Fr. B.C.D.] ex. 10.18 p. 142) que $\text{rang} M(Y, F) = n$.

Il suit de (5) que pour tout $L \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t L M(Y, F) L \geq 0$, ce qui veut dire que $M(Y, F)$ est symétrique positif, et comme $\text{rang} M(Y, F) = n$, il suit bien que $M(Y, F)$ est une matrice symétrique définie positive. Il suit alors de (3) que $M(X, F)$ est une matrice symétrique définie positive.

Corollaire 5 *Soit la suite finie $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{N}_+ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on suppose que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est fermé pour la factorisation. Soit $F: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $\psi: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\psi(m) = \sum_{d|m} F(d) \mu\left(\frac{m}{d}\right)$,*

$M(X, F) := [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} := F(\text{pgcd}(x_i, x_j))$. Alors on a

$$\text{sgn}(M(X, F)) = (p, q) \text{ avec } p := \text{card}\{i \mid \psi(i) > 0\} , q := \text{card}\{i \mid \psi(i) < 0\} .$$

Démonstration

Il suit du corollaire 1 qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, T une matrice triangulaire inférieure de $M_n(\mathbb{Z})$ avec des 1 sur la diagonale de façon que

$$T {}^t Q(\sigma) M(X, F) Q(\sigma) {}^t T = \Delta ,$$

où Δ est la matrice diagonale, de diagonale

$(\psi(x_{\sigma(1)}), \psi(x_{\sigma(2)}), \dots, \psi(x_{\sigma(n)}))$. Cela montre bien le corollaire.

Références

- [B. L. 1] Beslin Scott and Ligh Steve *Another Generalisation of Smith's Determinant* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 40 (1989) p. 413-415
- [B. L. 2] Beslin Scott and Ligh Steve *GCD-closed Sets and the Determinants of GCD Matrices* Fibonacci Q. 30, n° 2, p. 157-160 (1992)
- [B. L. 3] Beslin Scott and Ligh Steve *Greatest Common Divisor Matrices* Linear Algebra and Applications 118 : p. 69-76 (1989)
- [Fr. B.C.D.] Fresnel J *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
- [F. M. 1] Fresnel J. et Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
- [F. M. 2] Fresnel J. et Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Ellipses 2017)
- [Li.] Li Zhongshan *The Determinants of GCD Matrices* Linear Algebra and Applications 134 : p. 137-143 (1990)
- [S.] Smith Henry J. Stephen *On the Value of a Certain Arithmetical Determinant* Proc. London Math. Soc. 7 (1875-1876) p. 208-212

p.250, ex. 89, complément

Généralisation du déterminant de Vandermonde, applications à un théorème de Chebotarëv, au principe d'incertitude, à la majoration de racines d'un polynôme via la transformée de Fourier discrète

0. Introduction

Le déterminant de Vandermonde générique est le déterminant de la matrice $[(X_i)^j]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq r-1}}$ où X_1, X_2, \dots, X_r sont des variables sur \mathbb{Z} . On sait que $V(X_1, X_2, \dots, X_r) := \det([(X_i)^j]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq r-1}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (X_j - X_i)$.

Une généralisation de ce déterminant consiste à considérer des polynômes $P_1(T), P_2(T), \dots, P_r(T) \in A[T]$ où A est un anneau commutatif unitaire et où X_1, X_2, \dots, X_r sont des variables X_1, X_2, \dots, X_r sur A . Alors notre généralisation est $\Delta(X_1, X_2, \dots, X_r) := \det([(P_j(X_i))]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}})$. Alors, on a

$$\Delta(X_1, X_2, \dots, X_r) = V(X_1, X_2, \dots, X_r) \Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r) \text{ avec}$$

$\Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r) \in A[X_1, X_2, \dots, X_r]$. On peut même calculer explicitement $\Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r)$ en fonction des polynômes $P_1(T), P_2(T), \dots, P_r(T)$. La méthode n'est autre chose que la technique de Gauss qui consiste à ajouter à une ligne, un multiple d'une autre ligne.

Ce résultat admet plusieurs corollaires.

Le premier est une formule de Polyá et Szegö qui permet d'évaluer $\Gamma(1, 1, \dots, 1)$ ([P. S.]).

Le deuxième corollaire s'applique aux polynômes $P_i(T) := T^{n_i}$ pour $1 \leq i \leq r$. Là encore on obtient explicitement $\Gamma(1, 1, \dots, 1)$.

Le troisième corollaire est un résultat de Chebotarëv ([S. L.]). On considère $\xi \in \mathbb{C}^\times$ avec $o(\xi) = p$, un nombre premier et $M := [\xi^{ij}]_{\substack{0 \leq i < p \\ 0 \leq j < p}}$. Alors le

résultat est que tous les mineurs de M sont non nuls.

Une dernière application concerne les fonctions $f: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ et leur

transformée de Fourier \hat{f} . Le résultat est que

$\text{card}(\text{supp}(f)) + \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \geq p + 1$, où $\text{supp}(f)$ (resp. $\text{supp}(\hat{f})$) désigne le support de f (resp. \hat{f}). Cet énoncé est souvent appelé le principe d'incertitude.

Une application de ce résultat est la majoration du nombre de racines p -èmes de l'unité qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{C} , non nul et de degré au plus $p-1$.

Théorème 1 Soient A un anneau commutatif, unitaire, X_1, X_2, \dots, X_r des variables sur A . Soient $1 \leq m \leq r$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r$, $k \geq 1$, on définit le polynôme $T_k(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m})$ par

$$T_k(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}) := \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = k}} (X_{i_1})^{\alpha_1} (X_{i_2})^{\alpha_2} \dots (X_{i_m})^{\alpha_m} \text{ et par}$$

convention $T_0(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}) = 1$.

Soient $P_i(X) \in A[X]$ pour $1 \leq i \leq r$, $t := \max_{1 \leq i \leq r} \deg P_i(X)$, et

$$P_i(X) = a_{0,i} + a_{1,i}X + a_{2,i}X^2 + \dots + a_{t,i}X^t.$$

Soient $0 \leq k \leq r-1$ et

$$R_{k,i} := \sum_{\ell=k}^t a_{\ell,i} T_{\ell-k}(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}).$$

Soient maintenant

$$\Delta(X_1, X_2, \dots, X_r) := \det \begin{bmatrix} P_1(X_1) & P_2(X_1) & \dots & P_r(X_1) \\ P_1(X_2) & P_2(X_2) & \dots & P_r(X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_1(X_r) & P_2(X_r) & \dots & P_r(X_r) \end{bmatrix},$$

$$V(X_1, X_2, \dots, X_r) := \prod_{1 \leq i < j \leq r} (X_j - X_i) = \det \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{r-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & X_r & X_r^2 & \dots & X_r^{r-1} \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

$$\Delta(X_1, X_2, \dots, X_r) = V(X_1, X_2, \dots, X_r) \Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

où

$$\Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r) := \det \begin{bmatrix} R_{0,1} & R_{0,2} & \dots & R_{0,r} \\ R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{r-1,1} & R_{r-1,2} & \dots & R_{r-1,r} \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a $\Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r) \in A[X_1, X_2, \dots, X_r]$ et

$$\Gamma(0, 0, \dots, 0) := \det \begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,r} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \dots & a_{r-1,r} \end{bmatrix}.$$

Démonstration

1) Soient $k \geq 1$, $1 \leq s < m$, on a

$$(1) \quad T_k(X_m) - T_k(X_s) = (X_m)^k - (X_s)^k = (X_m - X_s) T_{k-1}(X_s, X_m).$$

Soient $k \geq 1$, $2 \leq s < m$, on a

$$(2) \quad T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_m) - T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s) = (X_m - X_s) T_{k-1}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s, X_m).$$

En effet

$$T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_m) = \sum_{\ell=0}^k T_{k-\ell}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}) (X_m)^\ell,$$

$$T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s) = \sum_{\ell=0}^k T_{k-\ell}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}) (X_s)^\ell.$$

On sait par (1) que

$$(X_m)^\ell - (X_s)^\ell = (X_m - X_s) T_{\ell-1}(X_s, X_m).$$

Ainsi

$$T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_m) - T_k(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s) = (X_m - X_s) \sum_{\ell=0}^k T_{k-\ell}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}) T_{\ell-1}(X_s, X_m).$$

Facilement

$$T_{k-1}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}, X_s, X_m) = \sum_{\ell=0}^k T_{k-\ell}(X_1, X_2, \dots, X_{s-1}) T_{\ell-1}(X_s, X_m).$$

2) Soient $b_0, b_1, \dots, b_t \in A$, $1 < m < r$,

$$U = b_0 + b_1 T_1(X_1) + b_2 T_2(X_1) + \dots + b_t T_t(X_1),$$

$$V = b_0 + b_1 T_1(X_m) + b_2 T_2(X_m) + \dots + b_t T_t(X_m).$$

Il suit de (1) que

$$(3) \quad V - U = (X_m - X_1) (b_1 T_0(X_1, X_m) + b_2 T_1(X_1, X_m) + \dots + b_t T_{t-1}(X_1, X_m)).$$

On suppose que $2 \leq s < m$. Alors il suit de (2) que

$$(4) \quad V - U = (X_m - X_1) (b_1 T_0(X_1, X_2, \dots, X_s, X_m) + b_2 T_1(X_1, X_2, \dots, X_s, X_m) + \dots + b_t T_{t-1}(X_1, X_2, \dots, X_s, X_m)).$$

3) Soient $1 \leq k < j$,

$$Q_{k,j,i} := \sum_{\ell=k}^t a_{\ell,i} T_{\ell-k}(X_1, \dots, X_k, X_j), \text{ on a donc pour } k \geq 1, R_{k,i} = Q_{k,k+1,i}.$$

Soit la matrice

$$M_0 := \begin{bmatrix} P_1(X_1) & P_2(X_1) & \dots & P_r(X_1) \\ P_1(X_2) & P_2(X_2) & \dots & P_r(X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_1(X_r) & P_2(X_r) & \dots & P_r(X_r) \end{bmatrix}.$$

Appelons L_0, L_1, \dots, L_{r-1} les lignes de M_0 . Considérons les opérations L_1 reçoit $L_1 - L_0$, L_2 reçoit $L_2 - L_0, \dots$, L_{r-1} reçoit $L_{r-1} - L_0$.

Soit $j > 1$, on a

$$P_i(X_1) = a_{0,i} + a_{1,i} X_1 + a_{2,i} X_1^2 + \dots + a_{t,i} X_1^t,$$

$$P_i(X_j) = a_{0,i} + a_{1,i} X_j + a_{2,i} X_j^2 + \dots + a_{t,i} X_j^t.$$

Il suit de (1) que

$P_i(X_j) - P_i(X_1) = (X_j - X_1)(a_{1,i} + a_{2,i}T_1(X_1, X_j) + \dots + a_{t,i}T_{t-1}(X_1, X_j))$,
et donc que

$$P_i(X_j) - P_i(X_1) = (X_j - X_1) Q_{1,j,i}.$$

Par ailleurs $P_i(X_1) = R_{0,i}$.

Après cette première étape M_0 devient $(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) \dots (X_r - X_1)M_1$,
avec

$$M_1 := \begin{bmatrix} R_{0,1} & R_{0,2} & \dots & R_{0,r} \\ R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,r} \\ Q_{1,3,1} & Q_{1,3,1} & \dots & Q_{1,3,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1,r,1} & Q_{1,r,1} & \dots & Q_{1,r,r} \end{bmatrix}.$$

Appelons encore L_0, L_1, \dots, L_{r-1} les lignes de M_1 . On effectue maintenant les opérations suivantes : L_3 reçoit $L_3 - L_2$, L_4 reçoit $L_4 - L_2, \dots$, L_{r-1} reçoit $L_{r-1} - L_2$.

On a

$$Q_{1,2,i} = R_{1,i} = \sum_{\ell=1}^t a_{\ell,i} T_{\ell-1}(X_1, X_2)$$

et pour $j \geq 3$

$$Q_{1,j,i} = \sum_{\ell=1}^t a_{\ell,i} T_{\ell-1}(X_1, X_j).$$

Alors (4) dit que

$$Q_{1,j,i} - Q_{1,2,i} = (X_j - X_2)(a_{2,i} + a_{3,i}T_1(X_1, X_2, X_j) + \dots + a_{t,i}T_{t-2}(X_1, X_2, X_j)).$$

Ainsi

$$Q_{1,j,i} - Q_{1,2,i} = (X_j - X_2) Q_{2,j,i}.$$

Après ces opérations M_1 devient

$(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) \dots (X_r - X_1)(X_3 - X_2)(X_4 - X_2) \dots (X_r - X_2)M_2$, avec

$$M_2 := \begin{bmatrix} R_{0,1} & R_{0,2} & \dots & R_{0,r} \\ R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,r} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \dots & R_{2,r} \\ Q_{2,4,1} & Q_{2,4,2} & \dots & Q_{2,4,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{2,r,1} & Q_{2,r,2} & \dots & Q_{2,r,r} \end{bmatrix}.$$

Alors le lecteur voit comment continuer en appliquant la formule (4).

Remarque Le fait que $\Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r) \in A[X_1, X_2, \dots, X_r]$ peut se montrer assez facilement.

1. On considère d'abord le cas où $A=B$ avec B factoriel et où X_1, X_2, \dots, X_r sont des variables sur B .

Soient $P_{1,i}(Z) \in B[Z]$ pour $1 \leq i \leq r$,

$$\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r) := \det \begin{bmatrix} P_1(X_1) & P_2(X_1) & \dots & P_r(X_1) \\ P_1(X_2) & P_2(X_2) & \dots & P_r(X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_1(X_r) & P_2(X_r) & \dots & P_r(X_r) \end{bmatrix},$$

Il faut montrer que $(X_j - X_i)$ divise $\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$. Soit $\rho: B[X_1, X_2, \dots, X_r] \rightarrow B[X_2, X_3, \dots, X_r]$ défini par $\rho(X_i) = X_i$ si $i \geq 2$ et $\rho(X_1) = X_2$. Facilement $\rho(\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)) = 0$ et $\rho(U) = U$ si $U \in B[X_2, X_3, \dots, X_r]$. Par division euclidienne de $\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$ par le polynôme unitaire $X_1 - X_2$ en X_1 , on a

$$(5) \quad \Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r) = (X_1 - X_2) Q(X) + R(X)$$

où $Q(X) \in B[X_1, X_2, \dots, X_r]$ et $R(X) \in B[X_2, X_3, \dots, X_r]$. En appliquant ρ à l'égalité (5), on obtient $0 = R(X)$ et comme $\rho(R) = R$, on a bien $X_1 - X_2$ qui divise $\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

De la même façon, si $i \neq j$, on a $X_i - X_j$ qui divise $\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

Clairement pour $i < j$, les $X_i - X_j$ sont des irréductibles non associés de l'anneau factoriel $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$. Il suit donc de cela que l'image canonique de $V(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$, notée $V_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$, divise $\Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans $B[X_1, X_2, \dots, X_r]$, ce qui veut dire que

$$(6) \quad \Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_r) = V_1(X_1, X_2, \dots, X_r) \Gamma_1(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

avec $\Gamma_1(X_1, X_2, \dots, X_r) \in B[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

2. On considère maintenant le cas où A est un anneau commutatif unitaire quelconque.

Soient $A_{j,i}, X_k, 1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq r$ des variables sur \mathbb{Z} ; soit $B := \mathbb{Z}[\{A_{j,i}, X_k \mid 1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq r\}]$. Soient $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow A$

l'homomorphisme canonique et $\psi: B \rightarrow A$ défini par $\psi(A_{j,i}) := a_{j,i}$, $\psi(z) := \varphi(z)$ si $z \in \mathbb{Z}$. Alors en appliquant ψ à la relation (6), on obtient

$$(7) \quad \Delta(X_1, X_2, \dots, X_r) = V(X_1, X_2, \dots, X_r) \psi(\Gamma_1(X_1, X_2, \dots, X_r))$$

où $\psi(\Gamma_1(X_1, X_2, \dots, X_r)) \in A[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

Cela veut bien dire que $V(X_1, X_2, \dots, X_r)$ divise $\Delta(X_1, X_2, \dots, X_r)$ dans l'anneau $A[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

Si l'on sait que $V(X_1, X_2, \dots, X_r)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $A[X_1, X_2, \dots, X_r]$, on peut en conclure que

$$\psi(\Gamma_1(X_1, X_2, \dots, X_r)) = \Gamma(X_1, X_2, \dots, X_r).$$

3. Montrons que $V(X_1, X_2, \dots, X_r)$ ne divise pas zéro dans $A[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

Si $0 = (X_2 - X_1)(a_0 X_1^0 X_2^n) + a_1 X_1^1 X_2^{n-1} + \dots + a_n X_1^n X_2^0$ avec

$a_k \in A[X_3, X_4, \dots, X_r]$. Il suit de cela que

$$(8) \quad 0 = a_0 X_2^{n+1} + (a_1 - a_0)(X_1^1 X_2^n) + \dots + (a_n - a_{n-1})(X_1^n X_2^1) - a_n X_1^{n+1},$$

ainsi $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Donc $(X_2 - X_1)$ ne divise pas zéro, de la même façon $(X_j - X_i)$ ne divise pas zéro pour $j > i$, ce qui montre que $V(X_1, X_2, \dots, X_r)$ ne divise pas zéro dans $A[X_1, X_2, \dots, X_r]$.

Application à une formule de Polyá et Szegö ([P. S.]

Corollaire 1 Soient A un anneau commutatif, unitaire, $r \geq 1$, T_1, T_2, \dots, T_r des variables sur A , $R_i(Z) \in A[Z]$ pour $0 \leq i \leq r-1$. Soit

$$\Delta(T_1, T_2, \dots, T_r) := \det \begin{bmatrix} R_1(T_1) & R_2(T_1) & \dots & R_r(T_1) \\ R_1(T_2) & R_2(T_2) & \dots & R_r(T_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_1(T_r) & R_2(T_r) & \dots & R_r(T_r) \end{bmatrix}.$$

Alors on a

$$\Delta(T_1, T_2, \dots, T_r) = V(T_1, T_2, \dots, T_r) F(T_1, T_2, \dots, T_r)$$

avec

$$V(T_1, T_2, \dots, T_r) := \prod_{1 \leq i < j \leq r} (T_j - T_i) = \det \begin{bmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 & \dots & T_1^{r-1} \\ 1 & T_2 & T_2^2 & \dots & T_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & T_r & T_r^2 & \dots & T_r^{r-1} \end{bmatrix},$$

et

$$F(T_1, T_2, \dots, T_r) \in A[T_1, T_2, \dots, T_r].$$

Si $R_i(1+X_i) := a_{0,i} + a_{1,i}X_i + a_{2,i}X_i^2 + \dots + a_{t,i}X_i^t$, alors on a

$$F(1, 1, \dots, 1) := \det \begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,r} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \dots & a_{r-1,r} \end{bmatrix}.$$

Remarque Si A est de caractéristique nulle, on a $(a_{k,i}) k! = R_i^{(k)}(1)$ où $R_i^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème de R_i .

Corollaire 2 Soient A un anneau commutatif, unitaire, $r \geq 1$, T_1, T_2, \dots, T_r des variables sur A , $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$ des entiers. Soient

$$\Delta(T_1, T_2, \dots, T_r) = \det \begin{bmatrix} T_1^{m_1} & T_1^{m_2} & \dots & T_1^{m_r} \\ T_2^{m_1} & T_2^{m_2} & \dots & T_2^{m_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_r^{m_1} & T_r^{m_2} & \dots & T_r^{m_r} \end{bmatrix},$$

$$V(T_1, T_2, \dots, T_r) := \prod_{1 \leq i < j \leq r} (T_j - T_i) = \det \begin{bmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 & \dots & T_1^{r-1} \\ 1 & T_2 & T_2^2 & \dots & T_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & T_r & T_r^2 & \dots & T_r^{r-1} \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

$$\Delta(T_1, T_2, \dots, T_r) = V(T_1, T_2, \dots, T_r) F(T_1, T_2, \dots, T_r) .$$

Et comme $(1 + X_j)^{m_i} = 1 + \binom{m_i}{1} X_j + \binom{m_i}{2} X_j^2 + \dots + \binom{m_i}{m_i} X_j^{m_i}$, il suit du corollaire 1 que

$$F(1, 1, \dots, 1) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{m_1}{1} & \binom{m_2}{1} & \dots & \binom{m_r}{1} \\ \binom{m_1}{2} & \binom{m_2}{2} & \dots & \binom{m_r}{2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{m_1}{r-1} & \binom{m_2}{r-1} & \dots & \binom{m_r}{r-1} \end{bmatrix} .$$

Si $\text{car} A = 0$, on a

$$1! 2! \dots (r-1)! F(1, 1, \dots, 1) = V(m_1, m_2, \dots, m_r) .$$

Corollaire 3 (Chebotarëv) Soit p un nombre premier. Soient des entiers avec $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r < p$ et $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r < p$. Soit $\xi \in \mathbb{C}^\times$ avec $o(\xi) = p$. Alors

$$\det[\xi^{n_i m_j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}} \neq 0 .$$

Démonstration

Soit $\varphi : \mathbb{Z}[T_1, T_2, \dots, T_r] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ l'unique homomorphisme défini par $\varphi(T_i) := T^{n_i}$. Soient $\Delta_1(T) := \varphi(\Delta(T_1, T_2, \dots, T_r)) = \det[T^{n_i m_j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$,

$$V_1(T) := \varphi(V(T_1, T_2, \dots, T_r)) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (T^{n_j} - T^{n_i}) ,$$

$$F_1(T) := \varphi(F(T_1, T_2, \dots, T_r)) = F(T^{n_1}, T^{n_2}, \dots, T^{n_r}) .$$

Il s'agit donc de montrer que $\Delta_1(\xi) \neq 0$.

Supposons le contraire, i.e. $\Delta_1(\xi) = 0$. Il suit donc du corollaire 2 que

$$\Delta_1(T) = V_1(T) F_1(T) \text{ et donc que } 0 = V_1(\xi) F_1(\xi) . \text{ Or}$$

$$V_1(\xi) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\xi^{n_j} - \xi^{n_i}) , \text{ sachant que } o(\xi) = p \text{ et que}$$

$0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r < p$, on a $V_1(\xi) \neq 0$; il suit de cela que $F_1(\xi) = 0$. Soit

$\Phi_p(T) := 1 + T + \dots + T^{p-1}$, on sait que $\Phi_p(T)$ est le générateur unitaire de l'idéal des polynôme de $\mathbb{Z}[T]$ qui s'annulent en ξ ([F. 2] ex. 7.9.6 p. 280). Il existe donc $A(T) \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $F_1(T) = A(T) \Phi_p(T)$; en particulier

$F_1(1) = A(1) \Phi_p(1)$, ce qui montre que $F_1(1) \in p\mathbb{Z}$. Or il suit du corollaire 2 que $1! 2! \dots (r-1)! F(1, 1, \dots, 1) = V(m_1, m_2, \dots, m_r)$; i.e.

$$1! 2! \dots (r-1)! F_1(1) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (m_j - m_i) . \text{ Sachant que } r < p \text{ et que}$$

$0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r < p$, on déduit que $F_1(1) \notin p\mathbb{Z}$; ce qui donne une contradiction.

Remarque On suit là, essentiellement la démonstration de Dieudonné ([D.]). On notera que ce dernier ne savait pas que le résultat était déjà connu de Chebotarëv.

Sur la transformée de Fourier discrète

Définition et notation Soient p un nombre premier, $\xi \in \mathbb{C}^\times$ avec $o(\xi) = p$, $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ la surjection canonique. Alors l'application $u: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $u(z) := \xi^z$, induit une application $v: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $u = v\rho$. Pour simplifier les notations, on notera $v(x)$ par ξ^x .

Soient $f: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{f}: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$, défini par $\hat{f}(y) := \sum_{x \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}} f(x) \xi^{xy}$. Alors \hat{f}

s'appelle la transformée de Fourier discrète de f .

Corollaire 4 Soient p un nombre premier, A et B deux parties non vides de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ avec $\text{card}(A) = \text{card}(B)$. Soient \mathbb{C}^A (resp. \mathbb{C}^B) le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications de A (resp. B) dans \mathbb{C} , $\theta: \mathbb{C}^A \rightarrow \mathbb{C}^B$ défini pour $y \in B$ par $\theta(f)(y) = \sum_{x \in A} f(x) \xi^{xy}$. Alors θ est une bijection \mathbb{C} -linéaire de \mathbb{C}^A sur \mathbb{C}^B .

Démonstration

On a $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$. Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ (resp. $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$) les éléments de \mathbb{C}^A (resp. \mathbb{C}^B) définis par $u_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (resp. $v_i(b_j) = \delta_{i,j}$) pour $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq s$, i.e. u_i (resp. v_j) est la fonction caractéristique de $\{a_i\}$ (resp. $\{b_j\}$). On a donc

$$\theta(u_i)(b_j) = \sum_{x \in A} u_i(x) \xi^{xb_j},$$

soit donc

$$\theta(u_i)(b_j) = u_i(a_i) \xi^{a_i b_j} = \xi^{a_i b_j} v_j(b_j).$$

Ce qui veut dire que

$$\theta(u_i) = \sum_{j=1}^s \xi^{a_i b_j} v_j.$$

Il suit de cela que $\text{Mat}(\theta; u_i, v_j) = [\xi^{a_i b_j}]_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}}$. Or il suit du corollaire 3 que

$\det [\xi^{a_i b_j}]_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \neq 0$; ce qui montre que θ est bijectif.

Théorème 2 (le principe d'incertitude) Soient p un nombre premier
 $f: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction non nulle, \hat{f} sa transformée de Fourier discrète. Alors

$$\text{card}(\text{supp}(f)) + \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \geq p + 1,$$

où $\text{supp}(f) := \{x \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \mid f(x) \neq 0\}$ (resp. $\text{supp}(\hat{f}) := \{y \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(y) \neq 0\}$).

Réciproquement, soient A et B deux parties non vides de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ avec

$\text{card}A + \text{card}B \geq p + 1$. alors il existe $f: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction non nulle, telle que $\text{supp}(f) = A$ et $\text{supp}(\hat{f}) = B$.

Démonstration

1) Supposons que $f \neq 0$ et $\text{card}(\text{supp}(f)) + \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \leq p$.

Soit donc $A := \text{supp}(f)$, il existe donc une partie B de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ avec

$B \cap \text{supp}(\hat{f}) = \emptyset$ et $\text{card}A = \text{card}B$. Si donc $\theta: \mathbb{C}^A \rightarrow \mathbb{C}^B$ est l'application défini par le corollaire 4, on a $\theta(f|_A) = 0$ et donc $f|_A = 0$, ce qui contredit $A := \text{supp}(f)$.

2) Montrons la réciproque.

2.1) On suppose la réciproque montrée pour les parties A, B avec $\text{card}A + \text{card}B = p + 1$.

Supposons maintenant que $\text{card}A + \text{card}B > p + 1$. Soit

$$\Theta := \{(A', B') \mid A' \subset A, B' \subset B, A' \neq \emptyset, B' \neq \emptyset \text{ et } \text{card}A' + \text{card}B' = p + 1\}.$$

Si donc $\theta = (A', B') \in \Theta$, il existe $f_\theta: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\text{supp}(f_\theta) = A'$ et $\text{supp}(\hat{f}_\theta) = B'$.

(1) En particulier, on a $f_\theta(a) \neq 0$ si $a \in A'$, $f_\theta(a) = 0$ si $a \notin A'$; de même $\hat{f}_\theta(b) \neq 0$ si $b \in B'$ et $\hat{f}_\theta(b) = 0$ si $b \notin B'$.

$$\text{Soit } a \in A \text{ et } G_a := \{\lambda \in \mathbb{C}^\Theta \mid \sum_{\theta \in \Theta} \lambda(\theta) f_\theta(a) = 0\}.$$

Il existe $\theta = (A', B')$ avec $a \in A'$, ainsi $f_\theta(a) \neq 0$; cela montre que G_a est un hyperplan de \mathbb{C}^Θ .

Soit $b \in B$ et $H_b := \{\lambda \in \mathbb{C}^\Theta \mid \sum_{\theta \in \Theta} \lambda(\theta) \hat{f}_\theta(b) = 0\}$. De même H_b est un

hyperplan de \mathbb{C}^Θ . On sait alors que $(\bigcup_{a \in A} G_a) \cup (\bigcup_{b \in B} H_b) \neq \mathbb{C}^\Theta$ ([F. 1] ex.

1.4.3. p. 77).

Soit donc $\mu \in \mathbb{C}^\Theta$ et $\mu \notin (\bigcup_{a \in A} G_a) \cup (\bigcup_{b \in B} H_b)$.

Soient $f := \sum_{\theta \in \Theta} \mu(\theta) f_\theta$, on a alors $\hat{f} := \sum_{\theta \in \Theta} \mu(\theta) \hat{f}_\theta$.

Il suit du choix de μ que $f(a) \neq 0$ pour tout $a \in A$ et que $\hat{f}(b) \neq 0$ pour tout $b \in B$. Ensuite, il suit de (1) que $f(a) = 0$ si $a \notin A$ et que $\hat{f}(b) = 0$ si $b \notin B$.

Alors on a bien $\text{supp}(f) = A$ et $\text{supp}(\hat{f}) = B$.

2.2) On suppose que $\text{card}A + \text{card}B = p + 1$.

On peut trouver une partie C de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ telle que

$$(2) \quad \{c\} = B \cap C \text{ et } \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = B \cup (C - \{c\}) .$$

Soit $\theta: \mathbb{C}^A \rightarrow \mathbb{C}^C$ défini par $\theta(g)(y) := \sum_{a \in A} g(a) \xi^{xy}$ avec $y \in C$.

Par le corollaire 4, on sait que θ est surjectif, il existe donc $g \in \mathbb{C}^A$ avec $\theta(g)$ qui est la fonction caractéristique de $\{c\}$, i.e. $\theta(g)(y) = 0$ si $y \in C - \{c\}$ et $\theta(g)(c) = 1$.

Soit $f: \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $f(x) = g(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

(3) Facilement, on a $\theta(g)(y) = \hat{f}(y)$ si $y \in C$. Il suit de la définition de f que $\text{supp}(f) \subset A$ et de (2) et (3) que $\text{supp}(\hat{f}) \subset B$.

Comme par 1) on a $\text{card}(\text{supp}(f)) + \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \geq p + 1$, il suit que $\text{supp}(f) = A$ et $\text{supp}(\hat{f}) = B$.

Corollaire 5 Soit p un nombre premier et soit le polynôme $P(X) = \sum_{j=0}^k c_j X^{n_j}$ avec $c_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k < p$. Alors

$$\text{card} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1 \text{ et } P(z) = 0 \} \leq k .$$

Démonstration

Soit toujours $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ la surjection canonique. Soit $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $f(\rho(n_j)) := c_j$ pour $0 \leq j \leq k$ et $f(x) = 0$ pour

$x \in \{\rho(0), \rho(1), \dots, \rho(p-1)\} - \{\rho(n_0), \rho(n_1), \dots, \rho(n_k)\}$. Sachant que $c_j \neq 0$, on a $\text{card}(\text{supp}(f)) = k - 1$. Il suit de la définition de \hat{f} que pour $y \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

on a $\hat{f}(y) = \sum_{x \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}} \sum_{j=0}^k f(x) (\xi^x)^y$ avec la convention que ξ^x signifie ξ^z si

$\rho(z) = x$. Compte tenu de la définition de f on a

$$\hat{f}(y) = \sum_{j=0}^k c_j \xi^{(n_j)y} = P(\xi^y) .$$

En conséquence $y \notin \text{supp}(\hat{f})$ si et seulement si $P(\xi^y) = 0$. Ainsi

$$\text{card}(\text{supp}(\hat{f})) = p - \text{card} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1 \text{ et } P(z) = 0 \} .$$

Sachant par le théorème 2 que

$$\text{card}(\text{supp}(f)) + \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \geq p + 1 ,$$

on déduit que

$$(4) \quad p - \text{card}(\text{supp}(\hat{f})) \leq k .$$

ce qui veut bien dire que

$$\text{card} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1 \text{ et } P(z) = 0 \} \leq k .$$

Facilement le corollaire 5 est équivalent au corollaire 6, ci-après.

Corollaire 6 Soient p un nombre premier, k un entier avec $1 \leq k < p$. Soient $P(X) \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ un polynôme avec $P(X) = v_0 + v_1X + \dots + v_{p-1}X^{p-1}$. Alors $\text{card} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1 \text{ et } P(z) = 0 \} \leq \text{card} \{ j \in \mathbb{N} \mid 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } v_j \neq 0 \} - 1$.

Remarque Il s'agit de savoir si l'inégalité du corollaire 5 ou 6 est optimale. La réponse est oui.

Soient les entiers $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k < p$ avec $1 \leq k \leq p-1$ et

$P(X) := (X - \xi^{a_1})(X - \xi^{a_2}) \dots (X - \xi^{a_k})$ où $\xi \in \mathbb{C}^x$ avec $o(\xi) = p$.

Clairement, on a $\text{card} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1 \text{ et } P(z) = 0 \} = k$

Par ailleurs degré $P(X) = k$, si donc $P(X) = v_0 + v_1X + \dots + v_{p-1}X^{p-1}$, on a

$$\text{card} \{ j \in \mathbb{N} \mid 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } v_j \neq 0 \} \leq k + 1 .$$

Il suit alors du corollaire 6 que

$$k \leq \text{card} \{ j \in \mathbb{N} \mid 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } v_j \neq 0 \} - 1 ,$$

ce qui veut dire que

$$v_0 \neq 0, v_1 \neq 0, \dots, v_k \neq 0 .$$

Ainsi l'inégalité du corollaire 5 ou 6 est optimale pour ce polynôme $P(X)$.

Bibliographie

[D.] Dieudonné J. *Une propriété des racines de l'unité* Collection of articles dedicated to Alberto González on his sixty-fifth birthday. Rev. Un. Mat. Argentina 25 (1970/71), 1-3

[E. I.] Evans R. J. Isaacs J. M. *Generalized Vandermonde determinants and roots of unity of prime order* Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976) 51-54

[F.] Frenkel P. *Simple proof of Chebotarev's theorem on roots of unity*, preprint AC/0312398v3

[F. 1] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)

[F. 2] Fresnel J. *Anneaux* (Hermann 2001)

[H.] Heineman E. R. *Generalized Vandermonde determinants* Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929) n° 3, 464-476

[P. S.] Polyá G. , Szegő G. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vol. 2 p. 56 et 240*
(Berlin (Springer), 1925)

[S. L.] Stevenhagen P. , Lenstra H. W. *Chebotařev and his density theorem* Math.
Intelligencer 18 (1996) n° 2 26-37

[T.] Tao T. *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order* Mathematical
Research Letter 12. 121-127 (2005)

p. 252 , ligne 4 lire (ex. 87 p. 245 partie 1)

p. 258 , ligne 3 lire l'ensemble des idempotents de B .

p. 278 , ligne 15

Montrer que $(d_1!)(d_2!)$ divise $(d_1+d_2)!$ (remarquer que $\frac{(d_1+d_2)!}{(d_1!)(d_2!)}$ n'est

p. 279 , ligne -6

$R(X) := P(z - \lambda X) \in M[X]$, on a donc $R(y) = P(x) = 0$. Montrons que

p. 279 , ligne-2

On a donc $1 = E(X)A(X) + F(X)B(X)$, $Q(X) = S(X)E(X)$,

p. 282 , ligne 2

impair, $p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$, $u \geq 0, 1 \geq v_i \geq 0$, $M := \mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$. Alors les

p.284 , il faut remplacer les lignes 10 à 20 de 2.3) par ce qui suit.

On suppose i) satisfait. On a donc $n=2^u p_1 p_2 \dots p_s$ avec $p_i=1+2^{\beta_i}$, si p_i est un premier impair. Il s'agit donc de montrer que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$ est contenu dans une tour quadratique (réelle).

1) De la formule $\cos(\alpha)^2 - \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2} = 0$, on déduit facilement par récurrence sur u que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{2^u})]$ est une tour quadratique et de la formule $(\sin(\frac{2\pi}{2^u}))^2 = 1 - (\cos(\frac{2\pi}{2^u}))^2$, que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{2^u}), \sin(\frac{2\pi}{2^u})]$ est une tour quadratique.

2) Si $p_i=1+2^{\beta_i}$, on sait que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{p_i})]$ est une tour quadratique (c'est la partie 2.2. du même exercice). Sachant que $(\sin(\frac{2\pi}{p_i}))^2 = 1 - (\cos(\frac{2\pi}{p_i}))^2$, il suit que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{p_i}), \sin(\frac{2\pi}{p_i})]$ est une tour quadratique.

3) Facilement $\text{pgcd}(\frac{n}{2^u}, \frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, \dots, \frac{n}{p_s}) = 1$, alors il suit Bézout qu'il existe des entiers $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s$ avec $1 = a_0 \frac{n}{2^u} + a_1 \frac{n}{p_1} + a_2 \frac{n}{p_2} + \dots + a_s \frac{n}{p_s}$. Ce qui veut dire que $\frac{2\pi}{n} = a_0 \frac{2\pi}{2^u} + a_1 \frac{2\pi}{p_1} + a_2 \frac{2\pi}{p_2} + \dots + a_s \frac{2\pi}{p_s}$. Il suit des formules trigonométriques que $\cos(\frac{2\pi}{n})$ (resp. $\sin(\frac{2\pi}{n})$) est une forme polynomiale en $\cos(\frac{2\pi}{2^u}), \cos(\frac{2\pi}{p_1}), \cos(\frac{2\pi}{p_2}), \dots, \cos(\frac{2\pi}{p_s})$, et aussi en $\sin(\frac{2\pi}{2^u}), \sin(\frac{2\pi}{p_1}), \sin(\frac{2\pi}{p_2}), \dots, \sin(\frac{2\pi}{p_s})$. Par suite $\cos(\frac{2\pi}{n})$ et $\sin(\frac{2\pi}{n})$ appartiennent au compositum des tours quadratiques définies en 1) et 2). Sachant qu'un compositum de tours quadratiques est une tour

quadratique, il suit que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$ est contenu dans une tour quadratique ; ce qui est ii).

p. 318 , ligne -9

2) Montrons 2. Soient $f := \sum_{n \geq 0} u_n X^n$, $g := \sum_{n \geq 0} v_n X^n$, on a donc

p. 319 , ligne-9

Démonstration Soit $f := \sum_{n \geq 0} u_n X^n$, on a donc $P(X) = 1 + p_1 X + \dots + p_m X^m$

p. 329 , ligne 9 lire $a_i = (-1)^i s_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

p. 349 , ligne 7 lire $0 \leq i \leq d$,
ligne 13 lire $0 \leq i \leq d$

p. 436 , ligne 9
peut supposer que $0 \in I$, $1 \in J$. Sachant que $a_i - o = d e + w_i$ avec $w_i \in W$