le 02/02/2022, Compléments et errata à

Algèbre et géométrie

81 thèmes pour l'Agrégation de mathématiques

Jean Fresnel & Michel Matignon

p. 44, ligne 8, remplacer cette ligne par la suivante.

sance du stabilisateur de $DQ(\sigma)$ *dans les cas de la décomposition* $LDQ(\sigma)U$ *que le stabilisa-*

p. 80, paragraphe I.8.

1. Actualité des résultats sur $\mathbb{R}$

Si V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $V-\{0\}\subset G\ell_n(\mathbb{R})$, alors on sait que le maximum possible pour la dimension de V est le nombre de Hurwitz-Radon défini comme il suit.

Si $n=2^{4a+b}(2m+1)$ avec a,b,m entiers $a\geq 0$, $0\leq b\leq 3$, alors

$$\rho(n):=8a+2^b .$$

L'existence de sous-espaces vectoriels V de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $V-\{0\}\subset G\ell_n(\mathbb{R})$, est associé à l'existence d'algèbres de Clifford qui sont des algèbres d'endomorphismes d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, i.e. les réels, les complexes, les quaternions. Si bien qu'on obtient des dimensions un peu supérieures à celles obtenues en 4. à 11. ([P] p. 272 à 273).

Pour une construction plus élémentaire de ces espaces vectoriels, on peut consulter [A. T.] .

Le problème de la borne maximum de la dimension des espaces vectoriels V a été résolu en 1962 par un article de **J. F. Adams** concernant les champs de vecteurs tangents à la sphère ([A]).

[A] **Adams J. F.** *Vector fields on spheres* Annals of Math. 75 (1962) 603-632
[A. T.] **Antetomaso R. & Tissier A.** *Quel est le maxumum de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbb{R})$ dont tout élément non nul est inversible ?*, RMS 127-4 (2016-2017) 11-15
[P] **Porteous I. R.** *Topological Geometry* 1969 Van Nostrand Reinhold company
[A. T.] **Antetomaso R. & Tissier A.** *Quel est le maxumum de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbb{R})$ dont tout élément non nul est inversible ?*, RMS 127-4 (2016-2017) 11-15
[P] **Porteous I. R.** *Topological Geometry* 1969 Van Nostrand Reinhold company

2. Une question plus générale

Soient K un corps commutatif, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$, V est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que tout élément de $V - \{0\}$ est de rang supérieur ou égal à k . Alors que peut-on dire de la dimension de V ?

Facilement, on a $\dim V \leq n(n-k+1)$.

En effet, soit $\rho : V \to M_{n-k+1,n}(K)$ définie par

$$\rho([m_{i,j}]) := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdot & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,1} & \cdot & m_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-k+1,1} & \cdot & \cdot & m_{n-k+1,n} \end{bmatrix}$$

. Si on avait $\dim V > n(n-k+1)$, on aurait alors $\ker \rho \neq \{0\}$; cela veut dire que V contiendrait une matrice non nulle de rang strictement plus petit que k , ce qui est une contradiction.

Remarque 1. On peut considérer le même type de questions en remplaçant sous-espace vectoriel V de $M_n(K)$ par sous-espace vectoriel V de $M_{n,p}(K)$.

Remarque 2. On peut considérer le même type de questions en remplaçant sous-espace vectoriel V par sous-espace affine E de $M_n(K)$.
Dans ce cas les résultats sont plus simples parce qu'ils ne dépendent pas essentiellement de la nature du corps commutatif K (voir [S]).

[S] **de Seguins Pazzis C.** *Large affine spaces of matrices with rank bounded below* Linear Algebra Appl. 437 (2012) 499-512

p. 121 complément à III.1.

Les sous-groupes de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

Définition Dans tout ce complément *groupe cyclique* signifie groupe engendré par un élément d'ordre fini.

I. Le groupe $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

Proposition 0 *Soient* $\rho:\mathbb{Q}\to\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *la surjection canonique,* $a\geq 1$ *un entier. Alors* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *contient un unique sous-groupe d'ordre* a *, c'est* $\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$*; il est cyclique engendré par* $\rho(\frac{1}{a})$.

Démonstration
Il est immédiat que $\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$ est un sous-groupe cyclique de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ engendré par $\rho(\frac{1}{a})$. Soient maintenant un sous-groupe G de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, avec $o(G)=a$. Soit donc $\rho(x)\in G$ avec $x\in\mathbb{Q}$, on a $a\rho(x)=\rho(0)$, ce qui veut dire que $a\,x\in\mathbb{Z}$, ainsi $x\in\frac{1}{a}\mathbb{Z}$. Il suit de cela que $\rho(x)\in\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$, donc $G\subset\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$ et comme $o(G)=o(\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z}))$, on a bien $G=\rho(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$.

Proposition 1 *Soit* G *un groupe abélien (noté additivement). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
$i)$ *Le groupe* G *est de torsion* (i.e. *tout élément de* G *est d'ordre fini*) *et tout sous-groupe fini de* G *est cyclique,*
$ii)$ *Le groupe* G *est une réunion croissante de sous-groupes cycliques,* i.e. *il existe une suite* $(G_m)_{m\geq 1}$ *de sous-groupes cycliques avec* $G_m \subset G_{m+1}$ *pour tout* $m \geq 1$ *et* $G = \bigcup_{m\geq 1} G_m$,
$iii)$ *le groupe* G *est isomorphe à un sous-groupe de* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

Démonstration
1) Montrons $ii)$ implique $i)$.
Comme $G = \bigcup_{m\geq 1} G_m$, il suit que tout élément de G est d'ordre fini.
Soit K un sous-groupe fini de G . Comme $G = \bigcup_{m\geq 1} G_m$ et que la réunion est croissante, il existe m avec $K \subset G_m$, sachant que G_m est cyclique, il suit que K est cyclique. Ainsi $i)$ est satisfait.

2) Montrons $i)$ implique $ii)$.
Soient $m \geq 1$ et $G_m := \{x \in G \mid o(x) \mid m!\}$. Facilement G_m est un sous-groupe de G . Soit $y \in G_m$ d'ordre maximum, il s'agit de montrer que G_m est engendré par y ; soit $d := o(y)$. Soit donc $y\mathbb{Z}$ le sous-groupe de G_m engendré par y et $\rho : G_m \to \frac{G_m}{y\mathbb{Z}}$ la surjection canonique. Soit $x \in G_m$, soit $d_1 := o(x)$, $d_2 := o(\rho(x))$; on a donc $d_1 \leq d$ et $d_2 \mid d_1$. Par ailleurs, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $d_2 x = \alpha y$.
Par le lemme 3 , ci-après, on sait qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $o(ux + vy) = \mathrm{ppcm}(o(x), o(y)) = \mathrm{ppcm}(d_1, d)$. Or $\mathrm{ppcm}(o(x), o(y)) \mid m!$, ainsi $ux + vy \in G_m$. Par définition de y , on a $\mathrm{ppcm}(d_1, d) \leq d$, ce qui montre que $d_1 \mid d$.

Montrons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $d_2(x+\lambda y)=0$, i.e. $\alpha y+d_2\lambda y=0$. Il suffit donc de trouver $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha+d_2\lambda=0$. On a les relations $d_2 x=\alpha y$ et $d_1 x=0$; ainsi $\frac{d_1}{d_2}(d_2 x)=0$, i.e. $\frac{d_1}{d_2}(\alpha y)=0$ ce qui veut dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{d_1}{d_2}\alpha=\theta d$. Ainsi $\alpha=d_2(\frac{d}{d_1})\theta$, il suit de cela que $\alpha+d_2\lambda = d_2(\frac{d}{d_1}\theta+\lambda)$. Il suffit de choisir $\lambda=-\frac{d}{d_1}\theta$.
Soit $z=x-\frac{d}{d_1}\theta y$, on a $d_2 z=0$, $\rho(z)=\rho(x)$ et $o(\rho(x))=d_2$, il suit de cela que $o(z)=d_2$. On a alors $\mathbb{Z}y+\mathbb{Z}z=\mathbb{Z}y\oplus\mathbb{Z}z$, en effet si $\lambda y+\mu z=0$, en appliquant ρ on a $\mu\rho(z)=0$ et donc $d_2 \mid \mu$, comme $o(z)=d_2$, il suit que $\mu z=0$ et donc aussi $\lambda y=0$. Ainsi le groupe $\mathbb{Z}y\oplus\mathbb{Z}z$ est d'ordre $d d_2$; par ailleurs il suit de *i*) que le groupe $\mathbb{Z}y\oplus\mathbb{Z}z$ est cyclique, ainsi il contient un élément d'ordre $d d_2$. Sachant que d est le maximum des ordres des éléments de G_m , il suit que $d_2=1$ et donc $x\in y\mathbb{Z}$.
On a donc montré que G_m est cyclique. Facilement $G_m\subset G_{m+1}$ et $G=\bigcup_{m\geq 1} G_m$. Ce qui est *ii*).

3) On suppose *ii*) satisfait, il s'agit de montrer *iii*).
3.1) Ainsi il existe une famille de sous-groupes cycliques $(G_m)_{m\geq 1}$ avec $o(G_m)=d_m$ et $G_m\subset G_{m+1}$ pour tout $m\geq 1$.
Il suit du lemme 2 ci-après, par récurrence sur m qu'il existe une suite $(x_m)_m$ avec x_m est génétateur de G_m et $\frac{d_{m+1}}{d_m}x_{m+1}=x_m$ pour tout $m\geq 1$.
3.2) Soit $m\geq 1$ et soit le diagramme ci-contre où $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ est défini par $u(z):=\frac{z}{d_m}$, $t:\mathbb{Z}\to G_m$ esr défini par $t(z)=z\,x_m$ et enfin $s:\mathbb{Q}\to\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ est la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "t"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, "s"] \\ G_m \arrow[r, "f_m"] & \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

Facilement, on a $\ker s\,u = \ker t = d_m \mathbb{Z}$; ainsi il existe un homomorphisme injectif $f_m : G_m \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ tel que $f_m\, t = s\,u$, ainsi $f_m(z\,x_m) = s(\frac{z}{d_m})$.

Facilement $f_{m+1}|_{G_m} = f_m$ et de façon plus générale, si $m' \geq m$, on a $f_{m'}|_{G_m} = f_m$.

3.3) Alors 3.2) montre qu'il existe un unique homomorphisme $f : G \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ tel que $f|_{G_m} = f_m$ pour tout $m \geq 1$.

Ce qui est *iii*).

4) Montrons *iii*) implique *ii*).

4.1) Montrons d'abord que $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ est réunion croissante de sous-groupes cycliques.

Soient $m \geq 1$, $L_m := s(\frac{1}{m!}\mathbb{Z})$; facilement L_m est cyclique d'ordre $m!$, engendré par $s(\frac{1}{m!})$. Tout aussi facilement on a $L_m \subset L_{m+1}$ pour tout $m \geq 1$ et $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigcup_{m \geq 1} L_m$.

4.2) Soient maintenant H un sous-groupe de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ et $H_m := H \cap L_m$, alors H_m est cyclique et $H = \bigcup_{m \geq 1} H_m$.

Si donc G est isomorphe à H , il suit bien que G est une réunion croissante de sous-groupes cycliques de G , ce qui veut dire que *ii*) est satisfait.

2. Sur la décomposition en *p*-composantes des sous-groupes de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

Proposition 2 *Soit* $s : \mathbb{Q} \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *la surjection canonique. Soit* $p \geq 2$ *un nombre premier,* K_p *le sous-groupe de* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *constitué des éléments qui sont d'ordre une puissance de* p *.*

1. *Alors* $K_p = s(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \simeq \dfrac{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}{\mathbb{Z}}$ *où* $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ *est le sous-groupe de* $\mathbb{Q}$ *constitué des fractions dont le dénominateur est une puissance de* p *.*
En particulier les sous-groupes de K_p *sont* $\{0\}$ *,* K_p *,* $s(\frac{1}{p^m}\mathbb{Z})$ *pour* $m \geq 1$ *;* $s(\frac{1}{p^m}\mathbb{Z})$ *est le seul sous-groupe de* K_p *qui est d'ordre* p^m *et* K_p *est le seul sous-groupe de* K_p *qui n'est pas fini.*
Si $\mathcal{P}$ *désigne l'ensemble des nombres premiers* $p \geq 2$ *, alors on a*

$$\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} K_p .$$

2. *Soit* H *un sous-groupe de* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *,* $p \geq 2$ *un nombre premier,* H_p *le sous-groupe des éléments de* H *qui sont d'ordre une puissance de* p *.*
Alors $H = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} H_p$ *et* $H_p = H \cap K_p$ *. On sait par* **1.** *que* H_p *est un groupe cyclique d'ordre une puissance de* p *ou* $H_p = K_p$ *.*

Démonstration

1) Montrons **1.**

1.1) Il est immédiat que $s(\frac{1}{p^m}\mathbb{Z})$ est le groupe cyclique d'ordre p^m , engendré par $s(\frac{1}{p^m})$. Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe fini de K_p , on a donc

$$G = \{s(\frac{a_i}{p^{n_i}}) \mid p \nmid a_i , 1 \leq i \leq r , n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r\} \cup \{s(0)\} .$$

Par Bézout, il existe $\lambda , \mu \in \mathbb{Z}$ avec $1 = \lambda a_r + \mu p^{n_r}$; ainsi $s(\frac{1}{p^{n_r}}) = s(\lambda \frac{a_r}{p^{n_r}}) + s(\mu) \in G$, comme $s(\mu) = 0$, on a $s(\frac{1}{p^{n_r}}) \in G$. Il suit facilement de cela que $s(\frac{1}{p^{n_r}}\mathbb{Z}\}) \subset G$, l'autre inclusion est immédiate puisque $n_i \leq n_r$.

1.2) Soit G un sous-groupe infini de K_p , on a donc une suite $(s(\frac{a_i}{p^{n_i}}))_i$ avec $p \nmid a_i$ et $\lim\limits_{i \to \infty} n_i = \infty$. Il s'agit de montrer que

$K_p \subset G$. Soit $s(\frac{a}{p^m}) \in K_p$, il existe r tel que $n_r \geq m$. Comme en 1.1) on déduit que $s(\frac{1}{p^{n_r}}) \in G$ et donc $s(\frac{a}{p^m}) = s(a p^{n_r - m} \frac{1}{p^{n_r}}) \in G$; cela montre bien que $K_p \subset G$ et donc que $K_p = G$.

1.3) Il reste à montrer que $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} K_p$. Clairement on a $\sum_{p \in \mathcal{P}} K_p \subset \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

Soit $s(\frac{a}{N}) \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, si $N = \pm 1$, alors $s(\frac{a}{N}) = s(0) \in \sum_{p \in \mathcal{P}} K_p$. Si $N \neq \pm 1$, alors $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont des premiers positifs distincts et $\alpha_i > 0$ pour $1 \leq i \leq r$. Soit $q_i := \frac{N}{p_i^{\alpha_i}}$, facilement

$1 = \mathrm{pgcd}(q_1, q_2, \dots, q_r)$, alors par Bézout, il existe $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_r q_r$. Ainsi $\frac{a}{N} = a_1 \frac{q_1}{N} + a_2 \frac{q_2}{N} + \dots + a_r \frac{q_r}{N}$, il suit de la définition de q_i que $p_i^{\alpha_i} \frac{q_i}{N} = 1$ et donc que $p_i^{\alpha_i} s(a_i \frac{q_i}{N}) = s(0)$, ce qui montre que $s(\frac{a}{N}) \in K_{p_1} + K_{p_2} + \dots + K_{p_r}$. On a donc $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \sum_{p \in \mathcal{P}} K_p$, il reste à montrer que la somme est directe.

Soit donc $0 = x_1 + x_2 + \dots + x_r$ avec $p_i^{\beta_i} x_i = 0$. Comme $1 = \mathrm{pgcd}(p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_r^{\beta_r})$, par Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ avec $1 = u p_1^{\beta_1} + v p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_r^{\beta_r}$; il suit de cela que $0 = (1 - u p_1^{\beta_1}) x_1 + v p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_r^{\beta_r} (x_2 + x_3 + \dots + x_r)$, i.e. $0 = x_1$. On montre de même que $0 = x_i$ pour $2 \leq i \leq r$. Ainsi la somme est directe.

2) La démonstration de 2. est immédiate.

3. Application au sous-groupe de torsion du groupe multiplicatif d'un corps commutatif.

Proposition 3 *Soit* K *un corps commutatif,* $K^{\times}=K-\{0\}$ *le groupe des inversibles de* K *et* $(K^{\times})_{tor}$ *, le sous-groupe de torsion de* $K^{\times}$, i.e. *le sous-groupe de* $K^{\times}$ *constitué des éléments de* $K^{\times}$ *qui sont d'ordre fini.*

1. *Soit* $m\in\mathbb{N}$ *,* $m\geq 1$*,* $G_m:=\{x\in K \mid x^{m!}=1\}$ *où* $m!:=1.2.\ldots.m$ *. Alors on a*

$$(K^{\times})_{tor} = \bigcup_{m\geq 1} G_m .$$

Il suit du lemme 1 ci-après que G_m *est cyclique. Il suit alors de la proposition1 que* $(K^{\times})_{tor}$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

2. *Soit* $p\geq 2$ *un nombre premier* $(K^{\times})_{tor,p}$ *le sous-groupe des éléments* x *de* $(K^{\times})_{tor}$ *pour lesquels il existe un entier* n_x *tel que* $x^{p^{n_x}}=1$, i.e. $(K^{\times})_{tor,p}$ *est constitué des éléments de* $(K^{\times})_{tor}$ *qui sont d'ordre une puissance de* p *. Il suit de la proposition 2 que* $(K^{\times})_{tor,p}$ *est soit un groupe cyclique d'ordre une puissance de* p *, soit isomorphe à* $\frac{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}{\mathbb{Z}}$ *où* $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ *est le sous-groupe de* $\mathbb{Q}$ *constitué des fractions dont le dénominateur est une puissance de* p *.*

Enfin il résulte de la proposition 2 que $(K^{\times})_{tor}=\bigoplus_{p\in\mathcal{P}}(K^{\times})_{tor,p}$ *où* $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des premiers* $p\geq 2$ *de* $\mathbb{Z}$ *.*

3. *Si* K *est un corps commutatif de caractéristique nulle qui contient toutes les racines de l'unité (par exemple* $\mathbb{C}$*), alors* $(K^{\times})_{tor}$ *est isomorphe à* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *.*

Si K *est un corps commutatif de caractéristique* q *qui contient toutes les racines de l'unité, ce qui veut dire que* K *contient* $(\mathbb{F}_q)^{alg}$ *, la clôture algébrique de* $\mathbb{F}_q\simeq\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}$ *. Alors* $(K^{\times})_{tor}\simeq\bigoplus_{p\in\mathcal{P}-\{q\}}\frac{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}{\mathbb{Z}}$ *.*

Démonstration C'est une conséquence immédiate des propositions 1 et 2.

4. Application au sous-groupe de torsion de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

Proposition 4

1. ([Fr. B.C.D.] proposition 4.1.1. p. 76, proposition 4.1.4. p. 78)

On rappelle que $SO_2(\mathbb{R}) := \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in G\ell_2(\mathbb{R}) \mid a^2+b^2=1\}$ *et que* $SO_2(\mathbb{R})$ *est un groupe abélien. On sait que l'application* $\rho : \mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$ *définie par* $\rho(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta) & -\sin(2\pi\theta) \\ \sin(2\pi\theta) & \cos(2\pi\theta) \end{bmatrix}$ *est un homomorphisme surjectif du groupe* $(\mathbb{R},+)$ *sur le groupe* $SO_2(\mathbb{R})$ *dont le noyau est* $\mathbb{Z}$ *. Ainsi* ρ *induit un isomorphisme de* $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ *sur* $SO_2(\mathbb{R})$ *.*

De même ρ *induit un isomorphisme de* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *sur* $(SO_2(\mathbb{R}))_{tor}$ *où* $(SO_2(\mathbb{R}))_{tor}$ *est le sous-groupe de torsion de* $SO_2(\mathbb{R})$ *.*

On rappelle que $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} SO_2(\mathbb{R})$ *.*

Plus généralement, si $B \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ *, on a* $o(B)=2$ *et* $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup (B)\, SO_2(\mathbb{R})$ *, et si* $A \in SO_2(\mathbb{R})$ *, on a* $BAB^{-1} = A^{-1}$ *.*

1. *Soit* H *un sous-groupe de* $SO_2(\mathbb{R})$ *qui est de torsion,* i.e. *un sous-groupe de* $SO_2(\mathbb{R})$ *constitué d'éléments qui sont d'ordre fini.*

Soit $m \in \mathbb{N}$ *,* $m \geq 1$*,* $H_m := \{A \in H \mid A^{m!} = I_2\}$ *où* $m! := 1.2. \ldots .m$ *.*

On sait que H_m *est fini et que c'est l'unique sous-groupe cyclique de* $SO_2(\mathbb{R})$ *, d'ordre* $o(H_m)$ *, il est engendré par la rotation de mesure d'angle* $\frac{2\pi}{o(H_m)}$ ([Fr B,C,D] ex. 10.39 p. 155).

Alors on a $H_m \subset H_{m+1}$ *pour tout* $m \geq 1$ *et*

$$H = \bigcup_{m\geq 1} H_m .$$

C'est une illustration de la propostion 1.

2. *Soit* $p \geq 2$ *un nombre premier* $H_{(p)}$ *le sous-groupe des éléments* A *de* H *pour lesquels il existe un entier* n_x *tel que* $A^{p^{n_x}} = I_2$, i.e. $H_{(p)}$ *est constitué des éléments de* H *qui sont d'ordre une puissance de* p . *Il suit de la proposition 2 que* $H_{(p)}$ *est soit un groupe cyclique d'ordre une puissance de* p *, soit isomorphe à* $\frac{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}{\mathbb{Z}}$

où $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ *est le sous-groupe de* $\mathbb{Q}$ *constitué des fractions dont le dénominateur est une puissance de* p .

Enfin il résulte de la proposition 2 que $H = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} H_{(p)}$ *où* $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des premiers* $p \geq 2$ *de* $\mathbb{Z}$.

3. *Soit* G *un sous-groupe de* $O_2(\mathbb{R})$ *qui est de torsion,* i.e. *un sous-groupe de* $O_2(\mathbb{R})$ *constitué d'éléments qui sont d'ordre fini. Soit* $H := G \cap SO_2(\mathbb{R})$ *, on suppose que* $H \neq G$ *. Soit* $\sigma \in G - H$ *, alors on sait que* $o(\sigma) = 2$ *et que* $G = H \cup \sigma H$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ *,* $m \geq 1$*,* $H_m := \{A \in H \mid A^{m!} = I_2\}$ *où* $m! := 1.2 \ldots m$.

On sait que H_m *est fini et que c'est l'unique sous-groupe cyclique de* $SO_2(\mathbb{R})$ *, d'ordre* $o(H_m)$ *, il est engendré par la rotation de mesure d'angle* $\frac{2\pi}{o(H_m)}$ ([Fr B,C,D] ex. 10.39 p. 155).

Soit $G_m = H_m \cup \sigma H_m$ *, alors* G_m *est un groupe fini avec* $o(G_m) = 2\,o(H_m)$ ([Fr. B,C,D] ex. 10.39 p. 155).

Plus précisément G_m *est un groupe diédral, d'ordre* $2\,o(H_m)$ *et on a* $G_m \subset G_{m+1}$ *pour tout* $m \geq 1$ *et*

$$G = \bigcup_{m \geq 1} G_m .$$

On rappelle ([Fr E] p. 41) *que si* $n \geq 1$ *, alors il existe un et un seul groupe, à isomorphisme près, engendré par deux éléments* τ , σ *avec* $\tau \neq \sigma$, $o(\tau) = n$, $o(\sigma) = 2$ *et* $\sigma \tau \sigma^{-1} = \tau^{-1}$. *Ce groupe est réalisé par le sous-groupe suivant de* $O_2(\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{D}_n := \left\{ \begin{bmatrix} \cos 2\pi\frac{k}{n} & -\sin 2\pi\frac{k}{n} \\ \sin 2\pi\frac{k}{n} & \cos 2\pi\frac{k}{n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos 2\pi\frac{k}{n} & \sin 2\pi\frac{k}{n} \\ \sin 2\pi\frac{k}{n} & -\cos 2\pi\frac{k}{n} \end{bmatrix}, 0 \leq k < n \right\}.$$

Soient

$t := \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$, $s := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, *alors* $o(t) = n$, $o(s) = 2$,

$sts^{-1} = t^{-1}$.

Un tel groupe s'appelle le groupe *diédral* d'ordre $2n$.

4. *Soit* G *un sous-groupe de* $O_2(\mathbb{R})$ *qui est de torsion,* i.e. *un sous-groupe de* $O_2(\mathbb{R})$ *constitué d'éléments qui sont d'ordre fini. Soit* $H := G \cap SO_2(\mathbb{R})$ *, on suppose que* $H \neq G$ *. Soit* $\sigma \in G - H$ *, alors on sait que* $o(\sigma) = 2$ *et que* $G = H \cup \sigma H$ *.*

Soit $p \geq 2$ *un nombre premier* $(G)_{(p)}$ *le sous-ensemble des éléments* A *de* G *pour lesquels il existe un entier* n_x *tel que* $A^{p^{n_x}} = 1$, i.e. $(G)_{(p)}$ *est constitué des éléments de* G *qui sont d'ordre une puissance de* p *. Si* $p \geq 3$ *on a* $(G)_{(p)} = (H)_{(p)}$ *et* $G_{(2)} = H_{(2)} \cup \sigma H_{(2)}$ *. En particulier* $(G)_{(p)}$ *est un sous-groupe de* G *pour tout nombre premier* p*.*

Remarque 1 Soit $B \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$, alors $SO_2(\mathbb{R})_{tor} \cup (B)\, SO_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de torsion de $O_2(\mathbb{R})$; en particulier cet ensemble n'est pas un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$. Par ailleurs les sous-groupes de torsion maximaux de $O_2(\mathbb{R})$ sont les groupes de la forme $SO_2(\mathbb{R})_{tor} \cup (B)\, SO_2(\mathbb{R})_{tor}$ où $B \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$.

Remarque 2 Si G un groupe, p un nombre premier et $G_{(p)}$ le sous-ensemble des éléments de G qui sont d'ordre une puissance de p . Si G est abélien, alors $G_{(p)}$ est un sous-groupe de G , mais si n'est pas abélien $G_{(p)}$ peut ne pas être un sous-groupe de G .

Démonstration C'est en partie une conséquence immédiate des propositions 1 et 2.

Lemme 1 *Soit* K *un corps commutatif,* G *un sous-groupe fini du groupe* $K^{\times}=K-\{0\}$ *des inversibles de* K *. Alors* G *est cyclique.*

Démonstration C'est le corollaire p. 123 de cet ouvrage.

Lemme 2 *Soient* $A\subset B$ *deux groupes cycliques (notés additivement) avec* $o(A)=a$ *,* $o(B)=b=ac$ *. Soit* $x\in A$ *avec* $o(x)=a$ *. Alors il existe* $y\in B$ *avec* $o(y)=b$ *et* $c\,y=x$ *. Ainsi l'application* $y\mapsto c\,x$ *de l'ensemble des générateurs de* B *dans l'ensemble des générateurs de* A *est surjective.*

Démonstration
1) On considère d'abord le cas particulier suivant. Soient $U\subset V$ deux groupes cycliques (notés additivement) avec $o(U)=u$, $o(V)=v=up$ où p est un nombre premier . Soit $x\in U$ avec $o(x)=u$. Alors on veut montrer qu' il existe $y\in V$ avec $o(y)=v$ et $p\,y=x$.
En effet il existe $z\in V$ avec $o(z)=v=up$, il suit facilement de cela que $o(pz)=u$; ainsi il existe $\alpha\in\mathbb{Z}$ avec $1=\mathrm{pgcd}(\alpha,u)$ et $pz=\alpha x$.
Supposons $1=\mathrm{pgcd}(\alpha,up)$. Il existe donc $\gamma\in\mathbb{Z}$ tel que $\alpha\gamma\equiv 1\,\mathrm{modulo}\,(up\mathbb{Z})$; ainsi $1=\mathrm{pgcd}(\gamma,up)$ et donc $o(\gamma z)=up$; de plus $p(\gamma z)=x$. Ainsi $y:=\gamma z$ convient.
Supposons $1\neq\mathrm{pgcd}(\alpha,up)$, sachant que $1=\mathrm{pgcd}(\alpha,u)$ cela veut dire que $p\mid\alpha$ et donc $p\nmid u$. Il suit de cela que sachant que $1=\mathrm{pgcd}(\alpha,u)$, cela veut dire que $1=\mathrm{pgcd}(\alpha+u,up)$.
Il existe donc $\gamma\in\mathbb{Z}$ tel que $(\alpha+u)\gamma\equiv 1\,\mathrm{modulo}\,(up\mathbb{Z})$; ainsi $1=\mathrm{pgcd}(\gamma,up)$; par ailleurs $pz=\alpha x$ implique facilement $pz=(\alpha+u)\,x$, donc $p(\gamma z)=x$, il suit que $o(\gamma z)=up$ et donc que $y:=\gamma z$ convient.

2) Traitons maintenant le cas général.
On a donc $c = p_1 p_2 \dots p_r$ ou les p_i sont des nombres premiers. On sait que si C est un groupe cyclique d'ordre n, pour tout diviseur d de n il existe un et un seul sous-groupe de C qui est d'ordre d. Il suit de cela qu'il existe des sous-groupes cycliques de B, $C_0, C_1, \dots, C_r$ avec $C_i \subset C_{i+1}$ pour $0 \leq i < r$, $C_0 = A, C_r = B$, $o(C_{i+1}) = p_{i+1} o(C_i)$ pour $0 \leq i < r$.
La partie 1) dit qu'il existe $y_1 \in C_1$ avec $o(y_1) = p_1 a$ et $p_1 y_1 = x$. De la même façon il existe $y_2 \in C_2$ avec $o(y_2) = p_2 (p_1 a)$ et $p_2 y_2 = y_1$. Et de façon générale il existe $y_{i+1} \in C_{i+1}$ avec $o(y_{i+1}) = p_{i+1} (p_1 p_2 \dots p_i\, a)$ et $p_{i+1} y_{i+1} = y_i p_i$ pour $0 \leq i < r$. Il est alors clair que $y := y_r$ convient.

Lemme 3 *Soient G un groupe abélien (noté additivement), $x, y \in G$, deux éléments d'ordre fini. Alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que* $o(u\,x + v\,y) = \mathrm{ppcm}(o(x), o(y))$.

Démonstration C'est la partie A.1 de la démonstration du lemme 1, p. 121 de cet ouvrage.

[Fr. B.C.D.] **Fresnel J** *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999),
[Fr. E.] **Fresnel J** *Groupes* (Hermann 2001),

p. 128 complément : le théorème est encore valable si on suppose seulement que G est un groupe fini (non nécessairement abélien). C'est un résultat de Joseph Ayoub
The direct extension theorem, J. Group Theory 9 (2006), 307-316

Page 130, complément

Sur le nombre minimum de générateurs d'un groupe de type fini

Convention et notation Soit G un groupe de type fini, i.e. engendré par un nombre fini d'éléments. Si $G \neq \{e\}$, on note $r(G)$ le nombre minimum de générateurs de G et par convention $r(\{e\}) = 0$.
On verra (proposition 5) que l'application r est une fonction croissante sur l'ensemble des groupes abéliens de type fini, i.e. si $H \subset G$, alors $r(H) \leq r(G)$.
En revanche, il n'en est rien sur l'ensemble des groupes finis non nécessairement commutatifs.

1. Quelques exemples de calcul de $r(G)$

Proposition 1 *Soit $G \neq \{0\}$, un groupe abélien fini, alors on a $G = \mathbb{Z}\, x_1 \oplus \mathbb{Z}\, x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\, x_r$ avec $1 \neq o(x_r) \mid o(x_{r-1}) \mid \ldots \mid o(x_1)$ (théorème* 1, *p.* 123 *de cet ouvrage). Alors $r(G) = r$,* i.e. $r(G)$ *est le nombre d'invariants du groupe abélien fini G .*

Démonstration C'est la partie 2. de l'exercice 8.45. p. 100 de Fr. E.

Proposition 2 (structure des groupes abéliens de type fini) *Soient $G \neq \{0\}$ un groupe abélien de type fini, G_t le sous-groupe de torsion de G . Alors il existe un entier $d \geq 0$ unique tel que $G \simeq G_t \oplus \mathbb{Z}^d$. En*

plus G_t *est un groupe fini et si* $G_t \neq \{0\}$ *, il admet une décomposition sous la forme*
$G_t = \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_r$ *avec* $1 \neq o(x_r) \mid o(x_{r-1}) \mid \ldots \mid o(x_1)$.
Par ailleurs on a $r(G) = d + r$.

Démonstration La première partie est le corollaire 6.2.4. p. 61 de Fr. E.
Pour la seconde partie, on traite seulement le cas où $G_t \neq \{0\}$, $r \geq 1$, en imitant la technique de l'exercice 8.45. p. 100 de Fr. E. En effet si p est un nombre premier avec $p \mid o(x_1)$, alors $\frac{G}{pG}$ est isomorphe à $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})^{d+r}$. Soient $\rho : G \to \frac{G}{pG}$ la surjection canonique, $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de G , alors
$(\rho(g_1), \rho(g_2), \ldots, \rho(g_m))$ est une famille génératrice du
$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$-espace vectoriel $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})^{d+r}$; ainsi $m \geq d + r$. Par ailleurs, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{Z}^d$, il suit que
$(x_1, x_2, \ldots, x_r, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d)$ est famille génératrice de G . Ainsi donc $r(G) = d + r$. Les cas $d = 0$ ou $r = 0$ se traitent de la même façon, compte tenu de la convention $r(\{0\}) = 0$.

Proposition 3 (système générateur minimal pour S_n et $\mathfrak{A}_n$)
1. *Le groupe* S_n *est engendré par* $(1, 2, \ldots, n)$ *et* $(n-1, n)$ *; ainsi le nombre minimal de générateurs de* S_n *est* 2 *pour* $n \geq 3$ *. Le groupe* S_n *est aussi engendré par* $(2, \ldots, n)$ *et* $(1, 2)$ *. Ainsi* $r(\mathrm{S}_n) = 2$ *si* $n \geq 3$.
2. *Si* n *est pair,* $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par le cycle* $(2, 3, \ldots, n)$ *et le* 3*-cycle* $(1, 2, 3)$ *. Si* n *est impair* $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par le cycle* $(1, 2, \ldots, n)$ *et le* 3*-cycle* $(1, 2, 3)$ *. Ainsi* $r(\mathfrak{A}_n) = 2$ *si* $n \geq 4$.

Démonstration La partie 1. est le corollaire 2.2.1.3.5. p. 30 de Fr. E.
La partie 2. est l'exercice 64 partie 3.2. p. 155 de F.M.1.

Proposition 4 *Soient* p *un nombre premier,* G *un groupe d'ordre* $p^n, n \geq 1$ *. Soit* $\mathrm{Fratt}(G)$ *le sous-groupe de* **Frattini** *de* G *,* i.e. *l'intersection des sous-groupes maximaux de* G*. On sait que dans le cas d'un p-groupe, on* $\mathrm{Fratt}(G) = D(G)\,G^p$ *où* $D(G)$ *est le groupe dérivé de* G *et* $D(G)\,G^p$ *est le sous-groupe de* G *engendré par* $D(G)$ *et les* x^p *où* $x \in G$ *. Ainsi* $\frac{G}{\mathrm{Fratt}(G)}$ *est isomorphe au groupe additif de* $(\mathbb{F}_p)^r$*. Soient* $\varphi : G \to \frac{G}{\mathrm{Fratt}(G)} \simeq (\mathbb{F}_p)^r$ *la surjection canonique* $e_1, e_2, \ldots, e_r \in G$ *de façon que* $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_r)$ *soit un système générateur minimal de* $\frac{G}{\mathrm{Fratt}(G)}$ *;* i.e. *une base du* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* $\frac{G}{\mathrm{Fratt}(G)}$ *. Alors* $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ *est un système générateur de* G *et* r *est le cardinal minimum d'un système générateur de* G *,* i.e. $r(G) = r$.

Démonstration C'est les propositions de l'exercice 76 p. 192-193 de F.M.1.

2. Variation du nombre minimal de générateurs pour les groupes abéliens de type fini.

Proposition 5 *Soit* G *un groupe abélien de type fini,* H *un sous-groupe de* G *. Alors* H *est de type fini et* $r(H) \leq r(G)$ *.*

Démonstration On suppose que G est noté additivement.
Si $G = \{0\}$, on a $H = \{0\}$ et donc $0 = r(G) = r(H)$.
On suppose désormais que $G \neq \{0\}$.
1) On suppose que $r(G) = 1$, i.e. $G = \mathbb{Z}\,x_1$ avec $x_1 \neq 0$. Soit $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,x_1$ la surjection définie par $\theta(z) := z\,x_1$. Si H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}x_1$, on a $\theta(\theta^{-1}(H)) = H$, comme $\theta^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ avec $\theta^{-1}(H) = a\,\mathbb{Z}$. Ainsi $H = \theta(\theta^{-1}(H)) = \mathbb{Z}\,a\,x_1$. Cela montre que $r(H) \leq 1$. Ainsi la proposition est satisfaite pour $r(G) = 1$.

2) *On suppose que* $r(G) \geq 2$ *et que la proposition est satisfaite pour tout groupe abélien* G' *tel que* $r(G') < r(G)$.
On a $r(G) = n \geq 2$ et donc $G = \mathbb{Z}\, x_1 + \mathbb{Z}\, x_2 + \ldots + \mathbb{Z}\, x_n$. Soit $\rho : G \to \frac{G}{\mathbb{Z}\, x_1}$ la surjection canonique. On a donc
$\frac{G}{\mathbb{Z}\, x_1} = \mathbb{Z}\, \rho(x_2) + \mathbb{Z}\, \rho(x_3) + \ldots + \mathbb{Z}\, \rho(x_n)$. Tout d'abord $\frac{G}{\mathbb{Z}\, x_1} \neq \{0\}$, sinon on aurait $G = \mathbb{Z}\, x_1$, cela contredit
$r(G) = n \geq 2$. On a donc $1 \leq r(\frac{G}{\mathbb{Z}\, x_1}) \leq n-1$; il suit de l'hypothèse de récurrence que $r(\rho(H)) = k \leq n-1$. Si $\rho(H) = \{0\}$, cela veut dire que $H \subset \mathbb{Z}\, x_1$ et la partie 1) dit que $r(H) \leq 1$; ainsi la proposition est satisfaite.
On suppose maintenant que $\rho(H) \neq \{0\}$, ainsi $1 \leq k$ et donc $\rho(H) = \mathbb{Z}\, \rho(h_1) + \mathbb{Z}\, \rho(h_2) + \ \ldots + \mathbb{Z}\, \rho(h_k)$. Enfin il suit de la partie 1) qu'l existe $a \in \mathbb{Z}$ avec $H \cap \mathbb{Z}\, x_1 = \mathbb{Z}\, a\, x_1$. Il reste à montrer que
$H = \mathbb{Z}\, a\, x_1 + \mathbb{Z}\, h_1 + \mathbb{Z}\, h_2 + \ \ldots + \mathbb{Z}\, x_k$. L'inclusion
$\mathbb{Z}\, a\, x_1 + \mathbb{Z}\, h_1 + \mathbb{Z}\, h_2 + \ \ldots + \mathbb{Z}\, h_k \subset H$ est immédiate.
Maintenant si $h \in H$, on a
$\rho(h) = \lambda_1 \rho(h_1) + \lambda_2 \rho(h_2) + \ldots + \lambda_k \rho(h_k)$, avec $h_i \in H$, ainsi

$$h - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_k h_k) \in H \cap (\ker \rho) = H \cap \mathbb{Z}\, x_1 = \mathbb{Z}\, a\, x_1 ,$$

ce qui veut dire que $h - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_k h_k) = \mu\ (a\, x_1)$. Cela montre $H \subset \mathbb{Z}\, a\, x_1 + \mathbb{Z}\, h_1 + \mathbb{Z}\, h_2 + \ \ldots + \mathbb{Z}\, x_k$.
En conclusion, on a $r(H) \leq k+1 \leq n$. Ce qui est la proposition.

3. Variation du nombre minimal de générateurs pour les groupes finis non nécessairement commutatifs.

La question naturelle qui se pose est de savoir si la proposition 5 est encore vraie lorsque le groupe G n'est plus commutatif. La réponse est trivialement non.

2.1. L'exemple le plus immédiat est le suivant. Soit $H := (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^n$, il suit de la proposition 1 ques $r((\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^n) = n$. Soit $\rho : H \to \mathfrak{S}(H)$ définie comme il suit. Si $h \in H$, alors $\rho(h)$ est la bijection de H définie par $x \longmapsto hx$; facilement ρ est un homomorphisme injectif. Par ailleurs on sait que $\mathfrak{S}(H) \simeq \mathfrak{S}_{2^n}$ est engendré par deux éléments si $n \geq 2$ (proposition 3) et il n'est pas commutatif, on a $r(\mathfrak{S}(H)) = 2$. Si donc $n \geq 3$, on a $r(\rho(H)) > r(\mathfrak{S}(H))$.

2.2. Dans l'exemple 2.1. l'indice de $\rho(H)$ dans $\mathfrak{S}(H)$ est grand. On peut obtenir des exemples avec un indice plus petit de la façon qui suit.
On rappelle que $r(\mathfrak{S}_n) = 2$ si $n \geq 3$ (proposition 3) et $r(\mathfrak{A}_n) = 2$ si $n \geq 4$ (proposition 3) .
Par exemple, soit $G = \mathfrak{S}_6$ et H le sous-groupe engendré par les transpositions $(1,2),(3,4),(5,6)$; facilement H est isomorphe à $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$. Ainsi $r(G) = 2$ et $r(H) = 3$. On peut généraliser cet exemple avec $G = \mathfrak{S}_{2m}$ et $H \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^m$.
Autre exemple, soient $G = \mathfrak{A}_9$ et H est le sous-groupe engendré par les 3-cycles $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$. Facilement $H \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})^3$, ainsi $r(H) = 3$ et $r(G) = 2$. On peut généraliser cet exemple avec $G = \mathfrak{A}_{3m}$ et $H \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})^m$.
2.3. Notre objectif est maintenant de trouver le plus petit exemple. C'est un certain groupe à 16 éléments.

Proposition 6 *Il existe un groupe* G *engendré par* a, b, c *et avec* $o(G) = 16$ *,* $o(a) = 4$ *,* $o(b) = o(c) = 2$ *,* $ab = ba$ *,* $bc = cb$ *et* $cac^{-1} = ab$ *.*
Ce groupe est engendré par a *et* c *et on a* $r(G) = 2$ *,* i.e. 2 *est le nombre minimum de générateurs de* G *. Enfin le sous-groupe* H *engendré par* a^2, b, c *est isomorphe à* $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$ *, ainsi* $r(H) = 3$ *.*

Démonstration

1) Soient $G:=(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})\times(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})\times(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ et $s:(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})\to(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ la surjection canonique.

On définit sur G une loi interne par

(1) $\quad (x,y,z)*(x',y',z'):=(x+x',y+y'+s(x')z,z+z')$.

Facilement $(G,*)$ est un groupe avec $o(G)=16$. Désormais si $u,v\in G$, on notera uv l'élément $u*v$.

Soient $a:=(1,0,0)$, $b:=(0,1,0)$, $c:=(0,0,1)$, alors on a bien $o(a)=4$, $o(b)=o(c)=2$, $ab=ba$, $bc=cb$ et $cac^{-1}=ab$.

2) Soit $H:=(2\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})\times(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})\times(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, il suit de (1) que H est un sous-groupe commutatif de G engendré par a^2,b,c et isomorphe à $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$, ainsi $r(H)=3$ (proposition 1). Facilement G est engendré par a et c et la relation $cac^{-1}=ab$ montre qu'il n'est pas commutatif, ce qui implique qu'il ne peut être engendré par un élément, ainsi $r(G)=2$.

Proposition 7 *Soient* $H\subset G$ *deux groupes finis avec* $r(H)>r(G)$. *On suppose que* G *est d'ordre minimum avec la propriété précédente. Alors* G *est isomorphe au groupe d'ordre* 16 *défini par la proposition 6.*

Démonstration

1) *On a* $r(G)\geq 2$ *et donc* $r(H)\geq 3$. En effet, si $r(G)=1$, ça veut dire que le groupe G est cyclique, il en est de même de H , ainsi $r(H)=1$; ce n'est pas possible. Le cas $r(G)=0$ est trivial.

2) Comme $r(H)\geq 3$, alors le lemme 1 ci-après dit que $o(H)\geq 2^3$ (on pourrait aussi dire qu'on connaît tous les groupes d'ordre au plus 7 et que ceux-ci sont engendrés par deux ou un éléments). Comme $r(H)\neq r(G)$, on a $H\neq G$ et donc $[G:H]\geq 2$. Il suit de

tout cela que $o(G) \geq 16$; sachant que G est d'ordre minimal, il suit de la proposition 6 que $o(G)=16$ et $o(H)=2^3$.

3) Si donc $o(H)=2^3$, il suit du lemme 1 que $r(H) \leq 3$. Si on avait $r(H) \leq 2$, cela impliquerait $r(G) \leq 1$, ce qui est exclu par 1). Ainsi $o(H)=2^3$ et $r(H)=3$. Si H était non commutatif, cela veut dire que H est le groupe dihédral à 8 éléments ou le groupe des quaternions, mais dans ce cas, on a $r(H)=2$ (5.4. p. 43, Fr. E.). Ainsi H est commutatif et le théorème de structure des groupes abéliens finis nous dit que la seule possibilité est $H \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$.

Alors le lemme 2 ci-après permet de conclure.

Lemme 1 *Soit* G *un groupe fini,* $n:=r(G)$ *,* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une famille génératrice de* G *. Comme* $r(G)=n$ *, on a* $o(x_i) \geq 2$ *, soit* a_i *l'infimum des premiers* p *qui divisent l'ordre de* x_i *. Alors on a* $o(G) \geq a_1 a_2 \ldots a_n$ *; en particulier on a toujours* $o(G) \geq 2^n$*.*

Démonstration

Soient $A_i:=\{0, 1, \ldots, a_i-1\}$, $\theta: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to G$ définie par $\theta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n):=(x_1)^{\alpha_1}(x_2)^{\alpha_2} \ldots (x_n)^{\alpha_n}$. Il s'agit de montrer que θ est injectif. Supposons le contraire, on a donc

(1) $\qquad (x_1)^{\alpha_1}(x_2)^{\alpha_2} \ldots (x_n)^{\alpha_n}=(x_1)^{\beta_1}(x_2)^{\beta_2} \ldots (x_n)^{\beta_n}$.

On peut supposer qu'il existe k avec $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_{k-1}=\beta_{k-1}$ et par exemple $\alpha_k > \beta_k$. Il suit alors de la relation (1) la relation (2) ci-après

$(x_k)^{\alpha_k-\beta_k}=(x_{k+1})^{\beta_{k+1}}(x_{k+2})^{\beta_{k+2}} \ldots (x_n)^{\beta_n}\ ((x_{k+1})^{\alpha_{k+1}} \ldots (x_n)^{\alpha_n})^{-1}$.

Il suit de cela que $(x_k)^{\alpha_k-\beta_k}$ appartient au sous-groupe engendré par $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$. Comme $1 \leq \alpha_k-\beta_k < a_k$, il suit que $\mathrm{pgcd}(\alpha_k-\beta_k, o(x_k))=1$, ainsi il existe $N \geq 1$ avec

$N(\alpha_k - \beta_k) = 1 + \lambda\, o(x_k)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Ainsi en élevant la relation (2) à la puissance N , on déduit que x_k appartient au sous-groupe engendré par $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$. Il suivrait donc de cela que la famille $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ engendre G ; ce qui contredit le fait que $r(G) = n$.

Lemme 2 *Soit G un groupe non commutatif, d'ordre 16 qui contient un sous-groupe H isomorphe à $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$. On note e l'élément neutre de G .*
1. *On suppose qu'il existe $a \in G - H$ tel que $o(a) = 2$. Alors G est produit semi-direct de $\{e, a\}$ par H . De plus $r(G) \geq 3$.*
2. *On suppose que pour tout $a \in G - H$, on a $o(a) = 4$. Alors $a^2 \in H$ et il existe $b, c \in H$ avec les propriétés suivantes : le groupe H est engendré par a^2, b, c et $ab = ba$, $bc = cb$, $cac^{-1} = ab$. Ainsi le couple (G, H) n'est autre chose que le couple défini selon la proposition 3.*

Démonstration

1) Comme H est d'indice 2 dans G , il est distingué dans G , il suit que G est produit semi-direct de $\{e, a\}$ par H .
Si le produit est direct, alors G est commutatif, c'est exclu.
On suppose maintenant que le produit n'est pas direct. Comme H est distingué, l'élément a opère sur le $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$-espace vectoriel H , par $h \longmapsto a h a^{-1}$. Appelons u cet isomorphisme. Comme $u^2 = \mathrm{id}_H$, et sachant que $\mathrm{car}(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = 2$, il suit que $\chi_u(X) = (X+1)^3$. Par ailleurs, comme le produit n'est pas direct, on a $u \neq \mathrm{id}_H$, ainsi la réduction de Jordan dit qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) du $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$-espace vectoriel H , avec $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_2, u(e_3) = e_2 + e_3$.
Cela se traduit en notation multiplicative par
(1) $\quad a e_1 = e_1 a$, $a e_2 = e_2 a$, $a e_3 = e_2 e_3 a$.

En particulier le sous-groupe K engendré par e_2 est dans le centre de G, donc distingué. Soit $\rho : G \to \frac{G}{K}$ la surjection canonique, alors les relations (1) montrent que $\frac{G}{K}$ est commutatif, engendré par $\rho(a), \rho(e_1), \rho(e_3)$ avec $\rho(a)^2 = \rho(e), \rho(e_1)^2 = \rho(e), \rho(e_3)^2 = \rho(e)$; comme $o(\frac{G}{K}) = 2^3$, cela veut dire que $\frac{G}{K} \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^3$. En conclusion $r(G) \geq 3$.

2) Comme H est d'indice 2 dans G, il est distingué dans G, l'élément a opère sur le $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$-espace vectoriel H, par $h \mapsto a h a^{-1}$.
Appelons u cet isomorphisme. Comme H est d'indice 2 dans G, il est distingué dans G, ainsi $a^2 \in H$ qui est commutatif, cela implique que $u^2 = \mathrm{id}_H$, et sachant que $\mathrm{car}(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = 2$, il suit que $\chi_u(X) = (X+1)^3$.
Sachant que le groupe G n'est pas commutatif, il suit que $u \neq \mathrm{id}_H$.
Ainsi la réduction de Jordan dit qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) du $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$-espace vectoriel H, avec

$$u(e_1) = e_1 \text{ , } u(e_2) = e_2, u(e_3) = e_2 + e_3 \text{ .}$$

Comme H est d'indice 2 dans G, il est distingué dans G, ainsi $a^2 \in H$ et $a^2 \neq e$ puisque $o(a) = 4$.
Montrons que $a^2 \neq e_2$. Sinon la relation $u(e_3) = e_2 + e_3$ en notation multiplicative donnerait $a e_3 a^{-1} = e_2 e_3 = a^2 e_3$. Soit donc $a e_3 = a^2 e_3 a$ et alors $(a e_3)^2 = (a^2 e_3 a)(a e_3) = a^2 e_3 (a a) e_3$, comme H est commutatif, on a $(a e_3)^2 = e$; c'est contraire à l'hypothèse puisque $a e_3 \in G - H$.
Comme $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} e_1 \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} e_2 = \ker(u - \mathrm{id}_H)$ et que $u(a^2) = a^2$, comme $a^2 \neq e_2$ on a $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} e_1 \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} e_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} a^2 \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} e_2$.

Soient maintenant $b := e_2, d := e_3$. On a
$o(a)=4, o(b)=2, o(c)=2$, $ab=ba$, $bc=cb$ et $aca^{-1}=bc$.
Or $aca^{-1}=bc$ dit que $ca^{-1}c^{-1}=a^{-1}b$, donc $cac^{-1}=ba$.
Enfin avec la relation $ab=ba$, on obtient $cac^{-1}=ab$.
Sachant que $G=H \cup aH$, il suit que l'application
$\theta : (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}) \times (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \times (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \to G$ définie par $\theta(x, y, z) := a^x b^y c^z$, avec une interprétation évidente pour a^x, b^y, c^z , est clairement surjective, donc bijective.
Il suit facilement des relations $ab=ba$, $bc=cb$ et $aca^{-1}=bc$ que
(2) $(a^x b^y c^z)(a^{x'} b^{y'} c^{z'}) = a^{x+x'} b^{y+y'+s(x')z} c^{z+z'}$ où
$s : (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}) \to (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ est la surjection canonique.
Cela montre bien que le couple (G, H) n'est autre chose que le couple défini selon la proposition 3.

Bibliographie

[Fr. E.] **Fresnel J.** *Groupes* (Hermann 2001)
[F. M.1] **Fresnel J.** , **Matignon M.** *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)

Page 145, complément

Famille de transpositions génératrice de $\mathfrak{S}_n$ et connexité du graphe associé

Définition du graphe associé à une famille finie de transpositions

Soit $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$. Soit $\Lambda \neq \emptyset$ une famille finie de transpositions de $\mathfrak{S}_n$. Alors le graphe $G(\Lambda)$ associé à Λ est le graphe dont l'ensemble des *sommets* est $S := \bigcup_{t\in\Lambda} \text{support}(t)$, sachant que si t est la transposition $t=(a,b)$, alors $\text{support}(t)=\{a,b\}$.

Par ailleurs les *arêtes du graphe* $G(\Lambda)$ sont définies comme il suit : si $x,y \in S$, il y a une arête qui relie x et y si et seulement si $x \neq y$ et si la transposition (x,y) est élément de Λ . Ainsi donc l'ensemble des arêtes du graphe $G(\Lambda)$ s'identifie aux parties $\{x,y\}$ à deux éléments de S telles que la transposition (x,y) est un élément de Λ .

Soit $x,y \in S$, un *chemin qui relie* x *à* y est une suite finie $(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ d'éléments de S telle que $a_1=x$, $a_r=y$ et $\{a_k,a_{k+1}\}$ est une arête pour $1 \leq k < r$.

Soit $x \in S$, on appelle *composante connexe de* x l'ensemble des $y \in S$ pour lesquels il existe un chemin qui relie x à y . En particulier, on dit que le graphe $G(\Lambda)$ est *connexe*, s'il existe un point $x \in S$ tel que la composante connexe de x soit S ; c'est équivalent de dire que pour tout $x,y \in S$, $x \neq y$, il existe un chemin qui relie x à y .

Théorème *Soient* $n \geq 2$ *,* $\mathfrak{S}_n$ *le groupe des permutations de l'ensemble* $\{1,2,\dots,n\}$ *,* Λ *une famille finie, non vide de transpositions de* $\mathfrak{S}_n$ *et* $G(\Lambda)$ *le graphe associé à* Λ *selon la définition ci-dessus.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) La famille Λ *engendre le groupe* $\mathfrak{S}_n$ *,*
ii) le graphe $G(\Lambda)$ *a pour ensemble de sommets* $\{1,2,\dots,n\}$ *et le graphe* $G(\Lambda)$ *est connexe selon la définition ci-dessus.*

Démonstration
1) *Montrons i) implique ii).*
1.1) Montrons que 1 est un sommet du graphe $G(\Lambda)$.
Sinon $1 \notin \mathrm{support}(t)$ pour tout $t \in \Lambda$, ainsi $t(1)=1$ pour tout $t \in \Lambda$. Comme Λ engendre $\mathfrak{S}_n$, il suit que $\sigma(1)=1$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; ce qui est une contradiction, en particulier pour le cycle $\sigma=(1,2,\dots,n)$.
De la même façon k est un sommet si $1 \leq k \leq n$.
1.2) Montrons que $G(\Lambda)$ est connexe.
Soit A la composante connexe de 1 , selon la définition ci-dessus. Il s'agit de montrer que $A=\{1,2,\dots,n\}$. Supposons le contraire, on a donc $\{1,2,\dots,n\}=A \cup B$ avec $B \neq \emptyset$. Il suit de la définition de la composante connexe de 1 que pour tout $t \in \Lambda$, on a $\mathrm{support}(t) \subset A$ ou $\mathrm{support}(t) \subset B$. Il suit de cela que pour tout $t \in \Lambda$, on a $t(A)=A$ et $t(B)=B$. Comme Λ engendre $\mathfrak{S}_n$, on a aussi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma(A)=A$ et $\sigma(B)=B$. Cela donne une contradiction en considérant $\sigma=(1,2,\dots,n)$ et $\sigma^k(1)$ pour $1 \leq k \leq n$.

2) *Montrons ii) implique i) .*
Soit H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par Λ . Il suffit de montrer que $(1,k)\in H$ pour $2\leq k\leq n$ puisque l'on sait que la famille $\{(1,k)\mid 2\leq k\leq n\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$ (Fr.E. corollaire 2.2.1.3.4.).
Il suit du lemme ci-après qu'il existe un chemin $(b_1,b_2,\dots,b_s)$ qui relie 1 à k avec $1=b_1$, $k=b_s$, $b_1\notin\{b_2,b_3,\dots,b_s\}$ et $(b_i,b_{i+1})\in\Lambda$ pour $1\leq i<s$. On a donc $(b_1,b_2)\in H$, et sachant que b_1 est invariant par (b_2,b_3) , on a

$$(b_2,b_3)(b_1,b_2)(b_2,b_3)^{-1}=(b_1,b_3)\in H .$$

De même $(b_3,b_4)(b_1,b_3)(b_3,b_4)^{-1}=(b_1,b_4)\in H$. Ainsi par récurrence, on a $(b_1,b_s)\in H$, i.e. $(1,k)\in H$.

Lemme *Soient* x,y *deux sommets de* $G(\Lambda)$ *avec* $x\neq y$ *. On suppose en plus qu'il existe un chemin qui relie* x à y *. Alors il existe un chemin* $(b_1,b_2,\dots,b_s)$ *avec* $b_1=x$ *,* $b_s=y$ *et* $b_1\notin\{b_2,b_3,\dots,b_s\}$ *.*

Démonstration Soit $(a_1,a_2,\dots,a_r)$ un chemin qui relie x à y , i.e. $x=a_1$, $y=a_r$ et $(a_i,a_{i+1})\in\Lambda$ pour $1\leq i<r$. Comme $a_1\neq a_r$, il existe un plus grand entier $j<r$ tel que $a_j=a_1$. Ainsi $a_j\notin\{a_{j+1},a_{j+2},\dots,a_r\}$ et $(a_{j+1},a_{j+2},\dots,a_r)$ est un chemin qui relie $a_1=a_j=x$ à $a_r=y$ avec les propriétés du lemme.

Remarque Les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) L'ensemble des sommets du graphe $G(\Lambda)$ est $\{1,2,\dots,n\}$,
ii) $\{k\in\{1,2,\dots,n\}\mid t(k)=k$ pour tout $t\in\Lambda\}=\emptyset$.

[Fr. E.] **Fresnel J.** *Groupes* (Hermann 2001)

p.216 IV.4. complément

Existence de polynômes homogènes à deux variables, à coefficients dans un anneau A et prenant des valeurs inversibles sur une partie finie de A^2

Introduction

Soit A un anneau commutatif, unitaire, $A^\times$ le groupe des inversibles de A , $m \geq 1$,
$P(X,Y) = a_0 Y^m + a_1 X Y^{m-1} + \ldots + a_m X^m \in A[X,Y]$, un polynôme homogène à coefficients dans A , de degré m .
Soit $(x,y) \in A^2$, avec $P(x,y) \in A^\times$, alors on a $xA+yA=A$; sinon il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A tel que $xA+yA \subset \mathfrak{M}$, il suit facilement de cela que $P(x,y) \in \mathfrak{M}$, ce qui est en contradiction avec $P(x,y) \in A^\times$. Réciproquement si $xA+yA=A$, on a $u,v \in A$ avec $ux+vy=1$, si donc $W(X,Y) := uX+vY$, alors $W(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré 1 avec $W(x,y)=1$. En termes simples, si un couple $(x,y) \in A^2$ satisfait une relation de Bézout, c'est équivalent à l'existence d'un polynôme homogène $W(X,Y) \in A[X,Y]$, de degré 1 tel que $W(x,y)=1$ et en particulier $W(x,y) \in A^\times$.
Le premier problème que l'on traite ici se généralise de la façon qui suit.
Quels sont les anneaux A pour lesquels la propriété ci-après est toujours satifaite.
Soient $n \geq 1$, $(x_i,y_i) \in A^2$ avec $1 \leq i \leq n$, et $x_iA+y_iA=A$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors il existe $P(X,Y) \in A[X,Y]$ avec $P(X,Y)$ homogène, $\deg P(X,Y) \geq 1$ et $P(x_i,y_i) \in A^\times$ pour $1 \leq i \leq n$.
Nous répondons à cela avec la proposition 1 qui suit.

Le second problème que l'on traite ici se généralise de la façon qui suit.
Quels sont les anneaux A *pour lesquels la propriété ci-après est toujours satifaite.*
Soient $n \geq 1$, $(x_i, y_i) \in A^2$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *, et* $x_i A + y_i A = A$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *. Alors il existe* $P(X,Y) \in A[X,Y]$ *avec* $P(X,Y)$ *homogène,* $\deg P(X,Y) \geq 1$ *et* $P(x_i, y_i) = 1$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *.*
Nous répondons à cela avec la proposition 2 qui suit.

Proposition 1 *Soient* A *un anneau commutatif, unitaire,* $A^\times$ *le groupe des inversibles de* A *. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Pour tout $z \in A$ *, soit* $\rho_z : A \to \frac{A}{zA}$ *la surjection canonique, alors le groupe quotient* $\frac{(\rho_z(A))^\times}{\rho_z(A^\times)}$ *est de torsion ; ici* $(\rho_z(A))^\times$ *désigne le groupe des inversibles de* $\rho_z(A)$*,*
ii) pour tout $a, b \in A$ *avec* $aA + bA = A$ *, il existe* $N \geq 1$ *,* $\lambda \in A$ *avec* $b^N - \lambda a \in A^\times$*,*
iii) pour tout $n \geq 1$ *et pour toute famille finie* $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ *d'éléments de* A^2 *avec* $x_i A + y_i A = A$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *, il existe un polynôme* $P(X,Y) \in A[X,Y]$ *(qui dépend de la famille) avec* $P(X,Y)$ *homogène,* $\deg P(X,Y) \geq 1$ *et* $P(x_i, y_i) \in A^\times$*, pour* $1 \leq i \leq n$*.*

Démonstration (par récurrence sur n)
0) L'équivalence entre *i*) et *ii*) est immédiate.

1) Montrons *ii*) implique *iii*) (par récurrence sur n).

1.1) Le cas $n = 1$, c'est la relation $x_1 A + y_1 A = A$ qui dit qu'il existe $u, v \in A$ avec $u x_1 + v y_1 = 1$; ainsi $P(X,Y) = uX + vY$ convient.

On suppose l'implication ii) donne iii) satisfaite pour n .
On a donc $P(X,Y) \in A[X,Y]$ *homogène,* $\deg P(X,Y) \geq 1$ *et*
$P(x_i, y_i) \in A^\times$ *pour* $1 \leq i \leq n$.
Quitte à changer $P(X,Y)$ *en* $P(X,Y)^\alpha$, $\alpha \geq 1$, *on peut supposer que* $\deg P(X,Y) \geq n$ *; en effet, sachant que* $P(X,Y)$ *est homogène et que* $P(x_1, y_1)^\alpha \in A^\times$ *, donc* $P(X,Y)^\alpha \neq 0$ *, on a*
$\deg P(X,Y)^\alpha = \alpha \deg P(X,Y)$.

1.2) Soit $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in A^2$ et $x_{n+1}A + y_{n+1}A = A$.
On a donc $W(X,Y) \in A[X,Y]$ homogène de degré 1 avec $W(x_{n+1}, y_{n+1}) = 1$. Soit $Q(X,Y) := \prod_{i=1}^{n} (y_i X - x_i Y)$.
Soient $b := P(x_{n+1}, y_{n+1})$, $a := Q(x_{n+1}, y_{n+1})$.
Montrons que $aA + bA = A$.
Supposons le contraire, il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A tel que $aA + bA \subset \mathfrak{M}$.
Soit $\rho : A \to \frac{A}{\mathfrak{M}}$ la surjection canonique, on a donc $\rho(a) = 0$, ce qui veut dire que $\prod_{i=1}^{n} \rho(y_i x_{n+1} - x_i y_{n+1}) = 0$, sachant que $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est un corps , cela veut dire qu'il existe i avec $1 \leq i \leq n$ tel que $\rho(y_i x_{n+1} - x_i y_{n+1}) = 0$. Alors il existe $\lambda \in A$ tel que

(1) $$(\rho(x_{n+1}, \rho(y_{n+1})) = \rho(\lambda)(\rho(x_i), \rho(y_i)) \text{ avec } \rho(\lambda) \neq 0 .$$

En effet, comme $x_i A + y_i A = A$, on a
$\rho(x_i)\rho(A) + \rho(y_i)\rho(A) = \rho(A)$, cela implique
$(\rho(x_i), \rho(y_i)) \neq (0,0)$; ainsi il existe $\lambda \in A$ tel que

$$(\rho(x_{n+1}, \rho(y_{n+1})) = \rho(\lambda)(\rho(x_i), \rho(y_i)) .$$

Comme $x_{n+1}A + y_{n+1}A = A$, on a on a $u, v \in A$ avec $x_{n+1}u + y_{n+1}v = 1$, donc $\rho(x_{n+1})\rho(u) + \rho(y_{n+1})\rho(v) = 1$ et alors $\rho(\lambda)(\rho(x_i)\rho(u) + \rho(y_i)\rho(v)) = 1$; ce qui montre que $\rho(\lambda) \neq 0$.
Sachant que $P(x_i, y_i) = \varepsilon_i \in A^\times$, on a donc
$\rho(P(x_i, y_i)) = \rho(\varepsilon_i) \in (\rho(A))^\times$; il suit facilement de (1) que

(2) $\rho(P(x_{n+1},y_{n+1}))=\rho(\lambda)^{\deg P}\rho(P(x_i,y_i))=\rho(\lambda)^{\deg P}\rho(\varepsilon_i)\neq 0$,
où $\varepsilon_i=P(x_i,y_i)\in A^{\times}$.
Ainsi $\rho(b)\neq 0$ et donc $b\notin\mathfrak{M}$; ce qui est une contradiction.
On a bien $aA+bA=A$.

1.3) Il suit alors de l'hypothèse *ii*) qu'il existe $N\geq 1$, $\varepsilon\in A^{\times}$, $\lambda\in A$ avec
$b^N-\lambda a=\varepsilon$.
Soit alors $R(X,Y):=P(X,Y)^N-\lambda Q(X,Y)\,W(X,Y)^{N\deg P-n}$.
Facilement $R(x_i,y_i)\in A^{\times}$ pour $1\leq i\leq n$. Cela montre d'une part que $R(X,Y)\neq 0$ et que $R(X,Y)$ est homogène de degré $N\deg P(X,Y)\geq 1$. De plus
$R\ (x_{n+1},y_{n+1})=b^N-\lambda a=\varepsilon$; ce qui montre *iii*) pour $n+1$.

2) Pour montrer que *iii*) implique *ii*) , il suffit de montrer que non *ii*) implique non *iii*).
On suppose donc qu'il existe $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$ et que pour tout $N\geq 1$ et pour tout $\lambda\in A$, on a $b^N-\lambda a\notin A^{\times}$. Suposons qu'il existe un polynôme homogène $P(X,Y)\in A[X,Y]$, de degré $n\geq 1$ avec $P(0,1)\in A^{\times}$ et $P(a,b)\in A^{\times}$. On a donc $P(X,Y)=a_0Y^n+a_1XY^{n-1}+...+a_nX^n$. Alors $P(0,1)=\varepsilon_1\in A^{\times}$ veut dire que $\varepsilon_1=a_0\in A^{\times}$ et en plus $P(a,b)=\varepsilon_2\in A^{\times}$ impliquent que $\varepsilon_2=\varepsilon_1 b^n+\mu a$ avec $\mu\in A$; cela montre que
$b^n+(\varepsilon_1)^{-1}\mu a=\varepsilon_2(\varepsilon_1)^{-1}$; ce qui est une contradiction.

Proposition 2 *Soit* A *un anneau commutatif, unitaire,* $A^{\times}$ *le groupe des inversibles de* A *. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) *Pour tout* $z\in A$ *, le groupe des inversibles de* $\frac{A}{zA}$ *est de torsion,* i.e. *tout élément du groupe des inversibles de* $\frac{A}{zA}$ *est d'ordre fini,*

ii) pour tout $a, b \in A$ *avec* $aA + bA = A$ *, il existe* $N \geq 1$ *,* $\lambda \in A$ *avec* $b^N - \lambda a = 1$ *,*
iii) pour tout $n \geq 1$ *et pour toute famille finie* $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ *d'éléments de* A^2 *avec* $x_i A + y_i A = A$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *, il existe un polynôme* $P(X,Y) \in A[X,Y]$ *(qui dépend de la famille) avec* $P(X,Y)$ *homogène,* $\deg P(X,Y) \geq 1$ *et* $P(x_i, y_i) = 1$*, pour* $1 \leq i \leq n$ *.*

Démonstration (par récurrence sur n)
0) L'équivalence entre $i)$ et $ii)$ est immédiate.

1) Montrons $ii)$ implique $iii)$ (par récurrence sur n).

1.1) Le cas $n = 1$, c'est la relation $x_1 A + y_1 A = A$ qui dit qu'il existe $u, v \in A$ avec $u x_1 + v y_1 = 1$; ainsi $P(X,Y) = uX + vY$ convient.
On suppose l'implication ii) donne iii) satisfaite pour n *.*
On a donc $P(X,Y) \in A[X,Y]$ *homogène,* $\deg P(X,Y) \geq 1$ *et* $P(x_i, y_i) = 1$ *pour* $1 \leq i \leq n.$
Quitte à changer $P(X,Y)$ *en* $P(X,Y)^\alpha$ *,* $\alpha \geq 1$ *, on peut supposer que* $\deg P(X,Y) \geq n$ *; en effet, sachant que* $P(X,Y)$ *est homogène et que* $P(x_1, y_1)^\alpha = 1$ *, donc* $P(X,Y)^\alpha \neq 0$ *, on a* $\deg P(X,Y)^\alpha = \alpha \deg P(X,Y)$ *.*

1.2) Soit $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in A^2$ et $x_{n+1} A + y_{n+1} A = A$.
On a donc $W(X,Y) \in A[X,Y]$ homogène de degré 1 avec $W(x_{n+1}, y_{n+1}) = 1$. Soit $Q(X,Y) := \prod_{i=1}^{n} (y_i X - x_i Y)$.
Soient $b := P(x_{n+1}, y_{n+1})$, $a := Q(x_{n+1}, y_{n+1})$.
Montrons que $aA + bA = A$.
Le démonstration est analogue à celle de la proposition 1.

1.3) Il suit alors de l'hypothèse *ii*) qu'il existe $N \geq 1$, $\varepsilon \in A^{\times}$, $\lambda \in A$ avec $b^N - \lambda a = 1$.
Soit alors $R(X,Y) := P(X,Y)^N - \lambda Q(X,Y)\, W(X,Y)^{N \deg P - n}$.
Facilement $R(x_i, y_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Cela montre d'une part que $R(X,Y) \neq 0$ et que $R(X,Y)$ est homogène de degré $N \deg P(X,Y) \geq 1$. De plus
$R(x_{n+1}, y_{n+1}) = b^N - \lambda a = 1$; ce qui montre *iii*) pour $n+1$.

2) Pour montrer que *ii*) implique *iii*) , il suffit de montrer que non *ii*) implique non *iii*).
On suppose donc qu'il existe $a, b \in A$ avec $aA + bA = A$ et que pour tout $N \geq 1$ et pour tout $\lambda \in A$, on a $b^N - \lambda a \neq 1$. Suposons qu'il existe un polynôme homogène $P(X,Y) \in A[X,Y]$, de degré $n \geq 1$ avec $P(0,1) = 1$ et $P(a,b) = 1$. On a donc
$P(X,Y) = a_0 Y^n + a_1 X Y^{n-1} + \ldots + a_n X^n$. Alors $a_0 = P(0,1) = 1$ et en plus $P(a,b) = 1$ impliquent qu'il existe $\mu \in A$ avec
$b^n = 1 + \mu a$; ce qui est une contradiction.

Remarque 1 *Exemples d'anneaux satisfaisant le i) de la proposition 1, on dira satisfaisant* P1.

0. Un corps satisfait P1.
1. Soit $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$ avec $A_k \subset A_{k+1}$ pour $k \geq 1$ et A_k satisfaisant P1 pour tout $k \geq 1$. Alors A satisfait P1. Plus généralement une limite inductive d'anneaux satisfaisant P1 , satisfait P1.
2. La clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans un corps extension finie de $\mathbb{Q}$ satifait P1.
La clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}^{alg}$ satifait P1.
3. Si les anneaux $A_1, A_2, \ldots, A_r$ satisfont P1, il en est de même de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$.

Remarque 2 *Exemples d'anneaux satisfaisant le* $i)$ *de la proposition 2, on dira satisfaisant* P2.

1. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers.
2. L'anneau A des entiers d'une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$; en effet le théorème de Dirichlet montre que $A^{\times}$ est fini et par ailleurs, si $z \neq 0$, l'anneau $\frac{A}{zA}$ est fini.
3. Soient $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, $(\mathbb{F}_p)^{alg}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, L un sous-corps de $(\mathbb{F}_p)^{alg}$.
Alors L satifait P2.
4. Soit L comme ci-dessus, alors l'anneau des polynômes $L[T]$ satisfait P2.
5. Soit $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$ avec $A_k \subset A_{k+1}$ pour $k \geq 1$ et A_k satisfaisant P2 pour tout $k \geq 1$. Alors A satisfait P2. Plus généralement une limite inductive d'anneaux satisfaisant P2 , satisfait P2.
6. Si les anneaux $A_1, A_2, \ldots, A_r$ satisfont P2, il en est de même de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$.
7. (un exemple non noethérien en caractéristique nulle) Soit A le sous-anneau de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites constantes à partir d'un certain rang ; clairement cet anneau est unitaire. Si x est la suite $(x_k)_{k \geq 0}$, alors $\frac{A}{xA} \simeq \prod_{k \geq 0} \frac{\mathbb{Z}}{x_k \mathbb{Z}}$. Comme tous les $\frac{\mathbb{Z}}{x_k \mathbb{Z}}$ sont tous égaux à partir d'un certain rang, il suit que le groupe des inversibles de $\frac{A}{xA}$ est de torsion.
Par ailleurs, soit $\mathfrak{A}$ l'idéal des suites nulles à partir d'un certain rang ; facilement cet idéal n'est pas de type fini.
8. (un exemple non noethérien en caractéristique p) Soient K un corps fini et $A := K^{\mathbb{N}}$. Soit $x = (x_k)_{k \geq 0}$, $S := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 0\}$, alors $\frac{A}{xA} \simeq K^S$, il suit de cela que le groupe des inversibles de $\frac{A}{xA}$ est de torsion.

Par ailleurs, soit $\mathfrak{A}$ l'idéal des suites nulles à partir d'un certain rang ; facilement cet idéal n'est pas de type fini.

Remarque 3 *Exemples d'anneaux qui ne satisfont pas* P2.
L'anneau A des entiers d'une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$; en effet le théorème de Dirichlet montre que $A^{\times}$ n'est pas de torsion.
L'anneau A des entiers d'une extension de $\mathbb{Q}$ de degré ≥ 3 ; là encore le théorème de Dirichlet montre que $A^{\times}$ n'est pas de torsion.
Tout corps de caractéristique nulle.
Tout corps de caractéristique p qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{F}_p$.
L'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[T]$. Par exemple pour $z := 1-2T$, l'image de 2 dans $\frac{\mathbb{Z}[T]}{z\mathbb{Z}[T]}$ est un inversible d'ordre infini ; pour $z := T^2$, l'image de $1+T$ dans $\frac{\mathbb{Z}[T]}{z\mathbb{Z}[T]}$ est un inversible d'ordre infini.

p.246 IV.8.1. même complément que p. 121

p.247, ligne 5, lire
que $\rho e^{i\theta} \in \mathbb{U}_d$, ainsi $G \subset \mathbb{U}_d$ et comme $o(G) = o(\mathbb{U}_d)$, on a $G = \mathbb{U}_d$.

p. 249 complément à IV.8.2.
Dans la partie 2 du théorème on montre que la somme des racines du n-ième polynôme cyclotomique est $\mu(n)$, i.e. la valeur en n de la fonction de Möbius.
De façon plus générale, on peut évaluer la somme des puissances h-ièmes des racines du n-ième polynôme cyclotomique.
C'est ce qui suit

Sommes de Newton relatives aux racines du polynôme cyclotomique

Soit $n>0$ un entier. On note U_n le sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ constitué des racines n-ièmes de l'unité et U'_n le sous-ensemble de U_n constitué des éléments d'ordre n . Par définition le n-ième polynôme cyclotomique est $\Phi_n(X) := \prod_{z\in U'_n} (X-z)$.
Soit $h\in\mathbb{N}$, on appelle h-ième somme de Newton relative aux racines du polynôme cyclotomique Φ_n , l'expression $p_h(n) := \sum_{z\in U'_n} z^h$; l'expression $p_h(n)$ est aussi appelée somme de Ramanujan.

Proposition *Soient* $n>0$, $h\geq 0$ *des entiers ,* $p_n(h)$ *la* h*-ème somme de Newton relative aux racines du polynôme cyclotomique* Φ_n *. Alors on a*

$$p_h(n) = \sum_{d\,|\,\mathrm{pgcd}(n,h)} d\mu(\tfrac{n}{d}) = \frac{\mu(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})\,\varphi(n)}{\varphi(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})}.$$

Démonstration
On s'intéresse tout d'abord à la formule $p_h(n) = \sum_{d\,|\,\mathrm{pgcd}(n,h)} d\mu(\frac{n}{d})$.
1) Facilement, on a $U_n = \bigcup_{d\,|\,n} U'_d$. Il suit de cela que $\sum_{d\,|\,n} p_h(d) = \sum_{z\in U_n} z^h$. Il suit de cela que $\sum_{d\,|\,n} p_h(d) = 0$ si $h\nmid n$ et que $\sum_{d\,|\,n} p_h(d) = n$ si $h\,|\,n$. Alors la formule $p_h(n) = \sum_{d\,|\,\mathrm{pgcd}(n,h)} d\mu(\frac{n}{d})$

est conséquence de la formule d'inversion de Möbius (F. M.] p. 243).

Nous allons ensuite montrer l'égalité $p_h(n) = \frac{\mu(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})\,\varphi(n)}{\varphi(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})}$.

Posons $\theta(n) := \frac{\mu(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})\,\varphi(n)}{\varphi(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})}$. Si $1 = \mathrm{pgcd}(n,m)$ on a facilement
$\theta(n\,m) = \theta(n)\,\theta(m)$ (on dit souvent que la fonction θ est multiplicative). On va montrer que sous les mêmes hypothèses, on a de même
$p_h(n\,m) = p_h(n)\,p_h(m)$. Il suffira alors de vérifier que $\theta(q^k) = p_h(q^k)$ pour tout premier q et tout entier $k \geq 0$.

2) Montrons que p_h est une fonction multiplicative. Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$. Soit $f : U_m \times U_n \to U_{mn}$ l'application définie par $f(z,z') := z\,z'$. Facilement f est un homomorphisme de groupes. Montrons que f est injectif. Soit $(z,z') \in \ker f$, i.e. $z\,z' = 1$. On considère une relation de Bézout $1 = u\,m + v\,n$, on a donc $z^{(1-u\,m)}\,(z')^{v\,n} = 1$, i.e. $z = 1$ et aussi $z' = 1$.
Montrons que f induit une bijection de $U'_m \times U'_n$ sur U'_{mn} . Tout d'abord montrons que $f(U'_m \times U'_n) \subset U'_{mn}$. Soient $z \in U'_m$, $z' \in U'_n$ il faut montrer
que $o(z\,z') = m\,n$. Facilement $(z\,z')^{m\,n} = 1$, supposons que $(z\,z')^d = 1$, on a donc $(z\,z')^{d\,m} = 1$ et donc $(z')^{d\,m} = 1$, comme $o(z') = n$, on a $n \mid d\,m$, et comme $1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$ il suit que $n \mid d$. De façon analogue $m \mid d$ et comme $1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$ il suit que $m\,n \mid d$; ce qui montre que
$o(z\,z') = m\,n$. Ainsi f induit une injection de $U'_m \times U'_n$ dans U'_{mn} .
Sachant que

$$\mathrm{card}\,(U'_m \times U'_n) = \mathrm{card}\,(U'_m)\,\mathrm{card}\,(U'_n) = \mathrm{card}\,(U'_{mn}) ,$$

il suit que f induit une bijection de $U'_m \times U'_n$ sur U'_{mn}.
Soit toujours $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$. Alors $p_h(m)\, p_h(n) = (\sum_{z \in U'_m} z^h)(\sum_{z \in U'_n} (z')^h) = \sum_{(z,z') \in U'_m \times U'_n} (zz')^h$;
or la bijection de $U'_m \times U'_n$ sur U'_{mn} montre que

$$\sum_{(z,z') \in U'_m \times U'_n} (zz')^h = p_h(mn).$$

Ainsi l'application p_h est multiplicative.

3) Soit q un nombre premier, $k \geq 0$ un entier, calculons $p_h(q^k)$.
On a

$$p_h(q^k) = \sum_{z \in U_{q^k}} z^h - \sum_{z \in U_{q^{k-1}}} z^h .$$

Il suit alors facilement de cette expression que $p_h(q^k) = 0$ si $q^{k-1} \nmid h$, $p_h(q^k) = -q^{k-1}$ si $q^{k-1} \mid h$ et $q^k \nmid h$ et enfin $p_h(q^k) = q^k - q^{k-1}$ si $q^k \mid h$.
On vérifie facilement qu'on a les mêmes formules pour la fonction θ.

Remarque 1 On pourra vérifier directement que l'expression $\dfrac{\mu(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})\, \varphi(n)}{\varphi(\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,h)})}$ est un élément de $\mathbb{Z}$; en effet cela résulte simplement du fait que si $a \mid b$, alors $\varphi(a) \mid \varphi(b)$.

Remarque 2 Les formules de Newton permettent de calculer les coefficients du n-ième polynôme cyclotomique en fonction de sommes de Ramanujan $p_1(n), p_2(n), \ldots, p_{\varphi(n)}(n)$ ([F. M.] p. 327). Toutefois l'expression obtenue ne semble pas être facilement utilisable ; en particulier elle ne saurait permettre d'obtenir le résultat de Schur au 5. du théorème de la page 249.

[F. M.] **Fresnel J. & Matignon M.** *Algèbre et Géométrie,* Hermann 2011

p. 270 IV.14 nouvelle version

Proposition 1 *Soient A un anneau, commutatif, unitaire. On suppose que le groupe $A^{\times}$ des inversibles de A est fini et que le nombre d'idéaux maximaux de A est fini. Alors A est un anneau fini.*

Démonstration

1) Soit $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_r\}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A avec $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{M}_j$ si $i \neq j$. Soit $\rho_i : A \to \frac{A}{\mathfrak{M}_i}$ la surjection canonique et $\rho : A \to \frac{A}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{A}{\mathfrak{M}_2} \times \ldots \times \frac{A}{\mathfrak{M}_r}$ l'application diagonale définie par $\rho(x) := (\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots, \rho_r(x))$, alors $\ker \rho = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$.

2) *Montrons que ρ est surjectif.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_r \in A$, il faut donc montrer qu'il existe $x \in A$ avec $x - x_i \in \mathfrak{M}_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Tout d'abord, on a

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r + \ldots + \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{r-1} = A .$$

Sinon l'idéal $\mathfrak{A}$ est contenu dans un idéal maximal, disons par exemple $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_1$, cela implique facilement que $\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{M}_1$. Comme $\mathfrak{M}_2 \neq \mathfrak{M}_1$ il existe $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ et $x_2 \notin \mathfrak{M}_1$, de même il existe $x_3 \in \mathfrak{M}_3$ et $x_3 \notin \mathfrak{M}_1$, ..., il existe $x_r \in \mathfrak{M}_r$ et $x_r \notin \mathfrak{M}_1$. Clairement $x_2 x_3 \ldots x_r \in \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, ainsi $x_2 x_3 \ldots x_r \in \mathfrak{M}_1$; comme $\mathfrak{M}_1$ est maximal, donc premier, il existe i avec $2 \leq i \leq r$ avec $x_i \in \mathfrak{M}_1$, ce qui est une contradiction.

En conséquence de cela, il existe $y_1 \in \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, $y_2 \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, ..., $y_r \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{r-1}$ avec $y_1 + y_2 + \ldots + y_r = 1$. Comme $y_2, y_3, \ldots, y_r \in \mathfrak{M}_1$, on a $y_1 - 1 \in \mathfrak{M}_1$. Soit $x := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_r y_r$, on a donc

$$x - x_1 = x_1(y_1 - 1) + x_2 y_2 + \ldots + x_r y_r \ ;$$

il suit donc de ce qui précède que $x - x_1 \in \mathfrak{M}_1$. On montrerait de même que $x - x_i \in \mathfrak{M}_i$ pour $1 \leq i \leq r$.

3) *Montrons que* $1+\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r \subset A^\times$.
En effet, soit $z \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, alors $1+z \in A^\times$, sinon, il est contenu dans un maximal, disons $1+z \in \mathfrak{M}_1$, et comme $z \in \mathfrak{M}_1$, cela implique que $1 \in \mathfrak{M}_1$, ce qui est exclu.
En particulier, comme $A^\times$ est fini, il suit que
$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$ est fini.

4) *Montrons que* ρ *induit un homomorphisme*
$\rho^\times : A^\times \to (\frac{A}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{A}{\mathfrak{M}_2} \times \ldots \times \frac{A}{\mathfrak{M}_r})^\times$ *qui est surjectif.*
En effet soient $a, b \in A$ tels que $\rho(a)\rho(b) = \rho(1)$, on a donc $ab - 1 \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, i.e. $ab \in 1+\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$, il suit de 3) que $a, b \in A^\times$, ça montre bien que $\rho^\times$ est surjectif, ainsi $(\frac{A}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{A}{\mathfrak{M}_2} \times \ldots \times \frac{A}{\mathfrak{M}_r})^\times = (\frac{A}{\mathfrak{M}_1})^\times \times (\frac{A}{\mathfrak{M}_2})^\times \times \ldots \times (\frac{A}{\mathfrak{M}_r})^\times$ est fini, et comme $(\frac{A}{\mathfrak{M}_i})^\times = \frac{A}{\mathfrak{M}_i} - \{0\}$, il suit que $\frac{A}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{A}{\mathfrak{M}_2} \times \ldots \times \frac{A}{\mathfrak{M}_r}$ est fini.
Sachant par 3) que $\ker \rho$ est fini, il suit que A est fini.

Corollaire *Soient* A *un anneau, commutatif, unitaire. On suppose que le groupe* $A^\times$ *des inversibles de* A *est fini. Alors* A *est un anneau fini ou le nombre d'idéaux maximaux de* A *est infini.*

Remarque de terminologie Un anneau commutatif unitaire A est dit *local* (resp. *semi-local*) s'il possède un unique idéal maximal (resp. un nombre fini d'idéaux maximaux).

Ainsi la proposition précédente dit qu'un anneau commutatif semi-local A dont le groupe $A^\times$ des inversibles est fini est un anneau fini. Bien entendu tout anneau commutatif fini est semi-local.

On possède beaucoup d'exemples d'anneaux commutatifs finis. Par exemple $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ si $m \neq 0$, $\frac{K[T]}{P(T)K[T]}$ si K est un corps fini et si $P(T) \neq 0$.

Proposition 2 *Soit A un anneau commutatif fini. Alors A est isomorphe à un produit fini d'anneaux locaux.*

Démonstration (ce n'est autre chose que le théorème des restes chinois, [Fr] ex. 1.9.14 p. 48).

1) *Le radical de Jacobson est nilpotent.*
Soient $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_r\}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A, avec $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{M}_j$ si $i \neq j$, $\mathfrak{R} := \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_r$; il s'agit de montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{R}^k = \{0\}$. Clairement la suite $(\mathfrak{R}^k)_k$ est décroissante, elle est donc
stationnaire, ce qui veut dire qu'il existe k avec $\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+1}$. Il faut en conclure que $\mathfrak{R}^k = \{0\}$.
Si ce n'est pas le cas, on a $\mathfrak{R}^k = A\,e_1 + A\,e_2 + \ldots + A\,e_s$, avec $s \geq 1$ et on suppose que la famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ est génératrice minimale. De $\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+1}$, il suit que
$\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}\,e_1 + \mathfrak{R}\,e_2 + \ldots + \mathfrak{R}\,e_s$, ainsi $e_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s$, avec $\lambda_i \in \mathfrak{R}$. Soit $(1-\lambda_1)\,e_1 = \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \ldots + \lambda_s e_s$;
facilement $1-\lambda_1 \notin \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{M}_r$, ainsi $1-\lambda_1 \in A^\times$ ce qui implique que $e_1 \in A\,e_2 + A\,e_3 + \ldots + A\,e_s$. Ce qui contredit la minimalité de la famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$.
En conclusion on a bien $\mathfrak{R}^k = \{0\}$ (cette démonstration n'est autre chose que celle du lemme de Nakayama, [Fr] lemme 8.2.1 , p. 300).

2) *Soit $t \geq 1$, alors on a $\mathfrak{M}_1^t \mathfrak{M}_2^t \ldots \mathfrak{M}_r^t = \mathfrak{M}_1^t \cap \mathfrak{M}_2^t \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r^t$.*
Il suffit de montrer l'égalité
$$\mathfrak{M}_1^t \mathfrak{M}_2^t \ldots \mathfrak{M}_h^t = \mathfrak{M}_1^t \cap \mathfrak{M}_2^t \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_h^t$$
par récurrence sur h . L'égalité pour $h=1$ est triviale, on suppose $h<r$ et on veut passer de h à $h+1$.
Montrons d'abord que

(1) $$\mathfrak{M}_1^t \mathfrak{M}_2^t \ldots \mathfrak{M}_h^t + \mathfrak{M}_{h+1}^t = A .$$

Sinon, il existe un maximal $\mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}_1^t\mathfrak{M}_2^t\ldots\mathfrak{M}_h^t+\mathfrak{M}_{h+1}^t\subset\mathfrak{M}$; ça montre qu'il existe $i\leq h$ avec $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_{h+1}\subset\mathfrak{M}$, ce qui est impossible.
En conclusion, on a

(2) $\quad u\in\mathfrak{M}_1^t\mathfrak{M}_2^t\ldots\mathfrak{M}_h^t$ et $v\in\mathfrak{M}_{h+1}^t$ avec $u+v=1$.

L'inclusion

$$\mathfrak{M}_1^t\mathfrak{M}_2^t\ldots\mathfrak{M}_h^t\mathfrak{M}_{h+1}^t\subset\mathfrak{M}_1^t\cap\mathfrak{M}_2^t\cap\ldots\cap\mathfrak{M}_t^t\cap\mathfrak{M}_{h+1}^t$$

est immédiate.
Soit maintenant $x\in(\mathfrak{M}_1^t\cap\mathfrak{M}_2^t\cap\ldots\cap\mathfrak{M}_h^t)\cap\mathfrak{M}_{h+1}^t$. Il suit de (2) $x=x.1=x\,u+x\,v$, facilement $x\,u\in\mathfrak{M}_1^t\mathfrak{M}_2^t\ldots\mathfrak{M}_h^t\mathfrak{M}_{h+1}^t$ et compte tenu de l'hypothèse de récurrence $x\,v\in\mathfrak{M}_1^t\mathfrak{M}_2^t\ldots\mathfrak{M}_h^t\mathfrak{M}_{h+1}^t$.
Ainsi, on a l'autre inclusion.

3) Soient k défini en 1), $\rho_i:A\to\dfrac{A}{\mathfrak{M}_i^k}$ la surjection canonique pour $1\leq i\leq r$ et $\rho:A\to\dfrac{A}{\mathfrak{M}_1^k}\times\dfrac{A}{\mathfrak{M}_2^k}\times\ldots\times\dfrac{A}{\mathfrak{M}_r^k}$ l'application diagonale définie par $\rho(x):=(\rho_1(x)\,,\rho_1(x)\,,\ldots,\rho_1(x))$. On a donc $\ker\rho=\mathfrak{M}_1^k\cap\mathfrak{M}_2^k\cap\ldots\cap\mathfrak{M}_r^k$. Il suit donc de 1) et 2) que $\ker\rho=\{0\}$.
Il reste à montrer que ρ est surjectif et que $\dfrac{A}{\mathfrak{M}_i^k}$ est local pour $1\leq i\leq r$.
Montrons que

(3) $\mathfrak{A}:=\mathfrak{M}_2^k\mathfrak{M}_3^k\ldots\mathfrak{M}_r^k+\mathfrak{M}_1^k\mathfrak{M}_3^k\ldots\mathfrak{M}_r^k+\ldots+\mathfrak{M}_1^k\mathfrak{M}_2^k\ldots\mathfrak{M}_{r-1}^k=A$.

Supposons le contraire, on a par exemple $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{M}_1$, cela implique $\mathfrak{M}_2^k\mathfrak{M}_3^k\ldots\mathfrak{M}_r^k\subset\mathfrak{M}_1$, il suit de cela qu'il existe i avec $2\leq i\leq r$ avec $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}_1$, ce qui est impossible.
Il suit donc qu'il existe

$$x_1\in\mathfrak{M}_2^k\mathfrak{M}_3^k\ldots\mathfrak{M}_r^k,\ x_2\in\mathfrak{M}_1^k\mathfrak{M}_3^k\ldots\mathfrak{M}_r^k,\ldots,x_r\in\mathfrak{M}_1^k\mathfrak{M}_2^k\ldots\mathfrak{M}_{r-1}^k$$

tels que

(4) $$1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_r \, .$$
Soient $y_1, y_2, \ldots, y_r \in A$, il faut montrer qu'il existe $y \in A$ avec $y - y_i \in \mathfrak{M}_i^k$ pour $1 \leq i \leq r$.
Montrons que
$$y := y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_r x_r$$
convient. On a
$$y - y_1 = y_1(1 - x_1) + y_2 x_2 + \ldots + y_r x_r \, ,$$
or $y_i x_i \in \mathfrak{M}_1^k$ pour $2 \leq i \leq r$.
De plus de la relation (4) , on a aussi $1 - x_1 \in \mathfrak{M}_1^k$. Ainsi $y - y_1 \in \mathfrak{M}_1^k$. On aurait de même $y - y_i \in \mathfrak{M}_i^k$ pour $2 \leq i \leq r$.

4) Il reste à montrer que $\dfrac{A}{\mathfrak{M}_i^k}$ est local. En effet si $\mathfrak{N}$ est un idéal maximal de $\dfrac{A}{\mathfrak{M}_i^k}$, alors $\rho_i^{-1}(\mathfrak{N})$ est idéal premier de A avec $\mathfrak{M}_i^k \subset \rho_i^{-1}(\mathfrak{N})$. Il suit de cela que $\mathfrak{M}_i \subset \rho_i^{-1}(\mathfrak{N})$ et comme $\mathfrak{M}_i$ est maximal, on a bien $\mathfrak{M}_i = \rho_i^{-1}(\mathfrak{N})$, ce qui veut dire que $\mathfrak{N} = \rho_i(\mathfrak{M}_i)$. Ainsi $\rho_i(\mathfrak{M}_i)$ est l'unique idéal maximal de $\dfrac{A}{\mathfrak{M}_i^k}$.

[Fr] Fresnel J. *Anneaux* (Hermann 2001)

p. 302 paragraphe V.2.1.

La démonstration de 2) de la ligne -4 p. 302 à la ligne 16 p. 303.

On peut avantageusement remplacer cette démonstration (qui est juste) par la suivante.

Par ([Fr. F] théorème 7.7.1.7. p. 268) on sait que
$$R(X) = F(X,Y)\,U(X,Y) + G(X,Y)\,V(X,Y)$$
avec $(U(X,Y), V(X,Y) \neq (0,0)$ et $\deg_Y U(X,Y) < m$, $\deg_Y V(X,Y) < n$.
Supposons $R(X) = 0$, on a donc

(1) $\quad F(X,Y)\,U(X,Y) = -G(X,Y)\,V(X,Y)$.
Sachant que $\mathbb{C}[X,Y]$ est intègre, on a donc $U(X,Y) \neq 0$ et $V(X,Y) \neq 0$. Et de plus
(2) $\quad \deg_Y F(X,Y) + \deg_Y U(X,Y) = \deg_Y G(X,Y) + \deg_Y V(X,Y)$.
Sachant de plus que $\mathbb{C}[X,Y]$ est factoriel, et que $F(X,Y)$ et $G(X,Y)$ n'ont pas de facteur irréductible en commun, il suit de (1) que $G(X,Y)$ divise $U(X,Y)$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$.
Sachant que $U(X,Y) \neq 0$, cela veut dire que

$$\deg_Y G(X,Y) \leq \deg_Y U(X,Y) ,$$

ce qui est une contradiction.
Ainsi l'hypothèse $R = 0$ est à rejeter.

[Fr. F.] **Fresnel J.** *Anneaux* (Hermann 2001)

p. 306 paragraphe V.2.2.

La démonstration de 3) de la ligne 3 p. 306 à la ligne -2 p. 306.

On peut avantageusement remplacer cette démonstration (qui est juste) par la suivante.

3) Soit $R(X,Y,Z)$ le résultant de $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ en degré n et m considérés comme polynômes de la variable T à coefficients dans $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.
Montrons que $R(X,Y,Z) \neq 0$ et que $\deg R(X,Y,Z) = n\,m$. En

Par ([Fr. F] théorème 7.7.1.7. p. 268) on sait que
$R(X,Y,Z) = \widetilde{F}(X,Y,Z,T)\,U(X,Y,Z,T) + \widetilde{G}(X,Y,Z,T)\,V(X,Y,Z,T)$
avec $(U(X,Y,Z,T), V(X,Y,Z,T)) \neq (0,0)$ et
$\deg_T U(X,Y,Z,T) < m$, $\deg_T V(X,Y,Z,T) < n$.
Supposons $R(X,Y,Z) = 0$, on a donc
(1) $\quad \widetilde{F}(X,Y,Z,T)\,U(X,Y,Z,T) = -\widetilde{G}(X,Y,Z,T)\,V(X,Y,Z,T)$.
Sachant que $\mathbb{C}[X,Y,Z,T]$ est intègre, on a donc

$U(X,Y,Z,T)\neq 0$ et $V(X,Y,Z,T)\neq 0$. Et de plus

(2) $\deg_T \widetilde{F}(X,Y,Z,T) + \deg_T U(X,Y,Z,T) =$

$$\deg_T \widetilde{G}(X,Y,Z,T) + \deg_{YT} V(X,Y,Z,T).$$

Sachant de plus que $\mathbb{C}[X,Y,Z,T]$ est factoriel, et par 2) que $\widetilde{F}(X,Y,Z,T)$ et $\widetilde{G}(X,Y,Z,T)$ n'ont pas de facteur irréductible en commun, il suit de (1) que $\widetilde{G}(X,Y,Z,T)$ divise $U(X,Y,Z,T)$ dans $\mathbb{C}[X,Y,Z,T]$.

Sachant que $U(X,Y,Z,T)\neq 0$, cela veut dire que

$$\deg_T \widetilde{G}(X,Y,Z,T) \leq \deg_T U(X,Y,Z,T) ,$$

ce qui est une contradiction.

Ainsi l'hypothèse $R=0$ est à rejeter.

[Fr. F.] **Fresnel J.** *Anneaux* (Hermann 2001)

Le déterminant d'une matrice de Moore

Définition 0 (l'endomorphisme de Frobenius)
Soient p un nombre premier, $\alpha\geq 1$, $q=p^{\alpha}$ et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. On a donc pour tout $x\in\mathbb{F}_q$, $x^q=x$. Soit L un corps commutatif contenant $\mathbb{F}_q$, alors l'application $F:L\to L$ définie par $F(x):=x^q$ est un $\mathbb{F}_q$–endomorphisme de corps, appelé *endomorphisme de Frobenius.*

Cela résulte en effet du fait que dans un anneau commutatif A de caractéristique p , pour tout $x,y\in A$, on a $(x+y)^p=x^p+y^p$ et par récurrence sur $i\geq 1$, $(x+y)^{p^i}=x^{p^i}+y^{p^i}$ et donc que $(x+y)^q=x^q+y^q$. Et enfin il faut ajouter que pour $x\in\mathbb{F}_q$ on a $x^q=x$.

Définition 1 (un système de représentants des droites de $(\mathbb{F}_q)^n$)
Soient p un nombre premier, $\alpha \geq 1$, $q = p^\alpha$ et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments.
Soient $\mathcal{C}_1 := \{(1,0,\dots,0) \in (\mathbb{F}_q)^n\}$ et pour $2 \leq i \leq n$

$$\mathcal{C}_i := \{(c_1, c_2, \dots, c_n) \in (\mathbb{F}_q)^n \mid (c_1, c_2, \dots, c_{i-1}) \in (\mathbb{F}_q)^{i-1},\ c_i = 1 \text{ et } c_k = 0 \text{ pour } i+1 \leq k \leq n\}$$

et enfin $\mathcal{C}^{(n)} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$.

Définition 2 (le déterminant de Moore)
Soit toujours $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments et soit A un anneau commutatif contenant $\mathbb{F}_q$. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$, alors

$$\mathcal{M}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^q & a_2^q & \dots & a_n^q \\ . & . & \dots & . \\ a_1^{q^{n-1}} & a_2^{q^{n-1}} & \dots & a_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix}$$

s'appelle la *matrice de Moore associée à* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) := \text{dét} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^q & a_2^q & \dots & a_n^q \\ . & . & \dots & . \\ a_1^{q^{n-1}} & a_2^{q^{n-1}} & \dots & a_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix}$$

s'appelle le *déterminant de Moore associé à* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Théorème 1 (O. Ore theorem 10, 1933) *Soient p un nombre premier, $\alpha \geq 1$, $q = p^\alpha$ et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soient L un corps commutatif contenant $\mathbb{F}_q$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in L^n$. Soit $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le déterminant de Moore associé à $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ selon la définition 2 . Soit $\mathcal{C}^{(n)}$ le sous ensemble de $(\mathbb{F}_q)^n$ selon la définition 1 .*
Alors, on a

$$(1)\ \Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{C}^{(n)}} (c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n) .$$

De plus les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) La famille $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *est* $\mathbb{F}_q$*–libre,*
ii) on a $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$.

Démonstration
1) *Remarquons d'abord que si la famille* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *est* $\mathbb{F}_q$*-liée, alors la formule* (1) *est satisfaite. En particulier on a* $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.
En effet, on a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}_q$ non tous nuls avec
$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0 .$$
Il suit en appliquant l'endomorphisme de Frobenius F que
$$c_1 F^i(a_1) + c_2 F^i(a_2) + \dots + c_n F^i(a_n) = 0 ,$$
pour $0 \leq i < n$; ainsi $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.
D'autre part, il existe i avec $c_i \neq 0$ et $c_k = 0$ pour $k > i$. Soit $d_k := \frac{c_k}{c_i}$, on a
$$d_1 a_1 + d_2 a_2 + \dots + d_n a_n = 0$$
et $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathscr{C}^{(n)}$, ce qui montre que le second membre de (1) est nul.
Cela montre bien 1).

2) *On suppose désormais que la famille* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *est* $\mathbb{F}_q$*-libre.*

L'égalité (1) est trivialement satisfaite pour $n = 1$.
Soit $n \geq 2$, on suppose l'égalité (1) satisfaite pour $n - 1$. Ce qui veut dire que si $\mathscr{C}'_1 := \{(1, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{F}_q)^{n-1}\}$ et que pour $2 \leq i \leq n - 1$,
$$\mathscr{C}'_i := \{(c_1, c_2, \dots, c_n) \in (\mathbb{F}_q)^{n-1} \mid (c_1, c_2, \dots, c_{i-1}) \in (\mathbb{F}_q)^{i-1},\ c_i = 1 \text{ et } c_k = 0 \text{ pour } i+1 \leq k \leq n-1\}$$
et enfin $\mathscr{C}^{(n-1)} := \mathscr{C}'_1 \cup \mathscr{C}'_2 \cup \dots \cup \mathscr{C}'_{n-1}$, alors, on a

(2) $\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})=$

$$\prod_{c'=(c'_1,c'_2,\dots,c'_{n-1})\in\mathscr{C}^{(n-1)}}(c'_1a_1+c'_2a_2+\dots+c'_{n-1}a_{n-1}).$$

Enfin, on souhaite montrer la formule (1) pour n .
Sachant que $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est $\mathbb{F}_q$-libre, il suit que $(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ est $\mathbb{F}_q$-libre et alors (2) dit que $\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\neq 0$.

3) Soient X une variable sur L et $P(X):=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},X)\in L[X]$.
On a donc $P(X)=u_0X+u_1X^q+\dots+u_{n-1}X^{q^{n-1}}$, avec $u_i\in L$ et $u_{n-1}=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\neq 0$. Ainsi $P(X)$ est un polynôme de degré q^{n-1} et de coefficient dominant $\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$.
Facilement le sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de L

$$\{c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1} \mid c=(c_1,c_2,\dots,c_{n-1})\in(\mathbb{F}_q)^{n-1}\}$$

est constitué de racines de $P(X)$, comme il est de cardinal q^{n-1} et que $\deg P(X)=q^{n-1}$, il suit donc que

$$P(X)=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\prod_{c\in(\mathbb{F}_q)^{n-1}}(X-(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1}))$$

avec $c=(c_1,c_2,\dots,c_{n-1})$.
Sachant que si $(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1})$ est racine de $P(X)$, alors $-(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1})$ est aussi racine de $P(X)$, on a donc

$$P(a_n)=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\prod_{c\in(\mathbb{F}_q)^{n-1}}(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1}+a_n) ,$$

ce qui veut dire que

$$P(a_n)=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})\prod_{c\in\mathscr{C}_n}(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_{n-1}a_{n-1}+a_n).$$

On a donc bien

$$P(a_n)=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)=\prod_{c=(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathscr{C}^{(n)}}(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_na_n) .$$

Ce qui est est la formule (1).

4) Il suit donc de la formule (1) que si la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est $\mathbb{F}_q$-libre, alors $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. En tenant compte de 1), on a donc l'équivalence entre *i)* et *ii)*.

Théorème 2 ([F.M, 2022] *Soient* p *un nombre premier,* $\alpha \geq 1$ *,* $q = p^{\alpha}$ *et* $\mathbb{F}_q$ *le corps à* q *éléments. Soient* L *un corps commutatif contenant* $\mathbb{F}_q$ *,* $n \geq 2$ *,* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in L^n$ *. Soit* $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *le déterminant de Moore associé à* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *selon la définition 2 et* $\mathcal{M}(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ *la matrice de Moore associée à* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *selon la définition 2. Soit*
$\delta_i := (-1)^{i-1} \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *, i.e. le co-facteur de* a_i *dans la matrice de Moore* $\mathcal{M}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *associée à* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *.*
Soient $\mathcal{M}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ *la matrice de Moore associée à* $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ *selon la définition 2.*
Alors on a
(3) $$\mathcal{M}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\, {}^t\mathcal{M}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$$
avec $m_{1,j} = 0$ *pour* $1 \leq j \leq n-1$ *,* $m_{1,n} = (-1)^{n-1}\Delta$ *,* $m_{2,1} = \Delta$ *, où* $\Delta := \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *et* $m_{2,j} = 0$ *pour* $2 \leq j \leq n$ *.*
(4) *Pour* $3 \leq i \leq n$ *, on a*
$m_{i,j} = (\alpha_{i-j-1})^{q^{j-1}}$ *, si* $1 \leq j \leq i-2$ *, où*
$\alpha_k := a_1(\delta_1)^{q^{k+1}} + a_2(\delta_2)^{q^{k+1}} + \ldots + a_n(\delta_n)^{q^{k+1}}$ *pour* $1 \leq k \leq n-2$ *,*
$m_{i,i-1} = \Delta^{q^i}$ *et* $m_{i,j} = 0$ *pour* $i \leq j \leq n$ *.*
De façon abrégée, on a

(5) $$\mathcal{M}(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)\,{}^t\mathcal{M}(a_1,a_2,\dots,a_n) =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 & (-1)^{n-1}\Delta \\ \Delta & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \Delta^q & 0 & . & 0 & 0 \\ \alpha_2 & (\alpha_1)^q & \Delta^{q^2} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n-2} & . & (\alpha_2)^{q^{n-4}} & (\alpha_1)^{q^{n-3}} & \Delta^{q^{n-2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors en appliquant le déterminant sur la formule (12) *on a*

(6) $$\Delta(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)^{1+q+\dots+q^{n-2}}.$$

Démonstration

1) On peut considérer $(\delta_i)^q$ comme le cofacteur de a_i dans la matrice de Moore associée à $(a_1,a_2,\dots,a_n)$; on a donc les formules suivantes

(7) $$a_1(\delta_1)^q+a_2(\delta_2)^q+\dots+a_n(\delta_n)^q=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

(8) $(a_1)^{q^k}(\delta_1)^q+(a_2)^{q^k}(\delta_2)^q+\dots+(a_n)^{q^k}(\delta_n)^q=0$ pour $1\le k\le n-1$.

On peut aussi considérer δ_i comme le cofacteur de $(a_i)^{q^{n-1}}$, on a donc les formules suivantes

(9) $$(a_1)^{q^{n-1}}\delta_1+(a_2)^{q^{n-1}}\delta_2+\dots+(a_n)^{q^{n-1}}\delta_n = (-1)^{n-1}\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

(10) $(a_1)^{q^k}\delta_1+(a_2)^{q^k}\delta_2+\dots+(a_n)^{q^k}\delta_n=0$ pour $0\le k\le n-2$.

Il suit des relations (9) et (10) que $m_{1,j}=0$ pour $1\le j\le n-1$ et que $m_{1,n}=(-1)^{n-1}\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Soit maintenant $2\le i\le n$.

En élevant (7) à la puissance q^{i-1}, il suit que $m_{i,i-1}=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)^{q^{i-1}}$.

En élevant (8) à la puissance q^{i-1}, il suit que $m_{i,j}=0$ pour $i\le j\le n$.

En conclusion, on a avec $\Delta:=\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$$(11)\quad M=[m_{i,j}]_{1\le i,j\le n}=\begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & (-1)^{n-1}\Delta \\ \Delta & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \Delta^q & 0 & . & . & 0 \\ \alpha_2 & (\alpha_1)^q & \Delta^{q^2} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n-2} & (\alpha_{n-3})^q & . & (\alpha_1)^{q^{n-3}} & \Delta^{q^{n-2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Alors la formule matricielle (3) est satisfaite.

2) Montrons maintenant la formule (6).
En développant le déterminant de M selon la première ligne, on a donc facilement

(12) $\quad$ $\text{dét}M=\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,\text{dét}M'$

avec

$$M'=\begin{bmatrix} \Delta & 0 & . & . & 0 \\ \alpha_1 & \Delta^q & 0 & . & . \\ \alpha_2 & (\alpha_1)^q & \Delta^{q^2} & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{n-2} & (\alpha_{n-3})^q & . & (\alpha_1)^{q^{n-3}} & \Delta^{q^{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

(13) $\quad$ $\text{dét}M=\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{1+q+\ldots+q^{n-2}}$.

Par ailleurs il suit de la relation (3) , i.e.

$$M(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\,{}^tM(a_1,a_2,\ldots,a_n)=[m_{i,j}]_{1\le i,j\le n}=:M\ ,$$

en appliquant le déterminant que

(14) $\quad$ $\Delta(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\,\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\text{dét}M$.

Si donc $\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq 0$, ce qui veut dire par le théorème 1 que la famille $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est $\mathbb{F}_q$-libre, il suit de (13) et (14) que

$$\Delta(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)=\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{1+q+\ldots+q^{n-2}}\ ,$$

ce qui est (6).
On suppose maintenant $\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)=0$, ce qui veut dire par le théorème 1 que la famille $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est $\mathbb{F}_q$-liée. Quitte à permuter les indices on peut supposer que

$a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_n a_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{F}_q$. Il suit alors facilement que $\delta_i = \mu_i \delta_1$ avec $\mu_i \in \mathbb{F}_q$ et $i \geq 2$. Alors le théorème 1 dit que $\Delta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0$. Ainsi les deux membres de (6) sont nuls.
Ce qui montre la formule (6).

Remarque Le théorème 2 est extrait de [F.M] qui analyse l'existence de certains $\mathbb{F}_q$-espaces de formes différentielles de la droite projective sur un corps K contenant $\mathbb{F}_q$. Ceci conduit à prouver une identité reliant le déterminant de la matrice de Moore associée à n indéterminées avec le déterminant de la matrice de Moore associée aux co-facteurs de la première ligne de la précédente. Ces mêmes espaces donnent une interprétation du pairing d'Elkies ([El]) en termes de résidus de formes différentielles.

Bibliographie

[F.M] Fresnel Jean & Matignon Michel *On M-O.Ore determinants,* https://arxiv.org/pdf/2201.02361.pdf

[El] Elkies Noam D. *Linearized algebra and finite groups of Lie type. 1 Linear and symplectic groups. Applications of curves over finite fields (Seattle, WA, 1997) 77-107.* Contemp. Math. , 245, Amer. Math. Soc. Providence. RI, 1999

[Or] Ore Oystein *On a special class of polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) n°3, 559-584.

Diviseurs de zéro dans l'anneau des polynômes

Théorème (McCoy 1942) *Soient* A *un anneau commutatif,* $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *l'anneau des polynômes à coefficients dans* A *en les variables* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *. Soient* $P_1, P_2, \ldots, P_r \in A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Il existe $S \in A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *,* $S \neq 0$ *avec* $SP_i = 0$ *pour* $1 \leq i \leq r$ *,*
ii) il existe $a \in A$*,* $a \neq 0$ *avec* $aP_i = 0$ *pour* $1 \leq i \leq r$ *.*

Démonstration
1) *Soient* $A[T]$ *l'anneau des polynômes à coefficients dans* A *en la variable T,* $P_1, P_2, \ldots, P_r \in A[T]$ *. On suppose qu'il existe* $S \in A[T]$ *,* $S \neq 0$ *avec* $SP_i = 0$ *pour* $1 \leq i \leq r$ *. Alors il existe* $a \in A$*,* $a \neq 0$ *avec* $aP_i = 0$ *pour* $1 \leq i \leq r$ *.*

Montrons cela.
On peut supposer que S est de degré minimum.
On a donc $P_1(T) = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n$,
$S(T) = b_0 + b_1 T + \ldots + b_m T^m$ avec $b_m \neq 0$. On a donc $a_n b_m = 0$, ainsi $\deg a_n S(T) < \deg S(T)$ et $(a_n S(T))P_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$. Sachant que $S(T)$ est de degré minimum, il suit que $a_n S(T) = 0$.
On peut écrire $P_1(T) = U + a_n T^n$ avec
$U := a_0 + a_1 T + \ldots + a_{n-1} T^{n-1}$. Il suit de $a_n S(T) = 0$ et $SP_1 = 0$ que $SU = 0$.
Soit $Q_1 = a_n + TU$, on a donc $SQ_1 = a_n S + TSU = 0$. En conclusion, on a

(1) $\quad SQ_1 = SP_2 = \ldots = SP_r = 0$ et $S \neq 0$.

Ainsi, il existe $R \in A[T]$, $R \neq 0$, $R(T) = c_0 + c_1 T + \ldots + c_t T^t$ avec $c_t \neq 0$, $RQ_1 = RP_2 = \ldots = RP_r = 0$ et R de degré minimum, on a donc $\deg R \leq \deg S$. Comme

$0=RQ_1=(c_0+c_1T+...+c_tT^t)(a_n+a_0T+a_1T^2+...+a_{n-1}T^n)$, on a $c_0a_n=0$. Ainsi $(a_nR)Q_1=(a_nR)P_2=...=(a_nR)P_r=0$, or $a_nR=Ta_n(c_1+c_2T...+c_tT^{t-1})$; si donc $W:=c_1+c_2T...+c_tT^{t-1}$, on a
$(a_nW)Q_1=(a_nW)P_2=...=(a_nW)P_r=0$, sachant que R est de degré minimum, il suit que $a_nW=0$ et donc $a_nR=0$. Comme $0=RQ_1=(c_0+TW)(a_n+TU)=TRU$ et donc $RU=0$. Enfin $RP_1=R(U+a_nT^n)=RU+a_nRT^n=0$. Sachant que $RP_2=RP_3=...RP_r$, on a $\deg R\leq\deg S$, i.e. $\deg R=\deg S$.
Il suit de la formule (1) que
$(a_{n-1}S)Q_1=(a_{n-1}S)P_2=...=(a_{n-1}S)P_r=0$ et pour des raisons de degré minimum, on a $a_{n-1}S(T)=0$. Le même procédé conduit à $a_{n-2}S(T)=0$, ... , $a_0S(T)=0$; ce qui implique que $0=a_nb_m=a_{n-1}b_m=...a_0b_m$; i.e. $b_mP_1=0$. De la même façon on aurait $b_mP_2=b_mP_3=...=b_mP_r=0$.
On a donc montré 1).

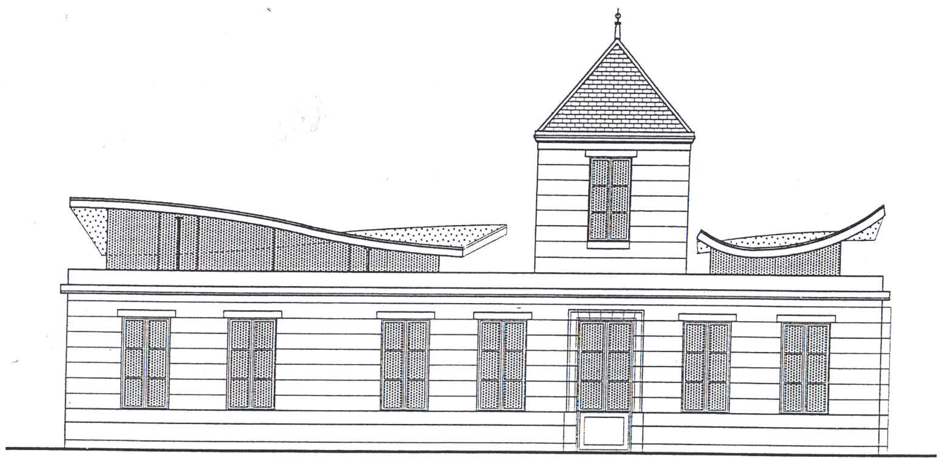
2) *Montrons le théorème.*
La partie *ii)* implique *i)* est immédiate.
On suppose maintenant *i)* satisfait.
La démonstration de 1) prouve le théorème pour une variable.
On suppose le théorème satisfait $n-1$ variables.
On peut écrire $P_i=a_{i,0}+a_{i,1}X_n+...+a_{i,k_i}(X_n)^{k_i}$,
$S=b_0+b_1X_n+...+b_m(X_n)^m$, avec $a_{i,j}\ b_k\in A[X_1,X_2,...,X_{n-1}]$ et $b_m\neq 0$.
Alors 1) appliqué à l'anneau $B:=A[X_1,X_2,...,X_{n-1}]$ et à $T:=X_n$ dit qu'il existe $b\in B$, $b\neq 0$ et $ba_{i,j}=0$ pour $1\leq i\leq r$ et $0\leq j\leq k_i$. Alors l'hypothèse de récurrence permet de conclure qu'il existe $a\in A$, $a\neq 0$ et $aa_{i,j}=0$ pour $1\leq i\leq r$ et $0\leq j\leq k_i$. Ainsi donc $aP_i=0$ pour $1\leq i\leq r$.

Corollaire *Soient* A *un anneau commutatif,* $A[X_1, X_2, \dots, X_n]$ *l'anneau des polynômes à coefficients dans* A *en les variables* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *. Soient* $P \in A[X_1, X_2, \dots, X_n]$ *. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Le polynôme P *est diviseur de zéro dans* $A[X_1, X_2, \dots, X_n]$ *,*
ii) il existe $a \in A$*,* $a \neq 0$ *avec* $aP = 0$ *.*

Remarque La démonstration ci-dessus n'est pas celle de McCoy. C'est peut-être celle de Mrs. Alexandra Illmer Forsythe dont le nom est évoqué dans l'article de McCoy.

Référence

[McCoy] Remarks on Divisors of Zero, The American Mathematical Monthly, Vol. 49, N° 5 (May, 1942), pp. 286-295



Bibliothèque Diophante d'Alexandrie
de l'Ecole mathématique et informatique de l'Université de Bordeaux