Sur les espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué complet ultramétrique (*).

J. FRESNEL - M. MATIGNON

Summary. – *We study the structure of the one dimensional analytic quasi-compact spaces over a complete non archimedean valued field. An affinoid open subset U of a one dimensional analytic quasi-compact space X is defined by a meromorphic function f on X; i.e. U is the set of all x in X such that f is holomorphic at x and $|f(x)| \leqslant 1$. The set of the meromorphic functions on X which are holomorphic on U is dense in the ring of all holomorphic functions on U. An irreducible, one dimensional quasi-compact space is either affinoid, or projective. An analytic reduction of X is defined by a meromorphic invertible function f on X; i.e. the reduction is isomorphic to the reduction associated to the covering $|f(x)| \leqslant 1$ and $|f(x)| \geqslant 1$.*

0. – Introduction.

Cet article s'intéresse à la structure des espaces analytiques rigides purs de dimension 1, quasi-compacts, sur un corps valué complet pour une valeur absolue ultramétrique (ou non archimédienne); pur de dimension 1 veut dire que les composantes irréductibles sont de dimension 1, quasi-compact veut dire qu'il existe un recouvrement admissible affinoïde dont on peut extraire un recouvrement fini.

Ce sujet a déjà fait l'objet de plusieurs études, citons en particulier GRAUERT ([Gr]), FIESELER ([Fi]), VAN DER PUT ([vdP 1, 2]) BOSCH et LÜTKEBOHMERT ([Bo, Lu]). Un des résultats de [Gr] est qu'un ouvert affinoïde d'un espace analytique affinoïde pur X de dimension 1 est défini par un nombre fini de fonctions méromorphes sur X. Dans [Fi] il est montré que la réunion de deux ouverts affinoïdes d'un espace affinoïde de dimension 1 est un ouvert affinoïde. Dans [vdP 2] et [Bo, Lu] il y a une étude des ouverts affinoïdes d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos et dans [vdP 1] il est montré l'existence d'un plongement d'un espace affinoïde de dimension 1 sur un corps algébriquement clos dans une courbe algébrique.

Dans ce travail, entre autres choses, on améliore les résultats cités et on les étend au cas d'un corps de base quelconque quand cela est possible (voir dernier alinéa de l'introduction).

Le paragraphe 1 concerne la structure des ouverts affinoïdes de l'analytification d'une variété algébrique projective, le résultat essentiel s'énonce ainsi:

(*) Entrata in Redazione il 18 luglio 1985.

Indirizzo degli AA.: L. A. au C.N.R.S. n° 226, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, F-33405 Talence, Cedex, France.

THÉORÈME 1. – *Soient k un corps valué complet, X une variété algébrique projective sur k, pure de dimension 1, X^{an} l'analytification de X et U un ouvert affinoïde de X^{an}. Alors il existe $f \in \mathfrak{R}(X)$* (l'anneau des fonctions rationnelles sur X) *tel que*

$$U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |f(x)| \leqslant 1\}.$$

Au paragraphe 2 nous déterminons la structure des espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1.

THÉORÈME 2. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique sur k, quasi-compact, irréductible, séparé, de dimension 1. Alors X est soit affinoïde, soit projectif* (i.e. l'analytification d'une variété algébrique projective).

Il suit alors que toute partie affinoïde d'un espace analytique sur X quasi-compact, séparé, pur de dimension 1 est définie par une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$, selon la même forme qu'au théorème 1 (voir théorème 3, § 2.3).

Sous les mêmes hypothèses pour X et U, si $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{O}_X(U)$ désigne les fonctions méromorphes sur X qui sont analytiques sur U, on montre alors que $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{O}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_X(U)$ (théorème 4, § 2.4).

Toujours sous les mêmes hypothèses pour X, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement pur fini et soit $\bar{X}_{\mathcal{U}}$ la réduction associée, alors il existe $f \in \mathcal{M}(X)^\times$ et $\mathcal{V}$ un recouvrement pur de X avec $\bar{X}_{\mathcal{U}} \simeq \bar{X}_{\mathcal{V}}$, où $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ avec

$$V_1 = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |f(x)| \leqslant 1\}, \qquad V_2 = \left\{x \in X : \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } \left|\frac{1}{f}(x)\right| \leqslant 1\right\}$$

(théorème 5, § 2.5). Il suit comme corollaire que X est projectif si et seulement si $\bar{X}_{\mathcal{U}}$ est projectif.

Au paragraphe 3 nous donnons quelques résultats techniques sur le changement de corps de base pour les espaces analytiques.

Nous montrons au paragraphe 4 un critère pour qu'un espace analytique soit projectif, critère lié à l'existence de faisceau ample (théorème 7, § 4.3).

Enfin justifions en quelques mots, pourquoi ce travail traite la situation où le corps de base est quelconque. Le supposer algébriquement clos simplifierait de nombreuses démonstrations mais ce serait supercherie de laisser croire que le cas général s'en déduit avec seulement quelques difficultés techniques. En effet on sait qu'un espace analytique affinoïde de dimension 1 sur un corps algébriquement clos est ouvert affinoïde d'une variété algébrique projective ([vdP 1] et aussi corollaire 1 du théorème 6, § 2.6); en revanche si le corps de base est quelconque un espace affinoïde X peut ne pas être ouvert affinoïde d'une variété algébrique projective, même après extension finie due corps de base (remarque 1, 2, § 2.6). Ainsi un espace affinoïde n'est pas toujours algébrisable et cela explique pourquoi on ne peut se restreindre aux corps de base algébriquement clos.

1. – Ouverts affinoïdes d'une variété algébrique de dimension 1.

Les sous-paragraphes 1.1, 1.2, 1.3 rappellent les notions d'analytification des variétés algébriques, d'extension de corps de base et de réduction analytique, pour chacun nous essayons de donner des références aussi complètes que possible. Les résultats se trouvent donc dans le sous-paragraphe 1.4, l'essentiel est le théorème 1 cité dans l'introduction.

1.1. *Analytification des variétés algébriques* ([Fr], [Fr et vdP], [Ko]).

Dans tout cet article le mot *variété algébrique sur un corps k* signifie schéma noethérien, séparé et de type fini sur k, par *point* d'une variété algébrique on entendra toujours point fermé.

Pour analytifier une variété algébrique X sur un corps valué complet k on définit sur X une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$ et un faisceau structural $\mathcal{O}_{X^{an}}$ sur $(X, \mathcal{G})$. Une partie U de X est dite *admissible* si $U = X$ ou s'il existe $Y \subset X$ un ouvert de Zariski affine, $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(Y)$ avec $\mathcal{O}_X(Y) = k[f_1, \ldots, f_r]$ (i.e. $\mathcal{O}_X(Y)$ est une k-algèbre engendrée par $f_1, \ldots, f_r$) et $U = \{y \in Y\colon |f_i(y)| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Soit l'homomorphisme $\varphi\colon k[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_X(Y)$ défini par $\varphi(T_i) = f_i$ et $\mathfrak{A} = \ker \varphi$, *on pose* alors $\mathcal{O}_{X^{an}}(U) \overset{\text{déf}}{=} k\langle T_1, \ldots, T_r\rangle / \mathfrak{A} k\langle T_1, \ldots, T_r\rangle$ où $k\langle T_1, \ldots, T_r\rangle$ est l'algèbre de Tate de dimension r ([Fr et vdP], p. 54, [Fr], p. 20); on peut montrer que l'algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ ne dépend pas de la représentation de U par le choix de Y et des f_i. Si $V \subset U \neq X$ sont admissibles on définit une restriction $\varrho_{UV}\colon \mathcal{O}_{X^{an}}(U) \to \mathcal{O}_{X^{an}}(V)$ induite par les restrictions du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. Enfin on pose $\mathcal{O}_{X^{an}}(X) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{U \neq X} \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ où U parcourt les admissibles de X avec $U \neq X$.

Soit U un admissible, un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de U est dit *admissible* si chaque U_i est admissible, si pour tout $V \neq X$ admissible, $V \subset U$ il existe une partie finie F_V de I telle que $V \subset \bigcup_{i \in F_V} U_i$.

Alors les admissibles et les recouvrements admissibles définissent sur X une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$. On montre alors que $\mathcal{O}_{X^{an}}$ est un faisceau sur $(X, \mathcal{G})$ et que le triplet $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_{X^{an}})$ est un espace analytique. C'est *l'analytification* de X et on le note X^{an}.

Pour chaque $x \in X$ il y a un homomorphisme canonique, local $\varrho_x\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$, on montre que $\hat{\varrho}_x\colon \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{X^{an},x}$ est bijectif. Il suit de cela plusieurs résultats. On a $(X_{red})^{an} \simeq (X^{an})_{red}$, i.e. l'analytification de la variété algébrique réduite associée à X est l'espace analytique réduit associé à l'analytification de X. On a $\dim X = \dim X^{an}$ et X est régulier si et seulement si X^{an} est régulier.

On définit aussi l'analytification des morphismes de variétés algébriques ainsi que l'analytification des faisceaux algébriques cohérents. Il suit donc que les théorèmes GAGA ([Se], [Ko]) sont applicables aux variétés algébriques projectives sur un corps valué complet.

1.2. *Extension du corps de base.*

Soient K un corps valué complet, $k \subset K$ un sous-corps fermé. A un espace affinoïde sur k, $U = \operatorname{Spm} A$ on associe un espace affinoïde sur K, $U_{(K)} \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Spm}(A \widehat{\otimes}_k K)$; par recollement à un espace analytique X sur k on associe un espace analytique $X_{(K)}$ sur K qui s'appelle l'*espace analytique déduit de X par extension du corps de base* K ([BGR], p. 370).

En plus $\cdot \widehat{\otimes}_k K$ est «*fidèlement plat*»: soit $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ une suite (S) de trois k-espaces de Banach, $M_1 \widehat{\otimes} K \xrightarrow{f_1 \widehat{\otimes} 1_K} M_2 \widehat{\otimes} K \xrightarrow{f_2 \widehat{\otimes} 1_K} M_3 \widehat{\otimes} K$ la suite $(S \widehat{\otimes}_k K)$ obtenue par tensorisation complétée par K; alors (S) est exacte si et seulement si $(S \widehat{\otimes}_k K)$ est exacte.

Soient k un corps valué complet, K le complété de la clôture algébrique de k, un espace analytique X sur k est dit géométriquement régulier (resp. réduit, resp. connexe, resp. irréductible) si $X_{(K)}$ est régulier (resp. réduit, resp. connexe, resp. irréductible) ([Bo 1], [Bo 2], [Fr], § 3).

Soit toujours K le complété de la clôture algébrique de k, X une variété algébrique sur k, alors *on a canoniquement* $(X_{(K)})^{\mathrm{an}} \simeq (X^{\mathrm{an}})_{(K)}$ où $X_{(K)}$ est la variété algébrique sur K déduite de X par extension du corps de base à K ([Gr.D] EGA, ch. IV, § 4, § 6).

En particulier X est géométriquement régulier (resp. réduit) si et seulement si X^{an} est géométriquement régulier (resp. réduit).

1.3. *Réduction d'un espace analytique* ([G. et vdP], [Bo 3], [Fr]).

Soient k un corps valué, complet, A une k-algèbre affinoïde, $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ la semi-norme spectrale sur A, $A^0 = \{f \in A : \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1\}$, $A^{00} = \{f \in A : \|f\|_{\mathrm{sp}} < 1\}$, $\bar{A} = A^0/A^{00}$, alors $\bar{A}$ est une $\bar{k}$-algèbre de type fini. Ainsi à l'espace affinoïde sur k, $X = \operatorname{Spm} A$, on associe la variété algébrique affine, réduite sur $\bar{k}$, $\bar{X}^c \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Spm}(\bar{A})$; plus précisément il existe une application ensembliste surjective $r_X : X \to \bar{X}^c$ et $\bar{X}^c$ s'appelle *la réduction canonique* de l'espace affinoïde X. Un ouvert U de X est dit *ouvert formel* (ou *pur*) de X s'il existe un ouvert affine W de $\bar{X}^c$ tel que $U = r_X^{-1}(W)$; dans ce cas la réduction canonique de U s'identifie à W.

Soit X un espace analytique sur k, un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X est dit *recouvrement formel* (ou *pur*) si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement admissible affinoïde et si $U_i \cap U_j$ est un ouvert formel (ou pur) de U_i pour tout $i, j \in I$. S'il en est ainsi les variétés algébriques $\bar{U}_i^c$, $\bar{U}_j^c$ se recollent le long des $\overline{U_i \cap U_j}^c$ en un schéma localement de type fini, réduit sur $\bar{k}$; ce schéma s'appelle *la réduction de X relativement au recouvrement pur* $\mathfrak{U}$ (ou *la réduction de l'espace formel* $(X, \mathfrak{U})$) et se note $\bar{X}_{\mathfrak{U}}$. Les applications $r_{U_i} : U_i \to \bar{U}_i^c$ induisent une application surjective $r_{\mathfrak{U}} : X \to \bar{X}_{\mathfrak{U}}$. En particulier si $\mathfrak{U}$ est fini, $\bar{X}_{\mathfrak{U}}$ est une variété algébrique réduite.

1.4. *Structure des affinoïdes d'une variété algébrique de dimension* 1.

Une variété algébrique X est dite *pure* si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension.

Soient X une variété algébrique, $\mathcal{R}(X) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ où la limite inductive est prise sur tous les ouverts U denses dans X; alors l'anneau $\mathcal{R}(X)$ s'appelle l'*anneau des fonctions rationnelles sur X.*

Soient X une variété algébrique, $x \in X$, $f \in \mathcal{R}(X)$, on dit que f est régulier en x et on le note $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ s'il existe un ouvert dense $U \ni x$ et $g \in \mathcal{O}_X(U)$ dont l'image dans $\mathcal{R}(X)$ est f. Dans cette situation si le corps de base est valué complet la valeur absolue de l'image de g dans $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$ (qui est fini sur k) ne dépend pas du g choisi avec les propriétés précédentes; ainsi on note $|f(x)|$ la valeur absolue de cet élément.

PROPOSITION 1. – *Soient k un corps valué complet, K le complété de la clôture algébrique de k, X une variété algébrique projective pure de dimension 1 sur k, géométriquement connexe et géométriquement régulière. Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement pur fini de $X^{\text{an}}_{(K)} = Y$, $r: Y \to Z = \overline{Y}_{\mathcal{U}}$ la réduction associée, U une partie de Y telle que $r(U)$ soit un ouvert affine dense dans Z et que $U = r^{-1}(r(U))$. Alors il existe un corps l fini, séparable sur k, $f \in \mathcal{R}(X_{(l)})$* (une fonction rationnelle sur $X_{(l)}$) *tels que*

$$U = \{x \in X_{(K)} : f \in \mathcal{O}_{X_{(K)},x} \text{ et } |f(x)| \leqslant 1\}\,.$$

DÉMONSTRATION. – α) *Il existe un diviseur de Cartier D sur Z avec $\mathcal{L}(D)$ très ample, $H^i(Z, \mathcal{L}(D)) = 0$ pour $i > 0$, $H^0(Z, \mathcal{L}(D))$ contient f dont le domaine de définition est $W_0 = r(U)$.*

Soient $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\} = Z - r(U)$, $W_i \ni q_i$ un ouvert affine avec les propriétés suivantes: $q_j \notin W_i$ pour $j \neq i$, il existe $g_i \in \mathcal{O}_Z(W_i)$ avec $g_i(q_i) = 0$ et $g_i(z) \neq 0$ pour $z \in W_i - \{q_i\}$. Alors $\{W_1, W_2, \ldots, W_r, W_0\}$ est un recouvrement affine de Z (avec $W_0 = r(U)$). Soit le diviseur de Cartier $D = \{(W_1, g_1), \ldots, (W_r, g_r), (W_0, 1)\}$ et $\mathcal{L}(D)$ le faisceau inversible associé.

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ les composantes irréductibles de Z, $\varphi: Z' \to Z$ la normalisation de Z, $Z'_1, \ldots, Z'_s$ les normalisations de $Z_1, \ldots, Z_s$, $\mathcal{L}' = \varphi^* \mathcal{L}(D)$.

Clairement $\mathcal{L}'|_{Z'_i}$ est associé à un diviseur de degré positif, il suit que $\mathcal{L}'|_{Z'_i}$ est ample ([Ha 2], corollary 3.2, p. 308) et aussi $\mathcal{L}'$; en effet Z est projectif (lemme 3, § 1.4) donc aussi Z' et Z'_i (utiliser [Ha 1], prop. 4.3, 4.4, p. 24). Il en resulte que $\mathcal{L}(D)$ est ample ([Ha 1]) et donc que $\mathcal{L}(nD)$ est très ample pour $n \gg 0$ (assez grand). De plus le théorème de Serre sur les variétés algébriques projectives montre qu'il existe $m \geqslant 1$ tel que $H^i(Z, \mathcal{L}(mnD)) = 0$ pour tout $i > 0$ (et $\mathcal{L}(mnD)$ est toujours très ample). Ainsi on peut supposer que $\mathcal{L}(D)$ est très ample et $H^i(Z, \mathcal{L}(D)) = 0$ pour $i > 0$ (quitte à remplacer g_i par g_i^{mn}).

Il suit d'abord que $\mathcal{L}(D)$ est engendré par ses sections globales. Il existe donc $f_i \in \mathcal{L}(D)(Z)$ tel que $(f_i)_{q_i} = (1/g_i)_{q_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$; on a donc $(f_i)_{q_j} = a_{ij} \times (1/g^j)_{q_j}$ avec $a_{ij} \in \mathcal{O}_{Z,q_j}$ et $a_{ii} = 1$. Comme $\overline{K}$ le corps résiduel de K est infini il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \overline{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ij}(q_j) \neq 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Soit $f = \sum \lambda_i f_i$, on a donc $f \in \mathcal{L}(D)(Z)$ et $f_{q_i} = b_i (1/g_i)_{q_i}$ avec $b_i \in \mathcal{O}_{Z,q_i}$ et $b_i(q_i) \neq 0$.

β) *Le diviseur de Cartier sur Z se «relève» en un diviseur de Cartier E sur $Y = X^{\mathrm{an}}_{(K)}$ et il existe $F \in \mathcal{L}(E)(Y)$ qui «relève» f.*

D'abord $r^{-1}(W_i)$ est affinoïde ([Bo 3], theorem 3.1, p. 20), il suit du lemme 7, § 3.3 qu'il existe l_1 un corps séparable fini sur k, V_i un ouvert affinoïde de $X_{(l_1)}$ tel que $V_{i(K)} = r^{-1}(W_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$. Ensuite il existe l_2 séparable fini sur k, $h_i \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(V_{i(l_2)})^0$ tels que $\bar{h}_i = g_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ où $\bar{h}_i$ est l'*image* de h_i par la réduction canonique $\mathcal{O}_X(r^{-1}(W_i))^0 \to \overline{\mathcal{O}_X(r^{-1}(W_i))} = \mathcal{O}_Z(W_i)$. Soient le diviseur de Cartier $E = \{(r^{-1}(W_1), h_1), \ldots, (r^{-1}(W_r), h_r), (U, 1)\}$ et $\mathcal{L}(E)$ le faisceau inversible sur $X^{\mathrm{an}}_{(K)}$ associé (définition § 2.3).

Soient W un ouvert affine de Z, $\|\cdot\|_W$ la semi-norme définie sur $\mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))$ par $\|g\|_W = \|g\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W) \cap U}$ pour $g \in \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))$.

Clairement $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W)}$ si $W \subset W_0 = r(U)$.

Soient $q_i \in W \subset W_i$, $a/h_{i|W} \in \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))$ avec $a \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}_{(K)}}(r^{-1}(W))$, $\|a/h_{i|W}\|_W = 1$, montrons alors que $\|a\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W-q_i)} = 1$. Comme $\bar{h}_i = g_i$ (réduction dans $\mathcal{O}_Z(W_i)$) et que g_i est inversible sur $W_i - q_i$ on a $\|h_i\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W_i - q_i)} = \|1/h_i\|_{r^{-1}(W_i-q_i)} = 1$. Il suit donc que $\|a\|_{r^{-1}(W-q_i)} = 1$ et comme $W - q_i$ est dense dans W on a alors $\|a\|_{r^{-1}(W)} = 1$ ([Fr], prop. 1, p. 288). En résumé pour $W \subset r(U)$ et $g \in \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))$ on a $\|g\|_W = \|g\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W)}$ $\big(g \in \mathcal{O}_Y(r^{-1}(W))\big)$, pour $q_i \in W \subset W_i$ et $g = a/h_{i|W}$ on a $\|g\|_W = \|a\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W)}$ $\big(a \in \mathcal{O}_Y(r^{-1}(W))\big)$.

Soient W un ouvert affine de Z avec $W \subset r(U)$ où $q_i \in W \subset W_i$, $\mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))^0 \overset{\text{déf}}{=} \{g \in \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W)) : \|g\|_W \leqslant 1\}$, $\varphi(W) : \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W))^0 \to \mathcal{L}(D)(W)$ ainsi défini: si $W \subset r(U)$, $\varphi(W)(f) = \bar{g}$ où $\bar{g}$ est la réduction de f dans $\overline{\mathcal{O}_Y(r^{-1}(W))} = \mathcal{O}_Z(W)$, si $q_i \in W \subset W_i$ on a $g = a/h_i$ et on pose $\varphi(W)(a/h_i) = \bar{a}/g_{i|W}$ où $\bar{a}$ est la réduction de a dans $\overline{\mathcal{O}_Y(r^{-1}(W))} = \mathcal{O}_Z(W)$.

Comme K est algébriquement clos, Y réduit (§ 1.2) il en résulte que $\mathcal{O}_Y(r^{-1}(W))$ est distingué ([BGR] 6.4.3, p. 253; [Fr], p. 70), il suit facilement de cela que $\varphi(W) \otimes 1_{\bar{K}}$ est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{C}$ le complexe (de Čech)

$$(\mathcal{C}) \qquad \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W_i))^0 \xrightarrow{d_0} \bigoplus_{i,j} \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W_i \cap W_j))^0 \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j,k} \mathcal{L}(E)(r^{-1}(W_i \cap W_j \cap W_k))^0 \to \ldots$$

alors $\mathcal{C} \otimes_{K^0} \bar{K}$ est le complexe de Čech associé à $\mathcal{L}(D)$ et au recouvrement affine $\mathcal{W} = \{W_i\}_i$. Il suit alors que

$$\frac{\ker d_1 \otimes 1_{\bar{K}}}{\operatorname{im} d_0 \otimes 1_{\bar{K}}} = H^1(\mathcal{W}, \mathcal{L}(D)) = H^1(Z, \mathcal{L}(D)) = 0 \, .$$

Comme les algèbres $\mathcal{O}_Y(r^{-1}(W_i))$ sont distinguées il suit que $\mathcal{C}$ satisfait les hypothèses de [Bo 3], lemma 2.1 iii, p. 10; ainsi

$$0 = \ker d_1 / \operatorname{im} d_0 \qquad \text{et} \qquad (\ker d_0) \otimes_{K^0} \bar{K} = \ker (d_0 \otimes 1_{\bar{K}}) \, .$$

Donc il existe $F \in \ker d_0$ tel que $F \otimes \bar{1} = f$ (avec f défini en α)); clairement $F \in \mathcal{L}(E)(Y)$ avec $\|F\|_U = 1$.

γ) *Il existe un corps l fini, séparable sur k, $G \in \mathcal{R}(X_{(l)})$ tel que $U = \{x \in X_{(K)}$: $G \in \mathcal{O}_{X_{(K)},x}$ et $|G(x)| \leqslant 1\}$.*

D'après β) on a $F \in \mathcal{O}_Y(U)$ et $\|F\|_U^{\mathrm{sp}} = 1$. Soit $x \in r^{-1}(\{q_i\})$, montrons que $F \notin \mathcal{O}_{Y,x}$ ou $F \in \mathcal{O}_{Y,x}$ et $|F(x)| > 1$. On a $F|r^{-1}(W_i) = c_i/h_i$, $i \geqslant 1$, avec $c_i \in \mathcal{O}_Y(r^{-1}(W_i))^0$ et comme $\varphi(W_i)(F|r^{-1}(W_i)) = f|_{W_i} = \bar{c}_i/g_i$ (c'est β) et que $\bar{c}_i(q_i) \neq 0$ (c'est α) on a donc $|c_i(x)| = 1$ pour $x \in r^{-1}(q_i)$.

Le diviseur de Cartier E (défini en β) est aussi un diviseur de Cartier sur $X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}$, soit $\mathcal{G}(E)$ le faisceau inversible associé sur $X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}$. Soit E' le diviseur sur la courbe projective non singulière $X_{(l_2)}$ défini par $v_x(E') = 0$ pour $x \in V_{0(l_2)}$ et $v_x(E') = v_x(h_i)$ pour $x \in V_{i(l_2)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ (v_x est la valuation normalisée de $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}_{(l_2)},x} \supset \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$), soit $\mathcal{F}(E')$ le faisceau inversible associé sur $X_{(l_2)}$. Clairement on a $\mathcal{F}(E')^{\mathrm{an}} = \mathcal{G}(E)$ et $\mathcal{G}(E) \widehat{\otimes}_{l_2} K = \mathcal{L}(E)$. Par GAGA ([Se], [Ko], [Fr], p. 272) on a $\mathcal{F}(E')(X_{(l_2)}) = \mathcal{G}(E)(X^{\mathrm{an}}_{(l_2)})$; comme $\cdot \widehat{\otimes}_{l_2} K$ est « fidèlement plat » (§ 1.2), que $\mathcal{G}(E)(X^{\mathrm{an}}_{(l_2)})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur l_2, on a $\mathcal{G}(E)(X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}) \widehat{\otimes}_{l_2} K = \mathcal{G}(E)(X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}) \otimes_{l_2} K = \mathcal{L}(E)(Y)$. Soit $e_1, \dots, e_s$ une base de $\mathcal{G}(E)(X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}) = \mathcal{F}(E')(X_{(l_2)})$, il existe $\mu_1, \dots, \mu_s \in K$ avec $F = \sum \mu_i e_i$. On a $e_i|_{V_{j(l_2)}} = c_{ij}/h_j$ où $c_{ij} \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}_{(l_2)}}(V_{j(l_2)})$, par suite $F|_{r^{-1}(W_j)} = (1/h_j) \times (\sum_i \mu_i c_{ij})$, soit $c_j = \sum_i \mu_i c_{ij}$ (avec les notations qui précèdent). Il existe l un corps, séparable et fini sur l_2 et $\mu'_1, \dots, \mu'_s \in l$ avec $|\mu_i - \mu'_i| \|e_i\|^{\mathrm{sp}}_{V_0(l_2)} < 1$ et $|\mu_i - \mu'_i| \cdot \|c_{ij}\|^{\mathrm{sp}}_{V_{j(l_2)}} < 1$ pour tout i, j. Soit $G = \sum_i \mu'_i e_i$, on a $G \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}_{(l)}}(V_{0(l)})$ et $\|G\|^{\mathrm{sp}}_{V_{0(l)}} = 1$, $G|_{V_{i(l)}} = d_i/h_i$, $i \geqslant 1$ avec $d_i \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}_{(l)}}(V_{i(l)})^0$ et $|d_i(x)| = 1$ pour $x \in r^{-1}_{V_{i(l)}}(\{q_i\})$. Ainsi

$$U = \{x \in Y \colon G \in \mathcal{O}_{Y,x} \text{ et } |G(x)| \leqslant 1\}\,,$$

de plus $G \in \mathcal{F}(E')(X_{(l_2)}) \otimes_{l_2} l \subset \mathcal{R}(X_{(l)})$.

THÉORÈME 1. – *Soient k un corps valué complet, X une variété algébrique projective, pure de dimension 1, X^{an} l'analytification de X et U une partie affinoïde de X^{an}. Alors il existe $f \in \mathcal{R}(X)$, une fonction rationnelle sur X telle que*

$$U = \{x \in X \colon f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |f(x)| \leqslant 1\}\,.$$

DÉMONSTRATION. – *A) On suppose X réduit.*

Il existe un corps l_1 fini sur k tel que pour tout corps $l \supset l_1$, $(X_{(l)\mathrm{red}})'$ soit géométriquement régulier et que les composantes connexes de $(X_{(l)\mathrm{red}})'$ soient géométriquement connexes ($(X_{(l)\mathrm{red}})'$ désigne la normalisation de $X_{(l)\mathrm{red}}$) ([Gr, D]).

α) Soient $Y = (X_{(l_1)\mathrm{red}})'$, $\varphi \colon Y \to X$ le morphisme canonique; alors $V = \varphi^{-1}(U)$ est une partie affinoïde de Y^{an}; en effet, φ est fini, donc aussi φ^{an}.

Il existe $l \supset l_1$ un corps extension normale de k, $f \in \mathcal{R}(Y_{(l)})$ avec $V_{(l)} = \{y \in Y_{(l)}: f \in \mathcal{O}_{Y_{(l)},y}$ et $|f(y)| \leqslant 1\}$.

Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les composantes connexes de Y, alors $V_i = Y_i \cap V$ est une partie affinoïde de Y_i^{an}. Soit $W_i = V_{i(K)} \subset Y_{i(K)}^{\mathrm{an}} \overset{\text{déf}}{=} Z_i$, c'est une partie affinoïde de Z_i.

Il existe une réduction analytique $r_{\mathcal{U}}: Z_i \to \bar{Z}_{i\mathcal{U}}$ définie par un recouvrement pur fini de Z_i telle que $r_{\mathcal{U}}(W_i)$ soit un ouvert et que $r_{\mathcal{U}}^{-1}(r_{\mathcal{U}}(W_i)) = W_i$ (lemme 2, § 1.4).

Par le corollaire 1 de la proposition 3, § 1.4, il existe un recouvrement pur fini $\mathcal{V}$ de Z_i moins fin que $\mathcal{U}$ tel que $r_{\mathcal{V}}(W_i)$ soit un ouvert affine dense de $\bar{Z}_{i\mathcal{V}}$ et que $W_i = r_{\mathcal{V}}^{-1}(r_{\mathcal{V}}(W_i))$.

Il existe alors $l_i' \supset l_1$ fini sur l_1, $f_i \in \mathcal{R}(Y_{i(l_i')})$ avec $W_i = \{z \in Z_i: f_i \in \mathcal{O}_{Z_i,z}$ et $|f_i(z)| \leqslant 1\}$ (proposition 1).

Soient $l \supset l_i'$ pour tout i, normal, fini sur k, $f = \sum f_i \in \mathcal{R}(Y_{(l)}) = \bigoplus \mathcal{R}(Y_{i(l)})$. Alors on a

$$V_{(l)} = \{y \in Y_{(l)}: f \in \mathcal{O}_{Y_{(l)},y} \text{ et } |f(y)| \leqslant 1\}\,.$$

ce qui montre α).

Comme $Y_{(l)} = (X_{(l)\mathrm{red}})'$ on peut supposer que $Y = (X_{(l)\mathrm{red}})'$ et qu'il existe $f \in \mathcal{R}(Y)$ avec $V = \{y \in Y: f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ et $|f(y)| \leqslant 1\}$, où $V = \varphi^{-1}(U)$ et $\varphi: Y \to X$ est le morphisme canonique.

β) *Il existe $h \in \mathcal{R}(X)$ tel que*

$$U = \{x \in X: h \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |h(x)| \leqslant 1\}\,.$$

Soient $T = (X_{(l)})_{\mathrm{red}}$, $\varphi_1\ Y = T' \to T$ le morphisme canonique, $t \in T$,

$$(*) \qquad \mathfrak{M}_{y_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{y_r} \text{ les maximaux de } (\mathcal{O}_{T,t})'; \quad \text{i.e. } \{y_1, \ldots, y_r\} = \varphi_1^{-1}(\{t\})\,.$$

Alors il existe un entier n tel que $(\mathfrak{M}_{y_1} \cdot \mathfrak{M}_{y_2} \ldots \mathfrak{M}_{y_r})^n \subset \mathfrak{M}_t \subset \mathcal{O}_{T,t}$ (partie β) de la démonstration de la proposition 4, § 2.1.3.

Soient $S = \varphi_1^{-1}(T_{\mathrm{sing}}) \cap V$, $s \in S$, alors on a $f \in \mathcal{O}_{Y,s}$ et $|f(s)| \leqslant 1$. Soit $P_s(Z) = \operatorname{irr}(f(s), k, Z)$, on a $P_s(Z) \in k^0[Z]$ et $P_s(f) \in \mathfrak{M}_s$, le maximal de $\mathcal{O}_{Y,s}$. Il suit de $(*)$ qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\prod_{s \in S} P_s(f)^n \in \mathfrak{M}_t \subset \mathcal{O}_{T,t}$ pour tout $t \in T_{\mathrm{sing}} \cap \varphi_1(V)$ (S est fini). Soient $P(Z) = \prod_s P_s(Z)^n$ (c'est un polynôme unitaire de $k^0[Z]$), $g = P(f) \in \mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(T)$; pour tout $t \in \varphi_1(V)$ on a $g \in \mathcal{O}_{T,t}$ et $|g(t)| \leqslant 1$.

On a $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(T) = (\mathcal{R}(X) \otimes_k l)_{\mathrm{red}}$ parce que l est fini sur k. Soit G le groupe des k-automorphismes de l, alors G agit sur $X_{(l)}$, sur T et sur $\mathcal{R}(T)$. Soient $q = [l:k]_{\mathrm{ins.}}$ et $h = \left(\prod_{\sigma \in G} g^\sigma\right)^q$, alors $h \in \mathcal{R}(X)$ (X est réduit).

Comme $\varphi_1(V)$ est stable (globalement) par G, il suit que pour $x \in U$ on a $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|h(x)| \leqslant 1$.

Soit $y \in Y - V$, on a ou bien $f \notin \mathcal{O}_{Y,y}$, ou bien $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ et $|f(y)| > 1$. Comme $\varphi_1(V)$ est stable par $\sigma \in G$ il suit que, ou bien ${}^\sigma f \notin \mathcal{O}_{Y,y}$ ou bien ${}^\sigma f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ et $|{}^\sigma f(y)| > 1$. On déduit facilement de cela que, ou bien $h \notin \mathcal{O}_{X,x}$ ou bien $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|h(x)| > 1$ avec $x = \varphi(y)$. Ce qui montre que

$$U = \{x \in X : h \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |h(x)| \leqslant 1\}.$$

B) Le cas général.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de la variété algébrique X. Montrons que $U \not\supset X_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Par GAGA ([Se], [Ko]) X_i est un fermé analytique de X^{an} et la structure analytique réduite induite sur X_i est aussi l'analytification de la structure algébrique réduite induite sur X_i. Il suit donc que X_i est projectif. Si l'on avait $U \supset X_i$, il suivrait que $U \cap X_i = X_i$ serait affinoïde pour la structure analytique réduite; comme $\dim X_i = 1$ et que $\dim_k \mathcal{O}_{X_i}(X_i) < \infty$ c'est impossible. Il existe donc un ouvert affine $Z' \supset U$ et dense dans X.

Par $A)$ $\beta)$ il existe $f \in \mathcal{R}(X_{\mathrm{red}})$ tel que $U = \{x \in X_{\mathrm{red}} : f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Il existe donc un ouvert dense Z avec $Z' \supset Z \supset U$ et $f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ pour $x \in Z$; il suit que Z est affine parce que Z' l'est. On a $f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(Z) = \mathcal{O}_X(Z)_{\mathrm{red}}$, soit $g \in \mathcal{O}_X(Z)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_X(Z)_{\mathrm{red}}$ est f. Il est alors facile de montrer que $U = \{x \in X : g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$.

COROLLAIRE. – *Soient k un corps valué complet, X une variété algébrique pure de dimension 1 sur k, U une partie affinoïde de X^{an}. Alors il existe $f \in \mathcal{R}(X)$ tel que $U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$.*

DÉMONSTRATION. – Supposons d'abord X réduit, alors il existe une variété algébrique projective P telle que X soit un ouvert dense de P (et que $P - X$ soit régulier). Alors U est aussi ouvert affinoïde de P^{an}. Ainsi il existe $f \in \mathcal{R}(P)$ tel que $U = \{x \in P : f \in \mathcal{O}_{P,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$ (théorème 1). Ainsi $U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$ et comme $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(P)$ le corollaire est montré pour X réduit.

On suppose maintenant X quelconque. Par ce qui précède il existe $f \in \mathcal{R}(X_{\mathrm{red}})$ avec $U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Comme U est affinoïde, il existe un ouvert affine Z de X avec $Z \supset U$ et $f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ pour tout $x \in Z$ (il suffit de remarquer que l'analytification d'une variété affine de dimension 1 n'est pas affinoïde et de reprendre l'argumentation de la partie $B)$ de la démonstration du théorème 1). Soit $g \in \mathcal{O}_X(Z)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_X(Z)_{\mathrm{red}} = \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(Z)$ est f, alors $U = \{x \in X : g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$.

REMARQUE. – Considérons le cas simple où $X = \operatorname{Sp} A$ est une variété algébrique affine. Soient $\mathfrak{N}$ l'idéal des nilpotents de A et $\varphi : A \to A/\mathfrak{N} \overset{\text{déf}}{=} A_{\mathrm{red}}$ la surjection canonique. Soient S la partie multiplicative de A des éléments qui ne divisent pas zéro et T la partie multiplicative de A des éléments $a \in A$ tels que $\varphi(a)$ ne divise pas zéro dans A_{red}; on a $S \subset T$ et ainsi un homomorphisme canonique $\psi\colon S^{-1}A \to T^{-1}A = \mathcal{R}(X)$.

Si donc U est une partie affinoïde de X^{an}, on aimerait savoir s'il existe $g \in S^{-1}A$ tel que $U = \{x \in X\colon g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$.

L'application ψ peut ne pas être surjective. Considérons $A = k[x, y] = k[X, Y]/(X^2, XY)$, il est facile de montrer que $1/y^n$ n'est pas dans l'image de ψ, pour tout $n \geqslant 1$.

PROPOSITION 2. – *Soient X une variété algébrique projective, connexe régulière de dimension 1 sur un corps valué complet, $f \in \mathcal{R}(X) - \mathcal{O}_X(X)$, $U = \{x \in X\colon f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Alors U est un admissible affinoïde de X^{an}.*

DÉMONSTRATION. – Soit $Z = \{x \in X\colon f \in \mathcal{O}_{X,x}\}$, alors $\mathcal{O}_X(Z)$ est la clôture intégrale $k[f]$ dans $\mathcal{R}(X)$ (X est régulière); ainsi $\mathcal{O}_X(Z)$ est fini sur $k[f]$, on a donc $\mathcal{O}_X(Z) = \sum_{i=1}^{s} k[f]e_i$. Quitte à changer e_i en λe_i avec $\lambda \in k^\times$ on peut supposer que e_i est entier sur $k^0[f]$, il suit alors facilement que $U = \{x \in Z\colon |f(x)| \leqslant 1$ et $|e_i(x)| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant s\}$. Comme $\mathcal{O}_X(Z) = k[f, e_1, \ldots, e_s]$, que Z est affine il suit que U est un admissible affinoïde de X^{an} (§ 1.1, [Fr], p. 244).

REMARQUE 1. – *Si X n'est pas régulier, U peut ne pas être affinoïde. Soient* $k[t_1, t_2, t_3] = k[T_1, T_2, T_3]/(T_2^2T_3 - T_1^2(T_1 - T_3))$ où t_i est l'image de T_i, car $(k) \neq 2$, $X = \operatorname{Proj}(k[t_1, t_2, t_3])$, (la graduation de $k[t_1, t_2, t_3]$ est induite par celle de $k[T_1, T_2, T_3]$), $f = (t_2 - t_1)/(t_2 + t_1) \in \mathcal{R}(X)$ et $U = \{x \in X\colon f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Alors U n'est pas affinoïde; soit $Z = \{x \in X\colon f \in \mathcal{O}_{X,x}\}$, on a $g = t_1/t_2 \in \mathcal{O}_X(Z)$ et g n'est pas borné sur U.

LEMME 1. – *Soit X un espace analytique.*

1) *Soient Y, Z, X' des admissibles affinoïdes de X avec Y ouvert formel (ou pur) de Z, et $Z \cap X'$ est un ouvert affinoïde. Alors $Y \cap X'$ est un ouvert formel de $Z \cap X'$.*

2) *Soient Y, Z, T des admissibles affinoïdes de X avec T pur dans Z, Z pur dans Y. Alors T est pur dans Y.*

3) *Soient Y, Z, Y', Z' des admissibles affinoïdes de X avec Z pur dans Y (resp. Z' pur dans Y'). On suppose que $Y \cap Y'$ est affinoïde. Alors $Z \cap Z'$ est pur dans $Y \cap Y'$.*

DÉMONSTRATION. – Utiliser par exemple [Fr], p. 296.

LEMME 2. – *Soient k un corps valué complet, X une variété algébrique projective, connexe, régulière de dimension 1 sur k, X^{an} l'analytification de X et U un ouvert affinoïde de X^{an}. Alors il existe un recouvrement pur fini $\mathcal{U}$ de X^{an} tel que $r_{\mathcal{U}}(U)$ soit ouvert et $U = r_{\mathcal{U}}^{-1}(r_{\mathcal{U}}(U))$ où $r_{\mathcal{U}}\colon X^{\mathrm{an}} \to \bar{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{U}}$ est la réduction associée à $\mathcal{U}$.*

DÉMONSTRATION. – On sait que U est réunion finie d'admissibles affinoïdes U_i de X^{an}, $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r$, $U_i \neq X$. Alors il existe $f_{i1}, \ldots, f_{i,n_i} \in \mathcal{R}(X) - \mathcal{O}_X(X)$ tels que $Y_i = \{x \in X: f_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f_{ij}(x)| \leqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$ (§ 1.1). On a donc $U_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} \{x \in X: f_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f_{ij}(x)| \leqslant 1\}$. Posons

$$U_{ij}^{+1} = \{x \in X: f_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |f_{ij}(x)| \leqslant 1\}, \qquad U_{ij}^{-1} = \left\{x \in X: \frac{1}{f_{ij}} \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } \left|\frac{1}{f_{ij}}(x)\right| \leqslant 1\right\}.$$

Alors U_{ij}^{+1} et U_{ij}^{-1} sont admissibles affinoïdes de X^{an} (proposition 2) et $X = U_{ij}^{+1} \cup U_{ij}^{-1}$ parce que X est régulier.

Soient $\mu, \mu' \in \{1, -1\}$, montrons que $U_{ij}^{\mu} \cap U_{ij}^{\mu'}$ est pur dans U_{ij}^{μ}. Si $\mu = \mu'$ c'est clair. Si $\mu = 1, \mu' = -1$ on a $U_{ij}^1 \cap U_{ij}^{-1} = \{x \in U_{ij}^1: |f_{ij}(x)| = 1\}$ et $U_{ij}^1 \cap U_{ij}^{-1} = \{x \in U_{ij}^{-1}: |(1/f_{ij})(x)| = 1\}$. Comme $\|f_{ij}\|_{SD}^{U_{ij}} \leqslant 1$ et $\|f_{ij}^{-1}\|_{SD}^{U_{ij}} \leqslant 1$, il suit bien que $U_{ij}^1 \cap U_{ij}^{-1}$ est pur dans U_{ij}^1 (et U_{ij}^{-1}).

Soient $S = \{(i, j): 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n_i\{$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}^S$, $U(\varepsilon) = \bigcap_{s \in S} U_s^{\varepsilon(s)}$ et $\mathcal{U} = \{U(\varepsilon): \varepsilon \in \{\pm 1\}^S\}$. Montrons que $\mathcal{U}$ est un recouvrement pur de X^{an}. Comme $U_s^{\varepsilon(s)}$ est admissible affinoïde de X^{an}, il suit que $U(\varepsilon)$ est admissible affinoïde de X^{an}. Ensuite $X = U_s^1 \cup U_s^{-1}$ implique que $\mathcal{U}$ est un recouvrement. Enfin $U_s^{\varepsilon(s)} \cap U_s^{\varepsilon'(s)}$ pur dans $U_s^{\varepsilon'(s)}$ implique que $U(\varepsilon) \cap U(\varepsilon')$ est pur dans $U(\varepsilon)$ (lemme 1, 3).

Montrons que $U_{i_0} = \bigcup_{\varepsilon} U(\varepsilon)$ où la réunion est étendue à tous les $\varepsilon \in \{\pm 1\}^S$ tels que $\varepsilon(i_0, j) = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n_{i_0}$. Ainsi U est réunion d'éléments de $\mathcal{U}$, ce qui montre que $r_{\mathcal{U}}(U)$ est ouvert et que $U = r_{\mathcal{U}}^{-1}(r_{\mathcal{U}}(U))$.

LEMME 3. – *Soient k un corps valué complet, X une variété projective pure de dimension* 1 *sur k, $\mathcal{U}$ un recouvrement pur distingué de X^{an}, $\overline{X^{an}_{\mathcal{U}}}$ la réduction associée. Alors $\overline{X^{an}_{\mathcal{U}}}$ est une variété algébrique projective* (pure de dimension 1).

DÉMONSTRATION. – Il suffit de considérer le cas où X est connexe, ce qui est équivalent à X^{an} connexe par GAGA ([Se], [Ko], [Fr], p. 272). Comme $\mathcal{U}$ est distingué, X^{an} est réduit, donc aussi X. On a $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}) = H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = l$ par GAGA. Or l est un k-espace vectoriel de dimension finie, c'est une algèbre réduite et comme X est connexe c'est un corps. La norme induite sur $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}})$ par celle des $\mathcal{O}_{X^{an}}(U_i)$ est potentiellement multiplicative, c'est donc la valeur absolue de l, de plus on a $|l| = |k|$ ($\mathcal{U}$ est distingué). D'abord on a $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0) = l^0$, ensuite $\bar{l} = l^0/l^{00} = l^0/k^{00}l^0 \simeq l^0 \otimes_{k^0} \bar{k}$; ainsi $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0) \otimes_{k^0} \bar{k}$ est un $\bar{k}$ espace vectoriel de dimension finie. On a la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0) \otimes \bar{k} \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0 \otimes \bar{k}) \to \mathrm{Tor}_1^{k^0}(H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0), \bar{k}) \to 0$$

([G et vdP], p. 141, [Fr], p. 313). On sait que $M = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}^0)$ est un k^0-module fini ([Bo 3], lemma 2.1, p. 9, [G et vdP], p. 140, [Fr], p. 313), soit s le nombre minimal de générateurs de M, on a donc une suite exacte $0 \to N \xrightarrow{\alpha} k^{0s} \to M \to 0$, avec

$\alpha(N) \subset k^{00s}$. En tensorisant par $\bar{k}$ on obtient la suite exacte $\mathrm{Tor}_1^{k^0}(k^{0s}, \bar{k}) \to \mathrm{Tor}_1^{k^0}(M, \bar{k}) \to \to N \otimes \bar{k} \xrightarrow{\alpha \otimes 1_{\bar{k}}} \bar{k}^s$. Comme k^{0s} est plat sur k^0 on a $\mathrm{Tor}_1^{k^0}(k^{0s}, \bar{k}) = 0$ et $\alpha \otimes 1_{\bar{k}}(N \otimes \otimes \bar{k}) = 0$ parce que $\alpha(N) \subset k^{00s}$. Il suit que $\mathrm{Tor}_1^{k^0}(M, \bar{k}) \simeq N \otimes \bar{k}$. Il est ensuite élémentaire de montrer que $\dim_{\bar{k}} N \otimes \bar{k} \leqslant s$. Il suit alors de (1) que $\dim_{\bar{k}} H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^0_{X^{\mathrm{an}}} \otimes \otimes \bar{k}) < \infty$, ce qui veut dire que $\dim_{\bar{k}} \mathcal{O}_{\overline{X^{\mathrm{an}}_{\mathfrak{U}}}}(\bar{X}^{\mathrm{an}}_{\mathfrak{U}}) < \infty$. Ainsi $\bar{X}^{\mathrm{an}}_{\mathfrak{U}}$ est une variété algébrique projective.

REMARQUE. – Si k est algébriquement clos et X réduit, tout recouvrement pur est distingué ([BGR], p. 253, [Fr], p. 70).

PROPOSITION 3 ([Bo, Lu]). – *Soient X une courbe algébrique, projective, régulière, connexe sur un corps K valué complet et algébriquement clos, $r: X \to Y$ une réduction définie par un recouvrement pur fini, S un ensemble fini non vide de points réguliers de Y. Alors on a les propriétés suivantes:*

1) *L'ensemble $X_1 = r^{-1}(Y - S)$ est une partie affinoïde de X.*

2) *Soit $s: X_1 \to \bar{X}_1^c$ la réduction canonique et $\varphi: Y - S \to \bar{X}_1^c$ le morphisme tel que $\varphi \circ r = s$. Soient Z la réunion des composantes irréductibles de Y qui ne rencontrent pas S, $y \in Y - S$. Alors $\varphi^{-1}(\varphi(\{y\}))$ est la composante connexe de $Z \cup \{y\}$ qui contient y et $\varphi: Y - S - Z \to \varphi(Y - S - Z)$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. – 1) est la proposition 3.7 *a*) de [Bo, Lu]; 2) est la proposition 3.7 *d*) et le lemme 2.1 de [Bo, Lu].

COROLLAIRE 1. – *Soient X une variété algébrique projective, connexe, régulière de dimension 1 sur un corps valué complet, algébriquement clos, $\mathfrak{U}$ un recouvrement pur fini de X^{an}, $r_{\mathfrak{U}}: X \to \bar{X}_{\mathfrak{U}}$ la réduction associée, $U \neq X$ une réunion finie d'admissibles affinoïdes de X^{an} qui est un ouvert formel de $(X, \mathfrak{U})$. Alors il existe un recouvrement pur fini $\mathfrak{V}$ moins fin que $\mathfrak{U}$ tel que U soit ouvert formel de $(X, \mathfrak{V})$ et que $r_{\mathfrak{V}}(U)$ soit ouvert affine dense. En particulier U est une partie affinoïde de X^{an}.*

DÉMONSTRATION. – α) *Le recouvrement pur* $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2\}$.

Soient $Y = r_{\mathfrak{U}}(X)$, $W = r_{\mathfrak{U}}(U)$, Y' la réunion des composantes irréductibles de Y contenues dans W, Y'' la réunion des composantes irréductibles de Y qui ne rencontrent pas W, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ les autres composantes irréductibles de Y, p_i, $q_i \in Y_i \cap W$ réguliers, $p_i \neq q_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Soient $P_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, $P_2 = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$, $V_i = r_{\mathfrak{U}}^{-1}(Y - P_i)$, $i = 1, 2$, alors V_i est un ouvert affinoïde de X (proposition 3, 1)).

Montrons que $V_1 \cap V_2$ est un ouvert formel de V_i. Soient $s_i: V_i \to \bar{V}_i^c$ la réduction canonique de V_i, $\varphi_i: Y - P_i \to \bar{V}_i^c$ le morphisme tel que $\varphi_i \circ r_{\mathfrak{U}} = s_i$. On a $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(Y - P_1 - P_2)) = Y - P_1 - P_2$ (proposition 3, 2)), ceci montre que $s_i^{-1}(\varphi_i(Y - - P_1 - P_2)) = r_{\mathfrak{U}}^{-1}(Y - P_1 - P_2) = V_1 \cap V_2$ (proposition 3, 2)). Or $\varphi_i(Y - P_1 - P_2)$ est un ouvert affine de $\bar{V}_i^c$, ce qui montre que $V_1 \cap V_2$ est formel dans V_i. Ainsi $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2\}$ est un recouvrement pur de X moins fin que $\mathfrak{U}$ puisque V_i est ouvert formel de $(X, \mathfrak{U})$.

β) *L'ouvert U est un ouvert formel de $(X, \mathcal{V})$ et $r_{\mathcal{V}}(U)$ est un ouvert dense.*

Soient $Z = r_{\mathcal{V}}(X)$ et $\psi\colon Y \to Z$ le morphisme tel que $\psi \circ r_{\mathcal{U}} = r_{\mathcal{V}}$. On a $r_{\mathcal{V}}^{-1}(r_{\mathcal{V}}(U)) = r_{\mathcal{U}}^{-1}(\psi^{-1}(\psi(W)))$ parce que $r_{\mathcal{V}} = \psi \circ r_{\mathcal{U}}$; il suffit donc de montrer que $\psi^{-1}(\psi(W)) = W$ puisque $U = r_{\mathcal{U}}^{-1}(W)$. Par la proposition 3, 2) on a $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(W - P_i)) = W - P_i$, il suit donc que $\psi^{-1}(\psi(W)) = W$.

Comme Y'' est complet (lemme 3), que $\overline{V}_i^c$ est affine, on a $\varphi_i(Y'')$ fini, par suite $Z - \psi(W)$ est fini, ainsi $\psi(W)$ est un ouvert dense de Z (en effet Z est pur de dimension 1).

γ) *Les composantes irréductibles de Z sont $\psi(Y_1), \ldots, \psi(Y_s)$ et $\psi(W)$ est un ouvert affine* (dense) *de Z.*

Comme Y est connexe (parce que X l'est) il suit que $Y - P_i$ est connexe. Alors la proposition 3, 2) montre que $\varphi_i(Y - P_i) = \varphi_i((Y_1 \cup \ldots \cup Y_s) - P_i)$ et ainsi que $\psi(Y_1 \cup \ldots \cup Y_s) = Z$. Par la proposition 3, 2) $\varphi_i\colon (Y - P_i - Y' - Y'') \to \varphi_i(Y - P_i - Y' - Y'')$ est un isomorphisme, ainsi $\psi\colon (Y - Y' - Y'') \to \psi(Y - Y' - Y'')$ est un isomorphisme. Comme $Y - Y' - Y''$ est dense dans $Y_1 \cup \ldots \cup Y_s$ les adhérences $\overline{\psi(Y_i)}$ de $\psi(Y_i)$ dans Z sont les composantes irréductibles de Z (Z est pur de dimension 1). Enfin Y_i est complet (lemme 3) et donc $\psi(Y_i)$ est fermé dans Z; ce qui montre bien que $\psi(Y_1), \ldots, \psi(Y_s)$ sont les composantes irréductibles de Z.

Soit $y_i \in Y_i$ et $y_i \notin W$, par la proposition 3, 2) on a $\psi(y_i) \notin \psi(W)$. Ainsi chaque composante irréductible de $\psi(W)$ est affine, ce qui montre que $\psi(W)$ est affine.

Il suit alors de [Bo 3], theorem 3.1, que U est une partie affinoïde de X.

COROLLAIRE 2. – *Soient X une variété algébrique, projective, connexe régulière de dimension* 1 *sur un corps valué complet, algébriquement clos, $U \neq X$ une réunion finie d'admissibles affinoïdes de X^{an}. Alors U est une partie affinoïde de X^{an}.*

DÉMONSTRATION. – Par le lemme 2 il existe un recouvrement pur fini $\mathcal{U}$ de X^{an} tel que U soit un ouvert formel de $(X, \mathcal{U})$; il suit alors du corollaire 1 que U est une partie affinoïde de X^{an}.

2. – Structure des espaces quasi-compacts de dimension 1.

2.1. *Normalisation.*

2.1.1. *Le faisceau des fractions, des fonctions méromorphes* ([Gr], [Fr, vdP], [Bo 4]). – Soient A une algèbre affinoïde, $T(A)$ la partie multiplicative des éléments de A qui ne divisent pas zéro, $Fr(A) \overset{\text{déf}}{=} T(A)^{-1}A$ l'anneau total des fractions de A. Soit X un espace analytique, alors il existe sur X un faisceau noté $\mathcal{F}r_X$, appelé le faisceau des fractions tel que $\mathcal{F}r(U) = Fr(\mathcal{O}_X(U))$ pour tout admissible affinoïde U de X ([Fr, vdP], III.7, p. 116). Le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}r_X$ est injectif.

Soient A une algèbre affinoïde, $\mathfrak{N}$ l'idéal des nilpotents de A, $\varphi: A \to A/\mathfrak{N}$ la surjection canonique et $S(A) \overset{\text{déf}}{=} \varphi^{-1}(T(A/\mathfrak{N}))$ qui est une partie multiplicative de A avec $S(A) \supset T(A)$. Soit X un espace analytique, alors il existe sur X un faisceau noté $\mathcal{M}_X$, appelé le *faisceau des fonctions méromorphes* tel que $\mathcal{M}_X(U) = S(\mathcal{O}_X(U))^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ pour tout admissible affinoïde U de X.

Il existe un morphisme canonique $\alpha: \mathcal{F}r_X \to \mathcal{M}_X$ qui est un isomorphisme si X est réduit; si X n'est pas réduit, α peut ne pas être injectif et ne pas être surjectif, en particulier le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathcal{M}_X$ peut ne pas être injectif.

REMARQUE. – Cette définition de fonction méromorphe est celle de GRAUERT ([Gr]), c'est l'analogue des fonctions rationnelles sur une variété algébrique (§ 1.4). La notion la plus utilisée est celle de faisceau des fractions (souvent appelé faisceau des fonctions méromorphes [Fr, vdP], [Bo 4]) parce qu'elle permet de construire par l'intermédiaire des diviseurs de Cartier des sous-faisceaux qui sont inversibles (§ 2.3).

2.1.2. *Normalisation d'un espace analytique réduit* ([Ki 1]). – Soient X un espace analytique réduit, $\mathcal{M}_X$ le faisceau des fonctions méromorphes, $\mathcal{F}(U) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_X(U)'$ la normalisation de $\mathcal{O}_X(U)$ dans $\mathcal{M}_X(U) = \mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_X(U))$ pour U admissible affinoïde (i.e. $\mathcal{O}_X(U)'$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_X(U)$ dans $Fr(\mathcal{O}_X(U))$. Le théorème de Gerritzen dit que $\mathcal{F}(U)$ est fini sur $\mathcal{O}_X(U)$, ainsi $\mathcal{F}(U)$ est une algèbre affinoïde. Soient $\varphi: \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{F}(U)$ l'injection canonique, $V \subset U$ une partie affinoïde de U, alors $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U) \bigotimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V) \subset \mathcal{M}_X(V)$ est le couple associé à la partie affinoïde $\mathrm{Spm}\,\varphi^{-1}(V)$ de $\mathrm{Spm}\,\mathcal{F}(U)$. Il suit que $\mathcal{F}(U)$ normal implique $\mathcal{F}(U) \bigotimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V)$ normal ([BGR], p. 301); comme $\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{O}_X(V)$ est fini sur $\mathcal{O}_X(V)$ il suit que $\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{F}(V)$. Donc $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau cohérent; il existe un sous-faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{M}_X$ cohérent sur X tel que $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U) = \mathcal{O}_X(U)'$ pour tout admissible affinoïde U de X.

Alors $\mathcal{F}$ définit un espace analytique X' et un morphisme fini $\eta: X' \to X$ tel que pour tout admissible affinoïde U de X on ait $\eta^{-1}(U) = \mathrm{Spm}\,\mathcal{F}(U)$ comme espace affinoïde, $\eta^{\#}(U): \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X'}(\eta^{-1}(U))$ étant l'injection canonique dans $\mathcal{O}_X(\eta^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(U)'$. Cet espace X' s'appelle la *normalisation de* X.

Il suit que X' est réduit, que X séparé implique X' séparé. Si $\{X_i\}_i$ sont les composantes irréductibles de X, alors $\{\eta^{-1}(X_i)\}_i$ sont les composantes connexes de X' et les $\eta^{-1}(X_i)$ sont irréductibles; en plus $\eta^{-1}(X_i)$ est isomorphe à la normalisation de X_i munie de la structure analytique réduite induite.

Soit X une variété algébrique réduite sur un corps valué complet, alors *on a canoniquement* $(X^{\mathrm{an}})' = (X')^{\mathrm{an}}$ où X' est la normalisation de X; ceci résulte de $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X^{\mathrm{an}},x}$, de [BGR], p. 301 et de [Ma], p. 258.

2.1.3. *La normalisation en dimension* 1.

PROPOSITION 4. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique réduit,* *pur de dimension* 1, $\eta\colon X' \to X$ *sa normalisation. Alors* X *est affinoïde si et seulement si* X' *est affinoïde.*

DÉMONSTRATION. – α) *Soit* X *un espace analytique affinoïde, réduit, pur, de dimension* 1, *alors* $\mathcal{O}_{X'}(X')/\mathcal{O}_X(X)$ *est un* k*-espace vectoriel de dimension finie. En particulier* X_{sing} *est fini.*

Soient $A = \mathcal{O}_X(X)$, $B = \mathcal{O}_{X'}(X')$, il existe un homomorphisme injectif et fini $k\langle T\rangle \to A \to B$. Montrons que B est un $k\langle T\rangle$-module sans torsion. Sinon on aurait $f \in k\langle T\rangle$, $f \neq 0$ et $f \in \mathfrak{P}$ où $\mathfrak{P}$ est un premier minimal de B, ce qui montre que $B/\mathfrak{P}$ est fini sur $k\langle T\rangle/fk\langle T\rangle$; c'est impossible parce que $\dim B/\mathfrak{P} = 1$ et $\dim k\langle T\rangle/fk\langle T\rangle = 0$. Ainsi B est fini, sans torsion sur $k\langle T\rangle$ qui est principal; alors il existe $e_1, \ldots, e_n$ une base de B sur $k\langle T\rangle$, $f_1, \ldots, f_n \in k\langle T\rangle$ avec $B = \bigoplus k\langle T\rangle e_i$ $A = \bigoplus k\langle T\rangle f_i e_i$. Comme $F_r(A) = F_r(B)$ on a $\operatorname{rang}_{k\langle T\rangle} B = \operatorname{rang}_{k\langle T\rangle} A$, ainsi $f_i \neq 0$ et $B/A = \bigoplus k\langle T\rangle/f_i k\langle T\rangle$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $F = \eta_* \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}_X$, alors la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X \to \eta_* \mathcal{O}_{X'} \to F \to 0$ donne la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X'}(X') \to F(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est normal si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier ($\dim X = 1$), on a $F_x \neq 0$ si et seulement si $x \in$ $\in X_{\text{sing}}$. Il suit de ce qui précède que $F(X)$ est de dimension finie, alors on a $F(X) \to F_x$ surjectif; il suit $\{x \in X\colon F_x \neq 0\}$ est fini et que $F(X) = \bigoplus_{x \in X_{\text{sing}}} F_x$ (on sait de façon générale que X_{reg} est un ouvert de Zariski dense dans X, [Ki 2]).

Désormais on suppose que X' est *affinoïde*, ainsi X est quasi-compact.

β) *Il existe un entier* $N \geqslant 1$ *qui possède la propriété suivante: soit* $x \in X_{\text{sing}}$, $f \in \bigoplus_{y \in \eta^{-1}(x)} \mathcal{O}_{X',y} = (\mathcal{O}_{X,x})'$ *tel que* $f(y) = 0$ *pour tout* $y \in \eta^{-1}(x)$. *Alors* $f^N \in \mathfrak{M}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$.

Soit $\mathfrak{M}$ le maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ les maximaux de $(\mathcal{O}_{X,x})'$, alors $\mathfrak{R} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_r = \sqrt{\mathfrak{M}(\mathcal{O}_{X,x})'}$, il existe donc n_1 tel que $\mathfrak{R}^{n_1} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{O}_{X,x})$. Comme $(\mathcal{O}_{X,x})'/\mathcal{O}_{X,x}$ est de dimension finie, la suite $\mathfrak{M}^n(\mathcal{O}_{X,x})'/\mathcal{O}_{X,x}$ est stationnaire, on a donc $\mathfrak{M}^{n_2+1}(\mathcal{O}_{X,x})'/\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{M}^{n_2}(\mathcal{O}_{X,x})'/\mathcal{O}_{X,x}$; ce qui montre par Nakayama que $\mathfrak{M}^{n_2}(\mathcal{O}_{X,x})'/\mathcal{O}_{X,x} = 0$. On a donc $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r)^{n_1+n_2} \subset \mathcal{O}_{X,x} \cap \mathfrak{M}(\mathcal{O}_{X,x})' = \mathfrak{M}$.

Alors β) suit du fait que X_{sing} est fini (c'est α) et que X est quasi-compact.

γ) *L'algèbre* $A = \mathcal{O}_X(X)$ *est affinoïde.* – Soit toujours $F = \eta_* \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}_X$, alors la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X \to \eta_* \mathcal{O}_{X'} \to F \to 0$ donne la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X'}(X') \to$ $\to F(X)$. Comme X est quasi-compact il suit de α) que $F(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Il existe un homomorphisme fini $k\langle T\rangle \to \mathcal{O}_{X'}(X') = B$. Soient $y \in \eta^{-1}(X_{\text{sing}})$ et $P_y(Z) = \operatorname{irr}(T(y), k, Z)$, $f = \prod_y P_y(T)$, on a donc $f \in B$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in \eta^{-1}(X_{\text{sing}})$ et $P_y(Z) \in k^0[Z]$ est unitaire. Il suit de β) que $f^N \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$ et que $f^N = Q(T)$ où $Q(Z) \in k^0[Z]$ est unitaire. Ainsi l'adhérence $k[f]^\wedge$ de $k[f]$ dans $k\langle T\rangle$ est une algèbre de Tate T_1, $k\langle T\rangle$ est fini sur $k[f]^\wedge$ et $k[f]^\wedge \subset A = \mathcal{O}_X(X)$. Il suit donc que B fini sur $k[f]^\wedge$ implique A fini sur $k[f]^\wedge$, ce qui montre que A est affinoïde.

δ) *Soient* $\varrho_x\colon A = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ *la restriction canonique*; $\mathfrak{M}_x$ *le maximal de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *et* $\theta(x) = \varrho_x^{-1}(\mathfrak{M}_x)$, *c'est un maximal de* A. *Alors* $\theta\colon X \to \operatorname{Spm} A$ *est bijectif.*

Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de A, comme B est fini sur A, il existe un maximal $\mathfrak{M}'$ de B au-dessus de $\mathfrak{M}$, il existe U un affinoïde admissible de X tel que $\mathfrak{M}' \in \eta^{-1}(U)$. Soit $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'\mathcal{O}_{X'}(\eta^{-1}(U)) \cap \mathcal{O}_X(U)$, comme le diagramme ci-dessous est commutatif on a $\mathfrak{M} = \theta(x)$ où x est le point de $U \subset X$ correspondant à $\mathfrak{M}''$. Ce qui montre que θ est surjectif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) = A & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X'}(X') = B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X'}(\eta^{-1}(U)) \end{array}$$

Soient $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Il existe $g \in B = \mathcal{O}_{X'}(X')$ tel que $g(y) = 0$ pour tout $y \in \eta^{-1}(X_{\text{sing}}) \cap (X' - \eta^{-1}(x_2))$ et $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in \eta^{-1}(x_2)$. Soient $h = g^N$ (N défini en β)), $P_y(T) = \operatorname{irr}(h(y), k, T)$ pour $y \in \eta^{-1}(x_2)$ on a $P_y(0) \neq 0$. Soit $h_1 = \prod_y P_y(h) = u_0 + hQ(h)$ où $u_0 \in k^X$, $Q(T) \in k[T]$ et $h_1(y) = 0$ pour tout $y \in \eta^{-1}(x_2)$. On a donc $h_1^N = u_0^N + hR(h)$ avec $R(T) \in k[T]$, il suit de β) que $h_1^N \in \mathcal{O}_{X,x_2}$, donc $f = hR(h) \in \mathcal{O}_{X,x_2}$ avec $f(x_2) \neq 0$. D'autre part $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in X_{\text{sing}}$ et $x \neq x_2$, ainsi $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X_{\text{sing}}$. On a donc $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$, i.e. $f \in \mathcal{O}_X(X) = A$, $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) \neq 0$. Il suit que $\theta(x_1) \neq \theta(x_2)$, ce qui montre que θ est injectif.

ε) *L'homomorphisme canonique* $\varphi\colon \hat{A}_{\mathfrak{M}} \to (\mathcal{O}_{X,x})^\wedge$ *est bijectif.*

Montrons que $\varphi_n\colon A \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x^n$ est surjectif. Soient $x \in X$, $\{y_1, \ldots, y_r\} = \eta^{-1}(\{x\})$, $f \in \mathcal{O}_{X,x} \subset (\mathcal{O}_{X,x})' = \bigoplus \mathcal{O}_{X',y_i}$. Il existe $g \in B = \mathcal{O}_{X'}(X')$ tel que $g - f \in \mathfrak{M}_{y_1}^{nN} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{y_r}^{nN}$; en effet $B/\mathfrak{M}_i^{nN} \to \mathcal{O}_{X',y_i}/\mathfrak{M}_{y_i}^{nN}$ est bijectif ([Ta], prop. 7.3, p. 270, [Fr], p. 81) et le théorème des restes chinois permet de conclure. Comme $\mathfrak{M}_{y_1}^N \ldots \mathfrak{M}_{y_r}^N \subset \mathfrak{M}_x$ (c'est β)) on a $g - f \in \mathfrak{M}_x^n$; en particulier $g \in \mathcal{O}_{X,x}$. Soit $s \in A$ tel que $s(x) \neq 0$ et $s(x') = 0$ pour tout $x' \in X_{\text{sing}}$, $x' \neq x$ (en effet θ est bijectif par δ)). D'après la démonstration de β) on a $\mathfrak{M}_{y_1'}^N \cdot \mathfrak{M}_{y_2'}^N \ldots \mathfrak{M}_{y_r'}^N \subset \mathfrak{M}_{x'}$ pour $N \gg 0$, ainsi $s^N g \in \mathcal{O}_{X,x'}$ pour $x' \in X_{\text{sing}}$ et $x' \neq x$; il suit donc que $s^N g \in \mathcal{O}_{X,x''}$ pour tout $x'' \in X$. Comme $s \notin \mathfrak{M}$ on a $s^N A + \mathfrak{M}^{n+N} = A$, soit $1 = s^N h + u$, $h \in A$, $u \in \mathfrak{M}^{n+N}$. Ainsi $g = s^N gh + gu$ où $s^N g \in A$ et $gu \in \mathfrak{M}_x^{n+N}(\mathcal{O}_{X,x})'$, donc $gu \in \mathfrak{M}_x^n$ (par β)). Ceci montre que φ_n est surjectif et donc que φ est surjectif.

Soient $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ les maximaux de B au-dessus de $\mathfrak{M}$, comme B/A est un k-espace vectoriel de dimension finie, il existe M tel que $\mathfrak{M}_1^M \ldots \mathfrak{M}_r^M \subset \mathfrak{M}$. Soit $a \in A$ avec $\varphi(a) \in \mathfrak{M}_x^{M \cdot n}$, on a donc $a \in (\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_r)^{M \cdot n}$ et par suite $a \in \mathfrak{M}^n$. Ce qui montre que φ est injectif.

Ainsi φ est bijectif.

ζ) *L'application* $\theta\colon X \to \operatorname{Spm} A$ *induit un isomorphisme d'espace analytique.*

Soit U un admissible affinoïde de X et $\varrho\colon A = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$ l'homomorphisme restriction. Alors $\operatorname{Spm} \varrho\colon U \to \operatorname{Spm} A$ coïncide avec θ, donc est injectif (δ)), d'autre part ε) montre que $\operatorname{Spm} \varrho$ est une immersion ouverte. Ainsi $\theta(U) = \operatorname{Spm} \varrho(U)$ est une partie affinoïde de $\operatorname{Spm} A$ et ϱ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spm} A}(\theta(U))$ sur $\mathcal{O}_X(U)$ ([Ge, Gr], [Fr], p. 137). Comme θ est bijectif, il induit un isomorphisme. Ceci montre que X' affinoïde implique X affinoïde (la réciproque est essentiellement la définition de X').

2.2. *Espaces quasi-compacts irréductibles de dimension* 1.

PROPOSITION 5. – *Soit X un espace analytique, séparé, connexe, régulier, quasi-compact, de dimension* 1 *sur un corps valué complet, algébriquement clos. Alors X est soit affinoïde, soit projectif.*

DÉMONSTRATION. – α) *Soient X un espace analytique affinoïde ou projectif, connexe, régulier, de dimension* 1 *sur un corps valué complet, algébriquement clos, U une partie affinoïde de X. Alors il existe $f \in \mathcal{M}_X(X)^\times$ tel que $U = \{x \in X\colon f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$ et de plus $V = \{x \in X\colon 1/f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|(1/f)(x)| \leqslant 1\}$ est une partie affinoïde de X.*

Si X est projectif on a $\mathcal{R}(X) = \mathcal{M}_X(X)$ par GAGA ([Se], [Ko]), le théorème 1 montre l'existence de f définissant U, on a $f \neq 0$ puisque U est affinoïde. Comme X est intègre, f est inversible et la proposition 2 montre que V est affinoïde.

Si X est affinoïde on sait que X est ouvert affinoïde de l'analytification d'une variété algébrique projective, connexe régulière de dimension 1 ([vdP 1], p. 156, ou corollaire 2 du théorème 6, § 2.6). Alors α) suit de ce qui précède.

β) *Soit X satisfaisant les hypothèses de la proposition. Alors X est soit affinoïde, soit projectif.*

Il existe un nombre fini d'admissibles affinoïdes $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de X avec les propriétés suivantes, $X_i \not\supset (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1})$ et $X_i \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \neq \emptyset$ (parce que X est quasi-compact et connexe).

Supposons $Y = X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}$ affinoïde ou projectif, montrons alors que $Y \cup X_i$ est affinoïde ou projectif.

D'abord $Y \cap X_i$ est une partie affinoïde de Y (et de X_i); en effet si Y est affinoïde cela suit du fait que X est séparé, si Y est projectif c'est le corollaire 2 de la proposition 3.

Par α), il existe $f \in \mathcal{M}_X(Y)$ tel que $Y \cap X_i = \{y \in Y\colon f \in \mathcal{O}_{X,y}$ et $|f(y)| \leqslant 1\}$ et $U = \{y \in Y\colon 1/f \in \mathcal{O}_{X,y}$ et $|(1/f)(y)| \leqslant 1\}$ est une partie affinoïde de Y; toujours par α il existe $g \in \mathcal{M}_X(X_i)$ tel que $Y \cap X_i = \{x \in X_i\colon g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$ et $V = \{x \in X_i\colon 1/g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|(1/g)(x)| \leqslant 1\}$ est une partie affinoïde de X_i.

Montrons que $\mathcal{U} = \{U, Y \cap X_i, V\}$ est un recouvrement pur de $Y \cup X_i$. Comme X est régulier on a $Y = U \cup (Y \cap X_i)$ et $X_i = V \cup (Y \cap X_i)$, ce qui montre que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de $Y \cup X_i$. Clairement $U \cap (Y \cap X_i)$ est ouvert formel de U et de $Y \cap X_i$; de même $V \cap (Y \cap X_i)$ est ouvert formel de V et de $Y \cap X_i$. Il reste à montrer que $U \cap V$ est ouvert formel de U et de V. Soit $W = \{y \in U: |(1/f)(y)| = 1\}$, alors $U \cap V = \{y \in W: |g|_W(y)| = 1\}$ (on a $W \subset Y \cap X_i$). Comme W est ouvert formel de U et que $U \cap V$ est ouvert formel de W, il suit que $U \cap V$ est ouvert formel de U (lemme 1, § 1.4); de même $U \cap V$ est ouvert formel de V.

Comme $Y \cup X_i$ est séparé, $\overline{(Y \cup X_i)}_{\mathfrak{U}}$ est une variété algébrique séparée réduite de dimension 1, donc $\overline{(Y \cup X_i)}_{\mathfrak{U}}$ est ouvert dense d'une variété algébrique projective de dimension 1, alors le théorème de van der Put (théorème 6, § 2.6) montre que $Y \cup X_i$ est ouvert analytique d'un espace projectif, connexe, régulier de dimension 1. Ainsi le corollaire 2 de la proposition 3 montre que $Y \cup X_i$ est soit affinoïde, soit projectif.

Il suit ainsi par récurrence que X est soit affinoïde, soit projectif.

REMARQUE. – On peut procéder autrement. Le résultat (§ 4.3, p. 100) de [Me] dit que X admet un recouvrement pur fini $\mathfrak{U}$, on sait alors par un résultat de van der Put que $\bar{X}_{\mathfrak{U}}$ projectif implique X projectif et que $\bar{X}_{\mathfrak{U}}$ non projectif implique X affinoïde ([Fr], th., p. 334, th. 4, p. 345; en fait c'est essentiellement contenu dans la démonstration du th. 3.1 de [vdP 2]).

THÉORÈME 2. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique séparé, quasi-compact, irréductible, de dimension* 1 *sur k. Alors X est soit affinoïde, soit projectif.*

DÉMONSTRATION. – Il existe un corps l normal fini sur k tel que les composantes irréductibles $Y_1, \ldots, Y_s$ de $X_{(l)}$ soient géométriquement irréductibles (proposition 8, § 3.1). Soit K le complété de la clôture algébrique de k, alors $Y_{1(K)}, \ldots, Y_{s(K)}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(K)}$ et on a $(X_{(K)\mathrm{red}})' = \coprod_i (Y_{i(K)\mathrm{red}})'$ (§ 2.1.2). Comme $Y_{1(K)}$ est irréductible, $(Y_{1(K)\mathrm{red}})'$ l'est aussi. La proposition 5 montre alors que $(Y_{1(K)\mathrm{red}})'$ est soit affinoïde, soit projectif.

α) *Supposons $(Y_{1(K)\mathrm{red}})'$ affinoïde. Alors X est affinoïde.*

Montrons que Y_1 est affinoïde. D'abord $Y_{1(K)\mathrm{red}}$ est affinoïde par la proposition 4, § 2, $Y_{1(K)}$ est affinoïde (§ 4.1, [Fr], ex. 13, p. 280) et alors Y_1 est affinoïde (remarque au lemme 7, § 3.3). Comme $Y_i = Y_1^\sigma$ où $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(l/k)$ (lemme 6, § 3.2), on a aussi Y_i affinoïde, ainsi $(Y_{i(K)\mathrm{red}})'$ est affinoïde pour tout i. Il suit que $(X_{(K)\mathrm{red}})'$ est affinoïde et par le procédé précédent on déduit que X est affinoïde.

β) *Supposons $(Y_{1(K)\mathrm{red}})'$ projectif. Alors X est projectif.*

En effet α) montre que $(Y_{i(K)\mathrm{red}})'$ est projectif, ainsi $(X_{(K)\mathrm{red}})'$ est projectif et aussi X (proposition 11, § 4.3).

COROLLAIRE. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique séparé quasi-compact, pur de dimension* 1, *$U \subset X$ une réunion finie d'admissibles affinoïdes* *de X. On suppose que pour toute composante irréductible Y de X qui est projective on a $U \cap Y \neq Y$. Alors U est un ouvert affinoïde de X* (une composante irréductible Y de X est dite *projective*, si munie de la structure analytique induite réduite c'est un espace projectif).

DÉMONSTRATION. – On utilise la technique de la démonstration du théorème 2.

α) *Soient K le complété de la clôture algébrique de k, $\varphi\colon (X_{(K)\mathrm{red}})' \to X_{K(\mathrm{red})}$ la normalisation de $X_{(K)\mathrm{red}}$. Alors $\varphi^{-1}(U_{(K)})$ et $(X_{(K)\mathrm{red}})'$ satisfont les hypothèses du corollaire.*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X, l un corps normal fini sur k tel que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ soient géométriquement irréductibles (proposition 8, § 3.1). Soient $\{Y_{ij}\}_{1\leqslant j\leqslant n_i}$ les composantes irréductibles de $X_{i(l)}$, alors les Y_{ij} sont les composantes irréductibles de $X_{(l)}$; par suite les $Y_{ij(K)}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(K)}$. Ainsi les $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ sont les composantes connexes et irréductibles de $(X_{(K)\mathrm{red}})'$ (§ 2.1.2).

Montrons que $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)}) \subset \varphi^{-1}(U_{(K)})$ implique $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ affinoïde. En effet $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)}) \subset \varphi^{-1}(U_{(K)})$ implique $Y_{ij} \subset U_{(l)}$ (utiliser [BGR], proposition 1, p. 369, corollary 2, p. 370) $Y_{ij'} = Y_{ij}^{\sigma}$ où $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(l/k)$ (lemme 6, § 3.2) et que $U_{(l)}^{\sigma} = U_{(l)}$ on a donc $Y_{ij} \subset U_{(l)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n_i$; ainsi $X_{i(l)} = \bigcup_j Y_{ij} \subset U(l)$, soit $X_i \subset U$. Par hypothèse sur U, X_i muni de la structure analytique réduite induite est affinoïde puisqu'il n'est pas projectif (théorème 2); il suit facilement que $X_{i(K)}$ muni de la structure réduite est affinoïde et donc que $\varphi^{-1}(X_{i(K)}) = \coprod_j \varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ est affinoïde. Ainsi $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ est affinoïde pour la structure réduite induite.

β) *Soient Z affinoïde, connexe, régulier de dimension 1 sur K, $V \subset Z$ une réunion finie d'affinoïdes de Z. Alors V est affinoïde.*

On peut supposer V connexe, comme Z est régulier il suit que V est irréductible, quasi-compact, séparé de dimension 1, donc affinoïde ou projectif (théorème 2). Il existe un homomorphisme injectif et fini $\varphi\colon k\langle T\rangle \to A = \mathcal{O}_Z(Z)$, soit $f = \varphi(T)$. Supposons V projectif, on aurait $\mathcal{O}_Z(V) = K$, soit $f|_V \in K$ et comme Z est irréductible, cela veut dire que $f \in K$ et que $0 = \dim A$; ce qui est impossible. Ainsi V est affinoïde.

γ) *Soient Z projectif, connexe, régulier de dimension 1 sur K, $V \subsetneqq Z$ une réunion finie d'affinoïdes de Z. Alors V est affinoïde.*

C'est le corollaire 2 de la proposition 3, § 1.4.

δ) *Le cas général.* – Les $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ muni de la structure analytique réduite induite par $(X_{(K)\mathrm{red}})$ sont irréductibles, séparés, quasi-compacts de dimension 1, donc affinoïdes ou projectifs (théorème 2). Par α) si $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)})$ est projectif on a

$\varphi^{-1}(Y_{ij(K)}) \not\subset \varphi^{-1}(U_{(K)})$. Il suit de β) et γ) que $\varphi^{-1}(Y_{ij(K)}) \cap \varphi^{-1}(U_{(K)})$ est affinoïde et donc que $\varphi^{-1}(U_{(K)}) \simeq (U_{(K)\mathrm{red}})'$ est affinoïde. La proposition 5 montre que $U_{(K)\mathrm{red}}$ est affinoïde, donc que U est affinoïde.

REMARQUE. – FIESELER ([F 1], Satz 2.1, p. 99) montre qu'une réunion finie de parties affinoïdes d'un espace affinoïde de dimension 1 est un espace affinoïde; on aurait donc pu utiliser ce résultat pour β).

REMARQUE. – *Une partie affinoïde d'un espace affinoïde peut ne pas être une partie rationnelle.*

Soit X un espace affinoïde de dimension 1 sur un corps k valué, complet, algébriquement clos, $r\colon X \to \bar{X}^c$ la réduction canonique de X, supposons $\bar{X}^c$ irréductible. Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert formel de X qui est une partie rationnelle de X; on a $r(U)$ ouvert de $\bar{X}^c$, $U = r^{-1}(r(U))$, il existe $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ avec $\mathcal{O}_X(X) = \sum f_i \mathcal{O}_X(X)$ et $U = \{x \in X\colon |f_i(x)| \leqslant |f_0(x)|,\ 0 \leqslant i \leqslant n\}$. On peut supposer que $1 = \max_i \|f_i\|_{\mathrm{sp}}$, montrons que $\|f_0\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et que $D(\bar{f}_0) = r(U)$. Supposons $1 = \|f_i\|$ et $\|f_0\| < 1$, on a donc $r(U) \subset V(\bar{f}_i)$ ce qui est impossible parce que $\bar{X}^c$ est irréductible. Soit $p \in \bar{X}^c$ avec $\bar{f}_0(p) = 0$, alors il existe $x \in r^{-1}(p)$ tel que $f_0(x) = 0$ parce que $\bar{X}^c$ est irréductible, ainsi $x \notin U$ et comme $U = r^{-1}(r(U))$ on a $p \notin r(U)$.

Soient k un corps valué complet algébriquement clos tel que $\bar{k}$ ne soit pas la clôture algébrique d'un corps fini, E une courbe elliptique qui admet une réduction $s\colon E^{\mathrm{an}} \to Y$ qui soit une courbe elliptique. On sait alors que $Cl^0(Y)$ n'est pas de torsion, aussi il existe $y_1, y_2 \in Y$ avec $y_1 - y_2$ qui n'est pas d'ordre fini dans $Cl^0(Y)$. Il suit que $Y - \{y_1, y_2\}$ n'est pas un ouvert principal de $Y - \{y_1\}$.

Alors $X = s^{-1}(Y - \{y_1\})$, $U = s^{-1}(Y - \{y_1, y_2\})$ satisfont la remarque.

2.3. *Ouvert affinoïde d'un espace quasi-compact de dimension* 1.

Soient X un espace analytique, $f \in \mathcal{M}_X(X)$ (une fonction méromorphe sur X), on dit que f est *régulier* en x et on le note $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ s'il existe un admissible affinoïde $V \ni x$ tel que f soit l'image d'un élément g de $\mathcal{O}_X(V)$ par l'application canonique $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{M}_X(V)$. Il est alors facile de montrer que $|g(x)|$ ne dépend pas du g choisi avec les propriétés précédentes et on le note $|f(x)|$. On remarquera bien qu'il y a un abus de notation puisque l'homomorphisme $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{M}_X(V)$ peut ne pas être injectif.

Soit X un espace analytique, on appelle *diviseur de Cartier* D sur X la donnée d'une famille $\{U_i, f_i\}$ avec les propriétés suivantes: $\{U_i\}_i$ est un recouvrement affinoïde admissible de X, $f_i \in \mathcal{F}r_X(U_i)^{\times}$ (les inversibles de $\mathcal{F}r_X(U_i)$), $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^{\times} \subset$ $\subset \mathcal{F}r_X(U_i \cap U_j)^{\times}$ (voir § 2.1.1 pour la définition de $\mathcal{F}r_X$).

Si $D = \{U_i, f_i\}_i$ est un diviseur de Cartier sur X, il existe un sous-faisceau $\mathcal{L}(D)$ de $\mathcal{F}r_X$ qui est inversible et tel que $\mathcal{L}(D)|_{U_i} = (1/f_i)\mathcal{O}_{X|U_i} \subset \mathcal{F}r_{X|U_i}$ (on remarquera bien qu'on ne peut substituer $\mathcal{M}_X$ à $\mathcal{F}r_X$).

THÉORÈME 3. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique séparé, quasi-compact pur de dimension 1, U une partie affinoïde de X. Alors il existe* $f \in \in \mathcal{M}_X(X)$ (une fonction méromorphe sur X) *tel que* $U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x}$ *et* $|f(x)| \leq 1\}$.

DÉMONSTRATION. – A) *On suppose X réduit.*

α) Si X est *projectif* pur de dimension 1, c'est le théorème 1, § 1.

β) Supposons X *affinoïde, connexe, régulier, géométriquement réduit de dimension* 1.

Il existe un corps l_1 séparable fini sur k avec $X_{(l)}$ distingué et $\overline{X}_{(l)} = (\overline{X}_{(l_1)})_{(\bar{l})}$ pour tout corps valué complet $l \supset l_1$ ([Bo 1], lemma 2.7, p. 5; [Fr], ex. 12, p. 375). Il existe l_2 séparable fini sur l_1 tel que $\hat{\overline{X}}_{(l_2)} - \overline{X}_{(l_2)}$ soit rationnel sur $\bar{l}_2$, où $\hat{\overline{X}}_{(l_2)}$ est l'unique variété algébrique projective contenant $\overline{X}_{(l_2)}$ comme ouvert dense avec $\hat{\overline{X}}_{(l_2)} - \overline{X}_{(l_2)}$ régulier. Alors $X_{(l_2)}$ est ouvert affinoïde d'un espace projectif P (théorème 6, § 2.6). Par α) il existe $f \in \mathcal{R}(P) = \mathcal{M}_P(P)$ (donc $f \in \mathcal{M}_{X_{(l_2)}}(X_{(l_2)})$) tel que $U_{(l_2)} = \{x \in X_{(l_2)} : f \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ et $|f(x)| \leq 1\}$.

On peut supposer que l_2 est galoisien sur k, soient $G = \mathrm{Gal}\,(l_2/k)$ et $g = \prod_{\sigma \in G} f^\sigma$, on a donc $g \in \mathcal{M}_X(X)$. Montrons que

$$U = \{x \in X : g \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |g(x)| \leq 1\}\,. \tag{1}$$

Soit $x \in X_{(l_2)}$ avec $f \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$, on a donc $f^\sigma \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},\sigma(x)}$ et $|f(x)| = |f^\sigma(\sigma(x))|$. Soit $x \in U_{(l_2)}$, on a $\sigma^{-1}(x) \in U_{(l_2)}$, donc $f \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},\sigma^{-1}(x)}$, soit $f^\sigma \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ et $|f^\sigma(x)| \leq 1$; ce qui montre que $g \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ et $|g(x)| \leq 1$. Il suit facilement que $g \in \mathcal{O}_X(U)$ et $|g(x)| \leq 1$ pour $x \in U$ ([Fr], ex. 12, p. 239).

Si $x \notin U_{(l_2)}$ on a, ou bien $f^\sigma \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ et $|f^\sigma(x)| > 1$ ou bien $f^\sigma \notin \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$; ainsi ou bien $g \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ et $|g(x)| > 1$, ou bien $g \notin \mathcal{O}_{X_{(l_2)},x}$ ($X_{(l_2)}$ est régulier parce que l_2 est séparable sur k). Ceci montre (1).

γ) *Supposons* $X = \mathrm{Spm}\, A$ *affinoïde, connexe et régulier.*

Il existe un homomorphisme injectif et fini $k\langle T\rangle \hookrightarrow A$, soient L la clôture séparable de $Fr(k\langle T\rangle)$ dans $Fr(A)$ et B la clôture intégrale de $k\langle T\rangle$ dans L. Comme X est régulier, on a A intégralement clos, donc $B \subset A$, de plus B est fini sur $k\langle T\rangle$. On a $k\langle T\rangle \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{j}{\hookrightarrow} A$, ainsi $Y = \mathrm{Spm}\, B$ est connexe, régulier, géométriquement réduit (proposition 6, § 3.1) et $\mathrm{Spm}\, \bar{j} : X = \mathrm{Spm}\, A \to Y = \mathrm{Spm}\, B$ est bijectif ($Fr(A)$ est purement inséparable sur $Fr(B)$). Alors β) permet de conclure.

δ) *Supposons X réduit.*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X, $\varphi : X' \to X$ la normalisation de X, on a $X' = \coprod_i \varphi^{-1}(X_i)$ et $\varphi^{-1}(X_i) \simeq X'_i$ (§ 2.1.2). On a $\mathcal{M}_{X'}(X') = \mathcal{M}_X(X) = \bigoplus_i \mathcal{M}_{\varphi^{-1}(X_i)}(\varphi^{-1}(X_i))$ et $\varphi^{-1}(U) = \coprod_i (\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(X_i))$. Ainsi $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(X_i)$ est une partie affinoïde de $\varphi^{-1}(X_i) \simeq X'_i$, par le théorème 2 (§ 2.2) X'_i est soit affinoïde, soit projectif, donc par α) et γ) il existe $f_i \in \mathcal{M}_X(\varphi^{-1}(X_i))$ tel que $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(X_i) = \{x \in \varphi^{-1}(X_i) \colon f_i \in \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(X_i),x}$ et $|f_i(x)| \leqslant 1\}$. Soit $f = \sum_i f_i$, on a $\varphi^{-1}(U) = \{x \in X' \colon f \in \mathcal{O}_{X',x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Il existe $p(T) \in k^0[T]$ un polynôme unitaire avec $p(f) \in \mathcal{O}_X(U)$ $\big(p(T) = \prod_{x \in U \cap X_{\text{sing}}} P_x(T)^N$ pour $N \gg 0$, $P_x(T) = \operatorname{irr}(f(x), k, T)$, voir proposition 4, § 2.1.3 partie β) et γ) de la démonstration$\big)$; il suit alors que $|p(f)(x)| \leqslant 1$ pour $x \in U$, $p(f) \notin \mathcal{O}_{X',x}$ si $f \notin \mathcal{O}_{X',x}$ (x est régulier), et que $|p(f)(x)| > 1$ si $f \in \mathcal{O}_{X',x}$ et $|f(x)| > 1$. Soit $g = p(f)$ on a donc $U = \{x \in X \colon g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$.

B) Le cas général.

Il existe $f \in \mathcal{M}_{X_{\text{red}}}(X_{\text{red}})$ tel que $U = \{x \in X_{\text{red}} \colon f \in \mathcal{O}_{X_{\text{red}},x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$ (c'est A)). Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ les composantes irréductibles de X qui sont projectives pour la structure analytique réduite induite, l'argument utilisé dans la démonstration (partie B)) du théorème 1 montre que $U \not\supset Y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Il existe donc une partie finie $F \subset X$ telle que $F \cap Y_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $F \cap U = \emptyset$. Par le lemme 4' ci-après il existe un diviseur de Cartier $\{U_i, a_i\}$ sur X_{red} avec les propriétés suivantes. On a $a_i \in \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U_i)$; pour tout i, i' on a soit $a_{i|U_i \cap U_{i'}} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_{i'})^\times$ soit $U_i = U_{i'}$ et $a_i = a_{i'}$; pour tout i on a $a_{i|U \cap U_i} \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)^\times$; pour $s \in F \cap U_i$ on a $a_i(s) = 0$; enfin $f \in \mathcal{L}(D)(X_{\text{red}})$ où $\mathcal{L}(D)$ est le faisceau inversible associé à D.

Soit $\varphi \colon (X_{\text{red}})' \to X_{\text{red}}$ la normalisation de X_{red}, alors $D' = \{\varphi^{-1}(U_i), a_i\}$ est un diviseur de Cartier sur $(X_{\text{red}})'$ et on a $\varphi^*(\mathcal{L}(D)) = \mathcal{L}(D')$. Soient $Y_1, \ldots, Y_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ les composantes irréductibles de X_{red}, on a donc $Y_1, \ldots, Y_r$ projectifs et $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ affinoïdes pour la structure analytique réduite induite (c'est le théorème 2). Comme $(X_{\text{red}})' = \coprod_i (Y_i)'$ on a donc $(Y_i)'$ projectif pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $(Y_i)'$ affinoïde pour $i > r$. Le choix de D fait que le degré de D' est positif sur $(Y_i)'$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Ainsi $\mathcal{L}(D')$ est un faisceau inversible ample (définition § 4.2), il suit donc que $\mathcal{L}$ est ample (proposition 10, § 4.2).

Soient $b_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ dont l'image est a_i dans $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)_{\text{red}}$, si $U_i = U_{i'}$ et $a_i = a_{i'}$ on choisit $b_i = b_{i'}$. Il suit de cela que $b|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$, que $b_{i|U_i \cap U_j} = \varepsilon_{ij}^{-1} b_{j|U_i \cap U_j}$ où $\varepsilon_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$, ainsi $\{\varepsilon_{ij}\}_{ij}$ définit un élément de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ (où $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$) et par conséquent un faisceau inversible $\mathcal{L}^*$ sur X ([Fr, vdP], p. 124, [Fr], ex. 18, p. 242[1]). Plus précisément on a $\mathcal{L}^*_{|U_i} = \mathcal{O}_{X|U_i} e_i$ avec $e_{i|U_i \cap U_j} = \varepsilon_{ij} e_{j|U_i \cap U_j}$. L'homomorphisme $\mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}^*(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(V)$ pour $V \subset U_i$ et affinoïde, défini par $\lambda / a_{i|V} \to \lambda e_{i|V} \otimes 1$ induit un isomorphisme de $i^* \mathcal{L}^*$ sur $\mathcal{L}(D)$ où $i \colon X_{\text{red}} \to X$ est le morphisme canonique. De même l'homomorphisme de $\mathcal{L}^*(V) \to \mathcal{M}_X(V)$ pour $V \subset U_i$, affinoïde et défini par $\lambda e_i \to \lambda / b_{i|V}$ induit un morphisme de $\mathcal{L}^*$ dans $\mathcal{M}_X$. La proposition 9, § 4.2 montre que $\mathcal{L}^*$ est ample.

Soit $\mathcal{N}$ le faisceau des nilpotents sur X, il existe un entier $n > 0$ tel que $H^1(X, \mathcal{N} \otimes \mathcal{L}^{*n}) = 0$ parce que $\mathcal{L}^*$ est ample. De la suite exacte $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X/\mathcal{N}} = \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \to 0$, on déduit que l'homomorphisme $\mathcal{L}^{*n}(X) \to \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \otimes \mathcal{L}^{*n}(X)$ est surjectif.

Comme $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}} \otimes \mathcal{L}^{*n} = \mathcal{L}(D)^n$ il existe $h \in \mathcal{L}^{*n}(X)$ dont l'image est f^n. Soit g l'image de h dans $\mathcal{M}_X(X)$, en particulier on a $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in U$ et le lemme 4 ci-après permet de montrer que $U = \{x \in X : g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|g(x)| \leqslant 1\}$.

REMARQUE. – Ce théorème est clairement une amélioration du « Satz » 3, p. 11 de [Gr].

LEMME 4. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique pur de dimension* 1, *U un ouvert affinoïde de X et $f \in \mathcal{M}_X(X)$ une fonction méromorphe telle que $U = \{x \in X : f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f(x)| \leqslant 1\}$. Soit $n \geqslant 1$, alors $U = \{x \in X : f^n \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f^n(x)| \leqslant 1\}$.*

DÉMONSTRATION. – Soit $x_0 \in X$ avec $f^n \in \mathcal{O}_{X,x_0}$ et $|f^n(x_0)| \leqslant 1$, il faut montrer que $x_0 \in U$. Si $f \in \mathcal{O}_{X,x_0}$, c'est clair. Supposons que $f \notin \mathcal{O}_{X,x_0}$. Il existe un admissible affinoïde V avec $V \cap U = \emptyset$, $x_0 \in V$ et $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in V - \{x_0\}$. On aurait alors $f^n \in \mathcal{O}_X(V)$, $|f^n(x)| > 1$ pour $x \in V - \{x_0\}$ et $|f^n(x_0)| \leqslant 1$. Or $W = \{x \in V : |f^n(x)| \leqslant 1\}$ est un admissible de V, donc de dimension 1, ce qui est impossible puisque $W = \{x_0\}$.

LEMME 4'. – *Soient X un espace analytique réduit, pur de dimension* 1, *quasi-compact, $f \in \mathcal{M}_X(X)$, U une partie affinoïde avec $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in U$ et $F \subset X$ une partie finie avec $F \cap U = \emptyset$. Alors il existe un diviseur de Cartier $D = \{U_i, a_i\}_i$ sur X avec les propriétés suivantes. On a $a_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$; pour tout i, i' on a soit $a_{i|U_i \cap U_{i'}} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_{i'})^\times$; soit $U_i = U_{i'}$ et $a_i = a_{i'}$; pour tout i on a $a_{i|U \cap U_i} \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)^\times$; pour $s \in F \cap U_i$, on a $a_i(s) = 0$; enfin $f \in \mathcal{L}(D)(X)$ où $\mathcal{L}(D)$ est le faisceau inversible associé à D.*

DÉMONSTRATION. – α) Il existe un recouvrement admissible affinoïde $\{V_j\}_j$ de X avec les propriétés suivantes: on a $f_{|V_j} = c_j/d_j$ avec $c_j, d_j \in \mathcal{O}_X(V_j)$ et d_j ne divise pas zéro dans $\mathcal{O}_X(V_j)$ et $S_1 \cap U = \emptyset$ si $S_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_j \{x \in V_j : d_j(x) = 0\}$. Montrons cela. Le problème est local, soit V un admissible affinoïde, on a $f_{|V} = c/d$ où $c, d \in \mathcal{O}_X(V)$, d ne divise pas zéro dans $\mathcal{O}_X(V)$. Soient $T = \{x \in V : d(x) = 0\} \cap U$, $x \in T$ il existe une partie rationnelle V_x de V avec $V_x \cap T = \{x\}$ et $f \in \mathcal{O}_X(V_x)$. Il est alors facile de montrer qu'il existe un recouvrement affinoïde fini $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ de V tel que $\operatorname{card}(V_i \cap T) \leqslant 1$, et que $x \in V_i \cap T$ implique $V_i \subset V_x$. Si $x \in V_i$ on a $f_{|V_i} = c_i/d_i$ avec $d_i = 1$, si $V_i \cap T = \emptyset$ on a $f_{|V_i} = c_{|V_i}/d_{|V_i}$. Ce qui montre α).

β) Soient $F_1 = F - S_1 \cap F$, $S \stackrel{\text{déf}}{=} S_1 \cup F_1$. Soit $s \in F_1$, il existe un admissible affinoïde $W_s \ni s$ et $b_s \in \mathcal{O}_X(W_s)$ avec les propriétés suivantes: $b_s(s) = 0$, $b_s(x) \neq 0$ pour $x \in W_s - \{s\}$, pour tout j on a $V_j \supset W_s$ si $s \in V_j$ et $V_j \cap W_s = \emptyset$ si $s \notin V_j$. Soit $s \in S_1$, il existe un admissible affinoïde W_s tel que $V_j \supset W_s$ si $s \in V_j$ et $V_j \cap W_s = \emptyset$ si $s \notin V_j$.

γ) Il existe un recouvrement affinoïde fini $\{V_{j1}, V_{j2}, \ldots, V_{jn}\}$ de V_j tel que $s \in S$ et $s \in V_{jt}$ implique $V_{jt} = W_s$. Montrons cela. Soit $s \in S \cap V_j$ il existe un recouvrement affinoïde fini $\mathcal{W}_s = \{W_{s1}, \ldots, W_{sn_s}\}$ tel que $W_{s1} \subset W_s$ et $s \notin W_{si}$ pour $i \geqslant 2$. Soit $\mathcal{W}' = \bigcap_{s \in S \cap V_j} \mathcal{W}'_s = \{W'_1, \ldots, W'_m\}$, si $s \in W'_i$ on a $W'_i \subset W_s$. Ainsi $\{W_s\}_{s \in S \cap V_j} \bigcup \{W'_j : W'_j \cap S = \emptyset\}$ est un recouvrement admissible affinoïde de V_j qui possède la propriété de γ).

δ) Montrons le lemme. Soit le recouvrement admissible affinoïde $\{V_{jt}\}_{jt}$ de X où V_{jt} est défini en γ). Si $s \in F_1$ et $s \in V_{jt}$, on a $W_s = V_{jt}$; on pose alors $a_{jt} = b_s$ où b_s est défini par β). Si $s \in S_1$ on choisit un indice $j(s)$ tel que $V_{j(s)} \ni s$ et pour tout jt tel que $V_{jt} \ni x$, i.e. $V_{jt} = W_s$ on pose $a_{jt} = d_{j(s)|W_s}$. Si $V_{jt} \cap S = \emptyset$ on pose $a_{jt} = d_{j|V_{jt}}$. Il est alors facile de vérifier que $\{V_{jt}, a_{jt}\}$ est un diviseur de Cartier sur X qui satisfait les conclusions du lemme.

2.4. *Densité des fonctions méromorphes.*

THÉORÈME 4. – *Soient k un corps valué, complet, X un espace analytique, séparé, quasi-compact, pur de dimension 1, U un ouvert affinoïde de X. Soient $\varrho : \mathcal{M}_X(X) \to \mathcal{M}_X(U)$ l'application restriction, $\theta : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{M}_X(U)$ l'homomorphisme canonique et $\mathcal{M}_X(X) \cap \mathcal{O}_X(U) \overset{\text{déf}}{=} \theta^{-1}\big(\varrho(\mathcal{M}_X(X))\big)$. Alors $\mathcal{M}_X(X) \cap \mathcal{O}_X(U)$ est dense dans l'algèbre de Banach $\mathcal{O}_X(U)$.*

DÉMONSTRATION. – *A*) *Supposons X réduit.*

α) *Supposons X projectif, connexe, régulier.* – Soit $X = P^{\text{an}}$ où P est projectif; le théorème 3 et la démonstration de la proposition 2, § 1, montrent qu'il existe un ouvert affine Z de P avec $U \subset Z$ tel que l'image de $\mathcal{O}_P(Z)$ dans $\mathcal{O}_{P^{\text{an}}}(U)$ soit dense. Il suit que $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{O}_{P^{\text{an}}}(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_{P^{\text{an}}}(U)$, or $\mathcal{R}(P) = \mathcal{M}_X(X)$ par GAGA ([Se], [Ko]).

β) *Supposons X affinoïde, connexe, régulier, géométriquement réduit.* – Il existe l_1 séparable fini sur k avec $X_{(l)}$ distingué pour $l \supset l_1$ et $\bar{X}_{(l)} = (\bar{X}_{(l_1)})_{(\bar{l})}$ ([Bo 1], lemme 2.7, p. 5; [Fr], ex. 12, p. 375). Ainsi il existe l_2 séparable fini sur l_1 tel que $\hat{\bar{X}}_{(l_2)} - \bar{X}_{(l_2)}$ soit rationnel sur $\bar{l}_2$, où $\hat{\bar{X}}_{(l_2)}$ est l'unique variété projective contenant $\bar{X}_{(l_2)}$ comme ouvert dense avec $\hat{\bar{X}}_{(l_2)} - \bar{X}_{(l_2)}$ régulier. Comme $X_{(l_2)}$ est distingué on sait que $X_{(l_2)}$ est ouvert affinoïde d'un espace projectif Y (théorème 6, § 2.6); comme l_2 est séparable sur k, $X_{(l_2)}$ est régulier et comme $\hat{\bar{X}}_{(l_2)} - \bar{X}_{(l_2)}$ est régulier et rationnel, comme Y admet un recouvrement pur distingué, il suit que Y est régulier ([Bo 5], Satz 6.3, p. 45; [Fr], p. 331). Il suit de α) que $\mathcal{M}_Y(Y) \cap \mathcal{O}_{X_{(l_3)}}(U_{(l_2)})$ est dense dans $\mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(U_{(l_2)})$ donc que $\mathcal{M}_{X_{(l_2)}}(X_{(l_2)}) \cap \mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(U_{(l_2)})$ est dense dans $\mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(U_{(l_2)})$.

On peut supposer l_2 galoisien sur k, soient $G = \mathrm{Gal}\,(l_2/k)$, $1 = \omega_1, \ldots, \omega_r$ une base de l_2 sur k et $\omega_1^*, \ldots, \omega_2^*$ la base duale vis-à-vis de la forme bilinéaire $(x, y) \to \to \mathrm{Tr}_{l_2/k}(xy)$. Soient $\varepsilon > 0$, $g \in \mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_{X_{(l_3)}}(U_{l_2}) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_k l_2$, il existe $f \in \mathcal{M}(X_{(l_2)}) \cap \cap \mathcal{O}_{X_{(l_3)}}(U_{(l_2)})$ avec $\|f - g\|_{U(l_2)} < \varepsilon$. On a $f = \sum_i f_i \otimes \omega_i$ avec $f_i \in \mathcal{M}_X(X)$ et $f_1 = \sum_{\sigma \in G} (f^\sigma)(1 \otimes$

$\otimes\, \omega_1^{*\sigma})$. Comme $f \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(U_{(l_2)})$ on a $f^\sigma \in \mathcal{O}_{X_{(l_2)}}(U_{(l_2)})$ et donc $f_1 \in \mathcal{O}_X(U)$ ([Fr], ex. 38, p. 188); de plus $\|f^\sigma - g^\sigma\|_{U(l_2)} < \varepsilon$ et $g^\sigma = g$ impliquent $\|f_1 - g\|_U < \varepsilon \times \|\omega_1^*\|$.

Ce qui montre que $\mathcal{M}_X(X) \cap \mathcal{O}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_X(U)$.

γ) *Supposons* $X = \operatorname{Spm} A$ *affinoïde, réduit, irréductible.* – On a une présentation $k\langle T\rangle \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{j}{\hookrightarrow} A$ avec A fini sur $k\langle T\rangle$, $Fr(B)$ séparable sur $Fr(k\langle T\rangle)$, $Fr(A)$ purement inséparable sur $Fr(B)$, B intégralement clos (voir la partie γ) de la démonstration du théorème 3, § 2.3); il suit que $\operatorname{Spm} j\colon X = \operatorname{Spm} A \to Y = \operatorname{Spm} B$ est bijectif. Comme Y est régulier et géométriquement réduit, β) montre que $\mathcal{M}_Y(Y) \cap \mathcal{O}_Y(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_Y(U)$ (on pose $U = \operatorname{Spm} j(U)$). Comme j est fini on a $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_Y(U) \otimes_B A$ et $\mathcal{M}_Y(Y) \subset \mathcal{M}_X(X)$. Il suit alors que $(\mathcal{M}_Y(Y) \cap \mathcal{O}_Y(U)) \otimes_B A$ est dense dans $\mathcal{O}_X(U)$. Ce qui montre γ).

δ) *Supposons* X *réduit.* – Soient $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X, $\varphi\colon X' \to X$ la normalisation de X. Comme $\mathcal{M}_{X'}(X') = \mathcal{M}_X(X) = \bigoplus_i \mathcal{M}_{X'}(\varphi^{-1}(X_i))$, comme $\varphi^{-1}(X_i)$ est soit projectif connexe, régulier, soit affinoïde, connexe régulier (théorème 2, § 2.2), comme $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(X_i)$ est ouvert affinoïde de $\varphi^{-1}(X_i)$ il suit de α) et de γ) que $\mathcal{M}_{X'}(X') \cap \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))$ est dense dans $\mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))$. On sait que $F \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))/\mathcal{O}_X(U)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie (partie α) de la démonstration de la proposition 4, § 2.1.3), soit $\varrho\colon \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U)) \to F$ la surjection canonique. Comme F est de dimension finie on a $\varrho\big(\mathcal{M}_{X'}(X') \cap \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))\big) = F$; soient $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{M}_{X'}(X') \cap \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))$ tels que $\varrho(f_1), \ldots, \varrho(f_s)$ soit une base de F.

La somme directe $\mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(U) \oplus \big(\bigoplus_i kf_i\big)$ est topologique; i.e. il existe $c > 0$ avec $c\cdot\max(\|a\|, \|b\|) \leqslant \|a + b\|$ pour tout $a \in \mathcal{O}_X(U)$ et $b \in \bigoplus_i kf_i$.

Soient $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, il existe $g \in \mathcal{M}_{X'}(X') \cap \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(U))$ avec $\|g - f\| < c\varepsilon$. De plus on a $g = h + \sum \lambda_i f_i$ où $\lambda_i \in k$, $h \in \mathcal{O}_X(U)$, ce qui montre que $\|(h - f) + \sum \lambda_i f_i\| < c\varepsilon$. Ainsi $\|h - f\| < \varepsilon$, or $h = g - \sum \lambda_i f_i \in \mathcal{M}_{X'}(X') = \mathcal{M}_X(X)$, donc $h \in \mathcal{M}_X(X) \cap \mathcal{O}_X(U)$.

Ce qui montre δ).

B) *Le cas général.*

α) *On a* $(\mathcal{M}_X(X) \cap \mathcal{O}_X(U)) + \mathcal{N}_X(U)$ *dense dans* $\mathcal{O}_X(U)$. – Soit $\|\cdot\|$ une norme de Banach sur $\mathcal{O}_X(U)$, on note aussi $\|\cdot\|$ la norme induite sur $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U) = \mathcal{O}_X(U)_{\text{red}}$. Soient $g \in \mathcal{O}_X(U)$, f son image dans $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U)$, $\varepsilon > 0$. D'après A) δ) il existe $\varphi \in \mathcal{M}(X_{\text{red}}) \cap \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U)$ avec $\|\varphi - f\| < \varepsilon$.

La partie B) de la démonstration du théorème 3, § 2.3, montre qu'il existe un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur X avec $\mathcal{L}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{red}}(X_{\text{red}})$ (où $\mathcal{L}_{\text{red}} = i^*\mathcal{L}$ et $i\colon X_{\text{red}} \to X$ est le morphisme canonique) et $\mathcal{L}_{\text{red}}(X) \subset \mathcal{L}^n_{\text{red}}(X)$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\mathcal{L}^n(X) \to \mathcal{L}^n_{\text{red}}(X)$ est surjectif pour $n \gg 0$, il existe $\psi \in \mathcal{L}^n(X)$ dont l'image dans $\mathcal{L}^n_{\text{red}}(X)$ est φ. En identifiant $\psi|_U$ à un élément de $\mathcal{O}_X(U)$ ($\simeq \mathcal{L}(U)$) on a donc montré que $g - \psi|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ a pour image $f - \varphi \in \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U)$. Il existe alors $n \in \mathcal{N}_X(U)$ (les nilpotents de $\mathcal{O}_X(U)$) avec $\|g - \psi - n\| < \varepsilon$. Ce qui montre α).

β) On a $\mathcal{M}_X(X)\cap \mathcal{O}_X(U)$ *dense dans* $\mathcal{O}_X(U)$. – Soit toujours $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur X avec $\mathcal{L}(U)\simeq \mathcal{O}_X(U)$. Pour $n\gg 0$, $\mathcal{N}_X\otimes \mathcal{L}^n$ est engendré par ses sections globales (lemme 8, § 4.3), ce qui montre que l'homomorphisme $(\mathcal{N}_X\otimes \mathcal{L}^n(X))\otimes \mathcal{O}_X(U)\to \mathcal{N}_X\otimes \mathcal{L}^n(U)$ est surjectif; or $\mathcal{N}_X\otimes \mathcal{L}^n(U)=\mathcal{N}_X(U)$. Avec α) il suit que $\mathcal{N}_X\mathcal{L}^n(X)\,(\mathcal{M}_X(X)\cap \mathcal{O}_X(U))+\mathcal{N}_X\mathcal{L}^n(X)\cdot\mathcal{N}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{N}_X(U)$; ainsi $\mathcal{M}_X(X)\cap\mathcal{O}_X(U)+\mathcal{N}_X\mathcal{L}^n(X)\cdot\mathcal{N}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_X(U)$. Par récurrence on a $\mathcal{M}_X(X)\cap\mathcal{O}_X(U)+(\mathcal{N}_X\mathcal{L}^n(X))^r\cdot\mathcal{N}_X(U)$ dense dans $\mathcal{O}_X(U)$ pour tout $r\geqslant 1$. Comme X est quasi-compact on a $\mathcal{N}_X^r=0$ pour $r\gg 0$. Ce qui montre que $\mathcal{M}_X(X)\cap\mathcal{O}_X(U)$ est dense dans $\mathcal{O}_X(U)$.

2.5. *Réductions analytiques.*

Théorème 5. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique sur k, séparé, pur de dimension 1, $\mathcal{U}$ un recouvrement pur fini de X, $r\colon X\to \bar{X}_{\mathcal{U}}=Y$ la réduction associée. Alors il existe $f\in\mathcal{M}_X(X)^\times$ avec les propriétés suivantes:*

1) *Soient $V_1=\{x\in X: f\in\mathcal{O}_{X,x}$, et $|f(x)|\leqslant 1\}$, $V_2=\{x\in X: 1/f\in\mathcal{O}_{X,x}$ et $|(1/f)(x)|\leqslant 1\}$. Alors V_1 et V_2 sont des parties affinoïdes formelles de $(X,\mathcal{U})$, $r(V_i)$ est dense dans Y pour $i=1,2$. De plus l'image canonique de f dans $\mathcal{O}_Y(r(V_1))$ est un inversible de $\mathcal{R}(Y)$.*

2) *$\mathcal{V}=\{V_1,V_2\}$ est un recouvrement pur de X et $\bar{X}_{\mathcal{U}}\simeq\bar{X}_{\mathcal{V}}$.*

Démonstration. – On peut supposer X connexe, donc $Y=\bar{X}_{\mathcal{U}}$ connexe. Soient $S=(X_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sing}}$, c'est une partie finie ([Ki 2], théorème 3.3, 3.2.1′, p. 94), $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ les composantes irréductibles de $\bar{X}_{\mathcal{U}}=\overline{(X_{\mathrm{red}})}_{\mathcal{U}}=Y$, Q une partie finie régulière de Y avec $Q\cap r(S)=\emptyset$, $Q\cap Y_i\neq\emptyset$ pour tout i. Ainsi $Y-Q$ est affine et par suite $V_1\overset{\text{déf}}{=}r^{-1}(Y-Q)$ est affinoïde ([Bo 3], theorem 3.1, p. 20). Il existe $f\in\mathcal{M}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}})$ tel que $V_1=\{x\in X: f\in\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|f(x)|\leqslant 1\}$ (théorème 1, § 1.4). Quitte à changer f en f^n/λ (lemme 4, § 2.3) on peut supposer que $\|f\|_{V_1}=1$.

α) On a f inversible dans $\mathcal{M}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}})$.

Soient $Y_i'=Y_i-Y_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i}Y_j\right)$, $Y_i''=Y_i'-Y_i'\cap Q$, clairement les Y_i'' sont des ouverts affines, irréductibles de Y, si $r\geqslant 2$ les Y_i' sont des ouverts affines irréductibles de Y puisque Y est connexe. On peut supposer que $\|f_{|r^{-1}(Y_i')}\|_{\mathrm{sp}}>0$ pour tout i, il suffit pour cela de changer f en $f+\pi$ avec $\pi\in k$ et $|\pi|<1$ et π convenable. Montrons que pour tout i on a $\|f_{|r^{-1}(Y_i'')}\|=1$. Si $r=1$ on a $U=r^{-1}(Y_1'')$ et donc $\|f_{|r^{-1}(Y_1'')}\|=1$. Supposons maintenant $r\geqslant 2$ et par exemple que $\|f_{|r^{-1}(Y_1'')}\|<1$. Soit $Z=\{x\in r^{-1}(Y_1''):$ $|f(x)|=\|f_{|r^{-1}(Y_1'')}\|_{\mathrm{sp}}\}$, on sait que Z est un ouvert pur non vide de $r^{-1}(Y_1'')$; ainsi $Y_1''=r(Z)\cup(Q\cap Y_1')$ est un ouvert affine irréductible de Y_1'. Soit $T=r^{-1}(Y_1'')$, alors $1/f\in\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(T)$ (les points de $r^{-1}(Q)$ sont réguliers). Soient $T'=\{x\in T: |(1/f)(x)|\geqslant 1\}$, $T''=\{x\in T: |(1/f)(x)|\leqslant 1\}$. On a $Z\subset T'$ et $r^{-1}(Q\cap Y_1')\subset T''$, ce qui montre que $T=T'\coprod T''$. Ceci contredit le fait que $r(T)=\bar{T}^c=r(Z)\cup(Q\cap Y_1')$ est irréductible donc connexe.

(1) Soit $\bar{f}$ l'image de f dans $\mathcal{O}_Y(Y-Q)$, alors ce qui précède montre que $\{y \in Y - Q: \bar{f}(y) \neq 0\}$ est un ouvert dense de $Y-Q$ donc de Y.

Montrons que f est inversible dans $\mathcal{M}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}})$. Soit W un ouvert affine de Y, il s'agit de montrer que $f_{|r^{-1}(W)}$ est inversible dans $\mathcal{M}_{X_{\mathrm{red}}}(r^{-1}(W))$. On a $f_{|r^{-1}(W)} = a/b$, $a, b \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(r^{-1}(W))$, b ne divise pas zéro dans $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(r^{-1}(W))$; il s'agit de montrer que a ne divise pas zéro. Supposons le contraire, on aurait $c \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(r^{-1}(W))$ avec $a \cdot c = 0$ et $\|c\|^{\mathrm{sp}}_{r^{-1}(W)} = 1$. Soit $W' = W - W \cap Q$, on a donc $\bar{f}|_{W'} \cdot \bar{c}|_{W'} = 0$. Or (1) montre que $\bar{c}|_{W'} = 0$ donc $\bar{c} = 0$, ce qui contredit $\|c\|_{r^{-1}(W)} = 1$.

β) Soit $\bar{f}$ l'image de $f|_{V_1}$ dans $\mathcal{O}_Y(Y-Q)$, alors $\bar{f} \in \mathcal{R}(Y)$ et pour tout $q \in Q$ on a $\bar{f} \notin \mathcal{O}_{Y,q}$. Pour tout $q \in Q$ il existe $x \in r^{-1}(\{q\})$ avec $f \notin \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$.

Comme $Y-Q$ est un ouvert dense, que $\bar{f} \in \mathcal{O}_Y(Y-Q)$ il suit que $\bar{f}$ est une fonction rationnelle. Soit $q \in Y_i$ et soit $W \ni q$ un ouvert (affine) avec $W \cap Y_j = \emptyset$ pour $j \neq i$ et $f(y) \neq 0$ pour $y \in W - q$ (ceci est possible parce que $f_{|Y''\neq 0}$, voir α)). Alors $1/f \in \mathcal{O}^0_{X_{\mathrm{red}}}(r^{-1}(W))$, en effet les points de $r^{-1}(\{q\})$ sont réguliers. Soit $\overline{(1/f)}$ l'image de $1/f$ dans $\mathcal{O}_Y(W)$, on a $(1/f)(q) = 0$, comme $1 = \bar{f}_{|W-q} \times (1/\bar{f})_{|W-q}$, on a $\bar{f} \notin \mathcal{O}_{Y,q}$. Il est ensuite facile de montrer qu'il existe $x \in r^{-1}(\{q\})$ avec $(1/f)(x) = 0$, ce qui prouve que $f \notin \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$.

γ) Soit $V_2 = \{x \in X: 1/f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|(1/f)(x)| \leqslant 1\}$, c'est un ouvert affinoïde formel de $(X, \mathcal{U})$ et $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ est un recouvrement pur.

Soit $x \in r^{-1}(Q)$, comme x est régulier on a $1/f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|(1/f)(x)| < 1$. Soit $x \in r^{-1}(\{y\})$ avec $y \in Y - Q$; si $\bar{f}(y) \neq 0$, on a $1/f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|(1/f)(x)| = 1$ pour tout $x \in r^{-1}(y)$; si $\bar{f}(y) = 0$ on a, ou bien $1/f \notin \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ ou bien $1/f \in \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x}$ et $|(1/f)(x)| > 1$. Ceci montre que V_2 est une partie formelle de $(X, \mathcal{U})$, i.e. l'image réciproque par r d'une partie de Y.

Montrons que V_2 est affinoïde. Soit Y_i une composante irréductible complète (s'il en existe), comme $f|_{Y_i}$ considéré comme élément de $\mathcal{R}(Y_i)$ a pour ensemble de pôles les points de $Q \cap Y_i$ (qui sont réguliers) (c'est β)), il en résulte facilement que $f_{|Y_i - Q\cap Y_i}$ admet au moins un zéro; ainsi f admet un zéro sur chaque composante de $Y-Q$. Ceci montre que V_2 est l'image réciproque par r d'un ouvert affine de Y: ainsi V_2 est un affinoïde formel de $(X, \mathcal{U})$ ([Bo 3], theorem 3.1, p. 20).

Il est alors élémentaire de vérifier que $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ est un recouvrement pur. Comme V_i est ouvert formel de $(X, \mathcal{U})$ on a $\bar{X}_{\mathcal{U}} \simeq \bar{X}_{\mathcal{V}}$.

δ) Le cas général.

La partie *B*) de la démonstration du théorème 3, § 2.3, montre qu'il existe un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur X avec $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{red}}(X_{\mathrm{red}})$ (où $\mathcal{L}_{\mathrm{red}} = i^*\mathcal{L}$ et $i: X_{\mathrm{red}} \to X$ est le morphisme canonique) et $\mathcal{L}_{\mathrm{red}}(X) \subset \mathcal{L}^n_{\mathrm{red}}(X)$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\mathcal{L}^n(X) \to \mathcal{L}^n_{\mathrm{red}}(X)$ est surjectif pour $n \gg 0$, il existe $h \in \mathcal{L}^n(X)$ dont l'image dans $\mathcal{L}^n_{\mathrm{red}}(X)$ est f^n.

Soit g l'image de h dans $\mathcal{M}_X(X)$, il suit facilement du lemme 4, § 2.3, que

$$V_1 = \{x \in X: g \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |g(x)| \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad V_2 = \left\{x \in X: \frac{1}{g} \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } \left|\frac{1}{g}(x)\right| \leqslant 1\right\}.$$

COROLLAIRE 1. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique sur k, séparé, pur de dimension 1, $\mathcal{U}$ un recouvrement pur fini de X, $r: X \to \bar{X}_{\mathcal{U}} = Y$ la réduction associée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *L'espace analytique X est projectif;*

ii) *La variété algébrique $\bar{X}_{\mathcal{U}} = Y$ est projective.*

DÉMONSTRATION. – α) *Le morphisme défini par f.*

Soient $f \in \mathcal{M}_X(X)^\times$ et satisfaisant le théorème 5,

$$\psi_0: k\langle T_1/T_0\rangle \to \mathcal{O}_X(V_1), \qquad \psi_1: k\langle T_0/T_1\rangle \to \mathcal{O}_X(V_2)$$

définis par $\psi_0(T_1/T_0) = f$, $\psi_1(T_0/T_1) = 1/f$. Alors ψ_0 et ψ_1 définissent un morphisme $\varphi: X \to \boldsymbol{P}_k^{1\,\mathrm{an}} = \mathrm{Proj}\,(k[T_0, T_1])^{\mathrm{an}}$. Soient

$$W_0 = \left\{x \in \boldsymbol{P}_k^1: \frac{T_1}{T_0} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1,x} \text{ t } \left|\frac{T_1}{T_0}(x)\right| \leqslant 1\right\}, \quad W_1 = \left\{x \in \boldsymbol{P}_k^1: \frac{T_0}{T_1} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1,x} \text{ et } \left|\frac{T_0}{T_1}(x)\right| \leqslant 1\right\}.$$

Alors $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$ est un recouvrement pur de $\boldsymbol{P}_k^1$, $\varphi^{-1}(W_0) = V_1$, $\varphi^{-1}(W_1) = V_2$, ainsi φ est un morphisme formel de $(X, \mathcal{V})$ dans $(\boldsymbol{P}_k^1, \mathcal{W})$. Il induit donc un morphisme $\bar{\varphi}: \bar{X}_{\mathcal{V}} = \bar{X}_{\mathcal{U}} \to \overline{(\boldsymbol{P}_k^1)_{\mathcal{W}}} = \boldsymbol{P}_{\bar{k}}^1$. Il est alors facile de montrer que $\bar{\varphi}$ est le morphisme induit par la fonction rationnelle (inversible) $\bar{f}$.

β) i) *implique* ii). – On a X projectif qui implique X_{red} projectif, $\mathcal{U}$ est un recouvrement pur de X_{red} et $\bar{X}_{\mathcal{U}} = \bar{X}_{\mathrm{red}\,\mathcal{U}}$; ainsi on peut supposer X réduit. Alors $\mathcal{M}_X(X) = \mathcal{R}(X)$ ([Bo 4], theorem 3, § 3). Soit $\varrho: X \to \boldsymbol{P}^1$ le morphisme de variété algébrique induit par la fonction rationnelle f, on a donc $\varrho^{\mathrm{an}} = \varphi$. Comme $f \in \mathcal{R}(X)^\times$, le morphisme ϱ est surjectif et fini (X est projectif), il suit de cela que $\varphi = \varrho^{\mathrm{an}}$ a la même propriété. Ainsi $\bar{\varphi}: \bar{X}_{\mathcal{U}} \to \boldsymbol{P}_{\bar{k}}^1$ est surjectif et fini; il suit de cela que $\bar{X}_{\mathcal{U}}$ est projectif.

γ) ii) *implique* i). – De $\bar{f} \in \mathcal{R}(Y)^\times$ et Y projectif il suit que $\bar{\varphi}$ est surjectif et fini. Cela montre que φ est surjectif et fini.

Pour en déduire que X est projectif on utilise le corollaire 1 du théorème 7. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, alors $\varphi_* \mathcal{F}$ est cohérent sur $\boldsymbol{P}_k^1$ (φ est fini) et $\mathcal{F}(X) = \varphi_* \mathcal{F}(\boldsymbol{P}_k^1)$. Ainsi $\mathcal{F}(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Ensuite on a $H^i\big(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\varphi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(1))^n\big) = H^i(\boldsymbol{P}^1, \varphi_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(n))$ (φ est fini). Ainsi il existe n_0 tel que $H^i\big(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\varphi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(1))^n\big) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ et $i > 0$.

En posant $\mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(1)$, le corollaire 1 du théorème 7, § 4.3, montre que X est projectif.

COROLLAIRE 2. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique sur k, séparé, pur de dimension 1, $\mathfrak{U}$ un recouvrement pur fini de X, $r: X \to \bar{X}_{\mathfrak{U}} = Y$ la réduction associée, $X_1, X_2, \ldots, X_s$ les composantes irréductibles de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *l'espace analytique X est affinoïde;*

ii) *le fermé $r(X_i)$ de Y est non projectif pour $1 \leqslant i \leqslant s$.*

DÉMONSTRATION. – α) *Le fermé $r(X_i)$.* On munit le fermé analytique X_i de la structure réduite induite, soit $\varphi_i: X_i \to X$ le morphisme canonique qui est fini (c'est une immersion fermée). Facilement $\varphi_i^{-1}(\mathfrak{U})$ est un recouvrement pur de X_i et φ_i est un morphisme formel de $(X_i, \varphi_i^{-1}(\mathfrak{U}))$ dans $(X, \mathfrak{U})$. Il induit un morphisme fini $\bar{\varphi}_i: (\bar{X}_i)_{\varphi_i^{-1}(\mathfrak{U})} \overset{\text{not}}{=} \bar{X}_i \to Y$. Facilement on a $\bar{\varphi}_i(\bar{X}_i) = r(X_i)$, ainsi $r(X_i)$ est fermé.

β) i) *implique* ii). Si X est affinoïde on a X_i affinoïde et $\bar{X}_i$ non projectif par le corollaire 1. Comme $\bar{\varphi}_i: \bar{X}_i \to r(X_i)$ est surjectif et fini, on a aussi $r(X_i)$ non projectif.

γ) ii) *implique* i). Si $r(X_i)$ est non projectif, comme $\bar{\varphi}_i: \bar{X}_i \to r(X_i)$ est surjectif et fini, on a $\bar{X}_i$ non projectif. Par le théorème 2, § 2.2, on a X_i affinoïde. Ainsi le corollaire du théorème 2 montre que X est affinoïde.

REMARQUE 2. – En complément au théorème 5 on a aussi la proposition suivante ([Li], proposition 1.3.1).

PROPOSITION. – *Soient k un corps valué complet, X une variété algébrique projective réduite pure de dimension 1 sur k, U un ouvert affinoïde de X^{an} qui rencontre toutes les composantes irréductibles de X. Alors il existe un ouvert affinoïde V de X^{an} tel que $\mathfrak{U} = \{U, V\}$ soit un recouvrement pur de X^{an} et que $\bar{U}^c$ soit un ouvert dense de $\bar{X}^{\text{an}}_{\mathfrak{U}}$.*

2.6. *Immersion ouverte dans un espace projectif.*

THÉORÈME 6 ([vdP 1]). – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique pur de dimension 1 sur k, $\mathfrak{U}$ un recouvrement pur, fini, distingué de X, $r: X \to \bar{X}_{\mathfrak{U}} = Y$ la réduction associée. Soient Z une variété algébrique réduite de dimension 1 sur $\bar{k}$, $\varphi: Y \to Z$ une immersion ouverte telle que Z soit l'adhérence de $\varphi(Y)$, que $Z - \varphi(Y)$ soit régulier et que $\bar{k}(z) = \mathcal{O}_{Z,z}/\mathfrak{M}_z$ soit séparable sur $\bar{k}$ pour tout $z \in Z - \varphi(Y)$. Alors il existe un espace analytique X', $\mathfrak{V}$ un recouvrement pur fini distingué de X' et $f: X \to X'$ un morphisme avec les propriétés suivantes:*

1) *$f(X)$ est un ouvert analytique de X' et $f: X \to f(X)$ est un isomorphisme;*

2) *$f: (X, \mathfrak{U}) \to (X', \mathfrak{V})$ est un morphisme d'espaces formels;*

3) *il existe un isomorphisme $\psi: \bar{X}'_{\mathfrak{V}} \to Z$ tel que $\psi \circ \bar{f} = \varphi$. En plus X' est irréductible si X l'est.*

DÉMONSTRATION. – On a donc $Z - \varphi(Y)$ fini, il suffit donc de montrer le théorème pour $Z = Y \cup \{z\}$ avec z régulier, $\bar{k}(z)$ séparable sur $\bar{k}$ et Z est l'adhérence de Y.

Par le lemme 5, § 2.6, il existe un ouvert régulier connexe affine $W \ni z$ avec $\mathcal{O}_Z(W) = \bar{k}[T, S, V]/(p(T, S), e(T)V - 1) = \bar{k}[t, s, v]$, $e(0) \neq 0$ et $\mathcal{O}_Z(W - \{z\}) = \mathcal{O}_Z(W)[1/t]$. Et on a

(1) soit $p(T, S)$ irréductible dans $\bar{k}(T)[S]$, unitaire en S sur $\bar{k}[T, 1/e(T)]$ et $(\partial p/\partial S)(t, s)$ inversible dans $\mathcal{O}_Z(W)$;

(2) soit $p(T, S)$ irréductible dans $\bar{k}(S)[T]$, unitaire en T sur $\bar{k}[S]$ et $(\partial p/\partial S)(t, s)$ inversible dans $\mathcal{O}_Z(W)$.

Soient $A = \mathcal{O}_X\big(r^{-1}(W - \{z\})\big) = \mathcal{O}_X\big(r^{-1}(D_W(t))\big)$, $E(T) \in k^0[T]$ avec $\bar{E}(T) = e(T)$ $\deg E = \deg e$, $P(T, S) \in k^0[T, S]$, $\bar{P} = p$, $\deg_T P = \deg_T p$, $\deg_S P = \deg_S p$

(3) $P = P_0(T) + P_1(T)S + \ldots + P_d(T)S^d$ où P_d est inversible dans $k^0[T, 1/E(T)]$ dans le cas (1), et $P = Q_0(S) + Q_1(S)T + \ldots + Q_{d'}(S)T^{d'}$ avec $Q_{d'} = 1$ dans le cas (2).

α) On suppose que $p(T, S)$ satisfait (1), *soit $\tau \in A^0$ avec $\bar{\tau} = t$. Alors il existe $\sigma \in A^0$ tel que $P(\tau, \sigma) = 0$ et $\bar{\sigma} = s$; l'homomorphisme $\varphi\colon k\langle T, S, V\rangle \to A$ défini par $\varphi(T) = \tau$, $\varphi(S) = \sigma$, $\varphi(V) = (\tau E(\tau))^{-1}$ induit un isomorphisme de $B \overset{\text{déf}}{=} k\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$ sur A et on a $B^0 = k^0\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$.*

Montrons l'existence de $\sigma \in A^0$ avec $P(\tau, \sigma) = 0$. Soient $Q(S) = P(\tau, S) \in A^0[S]$, $\sigma' \in A^0$ avec $\bar{\sigma}' = s$. On a donc $\|Q(\sigma')\| < 1$, $Q'(\sigma') = (dQ/dS)(\sigma')$ inversible dans A^0, donc $\|(Q'(\sigma'))^{-1}\| = 1$. Enfin une application de formule de Taylor montre que $\|Q\big(\sigma' - Q(\sigma')(Q'(\sigma'))^{-1}\big)\| \leqslant \|Q(\sigma')\|^2$. Comme A^0 est complet il existe $\sigma \in A^0$ avec $Q(\sigma) = 0$ et $\bar{\sigma} = s$.

Comme $te(t)$ est inversible dans $\mathcal{O}_Z(W - \{z\}) = \mathcal{O}_Z(D_W(t))$ il suit que $\tau E(\tau)$ est inversible dans A^0. Soit $\varphi\colon k\langle T, S, V\rangle \to A$ défini par $\varphi(T) = \tau$, $\varphi(S) = \sigma$, $\varphi(V) = (\tau E(\tau))^{-1}$.

Soit $f \in k^0\langle T, S, V\rangle$, alors f se décompose sous la forme

(4) $f = \sum_{i=0}^{d-1} f_i S^i + gP(T, S) + h(TE(T)V - 1)$ avec $f_i = f_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}V^j$, $f_{i0} \in k^0\langle T\rangle$, $f_{ij} \in k^0[T]$ avec $\deg f_{ij} < \deg TE(T)$ pour $j > 0$, $g, h \in k^0\langle T, S, V\rangle$ et $\lim_{j\to\infty} \|f_{ij}\| = 0$ et $d = \deg_S P(T, S)$.

Les relations (4) suivent facilement de (3).

Soit $\|\cdot\|$ la norme induite sur $B = k\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$ par celle de $k\langle T, S, V\rangle$, alors $\bar{B}'$ l'algèbre résiduelle de B pour cette norme est $\bar{k}[T, S, V]/(p(T, S), Te(T) - 1)$ (c'est une conséquence de (4)), c'est une algèbre intègre isomorphe à

$\mathcal{O}_Z(W - \{z\})$, il suit que la norme $\|\cdot\|$ est la norme spectrale et que $\bar{\varphi}: \bar{B} \to \bar{A} = \mathcal{O}_Z(W - \{z\})$ est un isomorphisme. Comme A est distingué ([Bo 3], Folgerung 2.5, p. 15) il suit que φ est un isomorphisme. Enfin (4) montre que $B^0 = k^0\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$.

β) *On suppose que* $p(T, S)$ *satisfait* (2). *Soit* $\sigma \in A^0$ *tel que* $\bar{\sigma} = s$. *Alors il existe* $\tau \in A^0$ *tel que* $P(\tau, \sigma) = 0$, $\bar{\tau} = t$; *l'homomorphisme* $\varphi: k\langle T, S, V\rangle \to A$ *défini par* $\varphi(T) = \tau$, $\varphi(S) = \sigma$, $\varphi(V) = (\tau E(\tau))^{-1}$ *induit un isomorphisme de* $B = k\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$ *sur* A *et on a* $B^0 = k^0\langle T, S, V\rangle/(P, TE(T)V - 1)$.

La démonstration est identique à celle de α) (en plus simple).

γ) *Soit* $C = k\langle T, S, V_1\rangle/(P, E(T)V_1 - 1)$. *Alors* X *et* $X_1 =$ Spm C *se recollent le long de* $r^{-1}(D_W(t))$ *en un espace analytique* X' *et* $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_s, X_1\}$ (où $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_s\}$) *est un recouvrement pur distingué de* X'. *L'immersion injective et ouverte* $f: X \to X'$ *induit un morphisme d'espaces formels* $f: (X, \mathcal{U}) \to (X', \mathcal{V})$, $\bar{X}'_{\mathcal{V}}$ *s'identifie canoniquement à* $Z = Y \cup \{z\}$ *et* $\bar{f}: \bar{X}_{\mathcal{U}} = Y \to \bar{X}'_{\mathcal{V}} = Z$ *est l'injection canonique.*

On montre comme en α) (et β)) que $C^0 = k^0\langle T, S, V_1\rangle/(P, E(T)V_1 - 1)$ que $\bar{C} = \bar{k}[T, S, V_1]/(p(T, S), e(T)V_1 - 1) \simeq \mathcal{O}_Z(W)$. Ensuite $\psi: k\langle T, S, V_1\rangle \to A$ défini par $\psi(T) = \tau$, $\psi(S) = \sigma$, $\psi(V_1) = E(\tau)^{-1}$ induit un homomorphisme $\psi_1: C \to A$ et Spm ψ_1: $r^{-1}(D_W(t)) =$ Spm $A \to X_1 =$ Spm C est une immersion injective et ouverte dont l'image est le rationnel $X_1' = \{x_1 \in X_1: |\tau_1(x_1)| = 1\}$ où τ_1 est l'image de T dans C.

D'autre part X_1' est une partie formelle de X_1 et

$$\bar{\psi}_1: \bar{C} = \mathcal{O}_Z(W) \to \bar{A} = \mathcal{O}_Z(D_W(t)) = \mathcal{O}_Y(D_W(t))$$

est l'homomorphisme restriction.

Il est facile de montrer que X et X_1 se recollent le long de $r^{-1}(D_W(t))$ en un espace analytique X'.

Le reste de γ) est alors immédiat à vérifier.

δ) *X irréductible implique X' irréductible.*

On peut copier la démonstration de [Fr], p. 343.

REMARQUE. – Ce théorème est démontré dans [vdP 1] lorsque le corps k est algébriquement clos; nos hypothèses étant plus faibles, nous avons dû reprendre la démonstration, néanmoins l'esprit de cette preuve est directement issu de [vdP 1].

COROLLAIRE 1. – *Soient k un corps valué complet, X un espace affinoïde distingué, dont les composantes irréductibles sont de dimension 1, Z l'unique variété algébrique projective sur $\bar{k}$ contenant $\bar{X}^c$* (la réduction canonique de X) *comme ouvert dense et telle que $Z - \bar{X}^c$ soit régulier. On suppose que $\bar{k}(z) = \mathcal{O}_{Z,z}/\mathfrak{M}_z$ est séparable sur $\bar{k}$ pour tout $z \in Z - \bar{X}^c$. Alors X est ouvert affinoïde d'un espace projectif.*

DÉMONSTRATION. – Il suit du théorème 6 que X est ouvert affinoïde d'un espace analytique Y admettant un recouvrement pur fini distingué $\mathfrak{V}$ et que $\overline{Y}_{\mathfrak{V}} = Z$. Alors le corollaire 1 du théorème 5, § 2.5 montre que Y est projectif.

COROLLAIRE 2. – *Soient X un espace affinoïde distingué de dimension 1 sur un corps valué, complet k avec $\bar{k}$ parfait. Alors X est ouvert affinoïde d'un espace projectif.*

LEMME 5. ([vdP 1], p. 157). – *Soient X une variété algébrique pure de dimension 1 sur un corps k, $p \in X$ un point régulier avec $k(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{M}_p$ séparable sur k. Alors X est au voisinage de p isomorphe à une courbe plane.*

De plus il existe un ouvert, régulier, connexe, affine $U \ni p$ avec $\mathcal{O}_X(U) = k[T, S, V]/(P(T, S), E(T)V - 1) = k[t, s, v]$ où t (resp. s, v) est l'image de T (resp. S, V), $E(0) \neq 0$, $t\mathcal{O}_X(U)$ est contenu dans un seul maximal, c'est $\mathfrak{M}_p$, ainsi $\mathcal{O}_X(U - \{p\}) = \mathcal{O}_X(U)[1/t]$.

De plus on a, soit $P(T, S)$ irréductible dans $k(T)[S]$, unitaire en S sur $k[T, 1/E(T)]$ et $(\partial P/\partial S)(t, s)$ inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$, soit $P(T, S)$ unitaire en T, sur $k[S]$, irréductible dans $k(S)[T]$ et $(\partial P/\partial T)(t, s)$ inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$.

DÉMONSTRATION. – Soient $W \ni p$ un ouvert affine régulier, connexe, $t \in \mathcal{R}(W)$ une fonction rationnelle sur W qui admet p comme seul zéro de la courbe associée à $\mathcal{R}(W)$ (c'est une application de Riemann-Roch). Soient A la clôture intégrale de $k[t]$ dans $\mathcal{R}(W)$, $\mathfrak{M}$ le maximal de A correspondant à p, c'est le seul maximal de A contenant tA. Il suit alors que $A_{\mathfrak{M}}$ est fini sur $k[t]_{tk[t]}$ et que $[\mathcal{R}(W):k(t)] = \mathrm{rang}_{k[t]_{tk[t]}} A_{\mathfrak{M}}$. Comme $A_{\mathfrak{M}}$ est régulier il existe $z \in A_{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}} = zA_{\mathfrak{M}}$, ensuite $tA_{\mathfrak{M}} = z^e A_{\mathfrak{M}}$, soit $f = [A/\mathfrak{M}:k]$, on a donc

$$\mathrm{ef} = [\mathcal{R}(W):k(t)] = \mathrm{rang}_{k[t]_{tk[t]}} A_{\mathfrak{M}} = \dim_k A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}} .$$

Comme $k(p)$ est séparable sur k il existe $a \in A$ tel que $A/\mathfrak{M} = k[\bar{a}]$ (où $\bar{a}$ est l'image de a dans $A/\mathfrak{M}$), $\bar{a}$ est séparable sur k. Soit $Q(Z) = \mathrm{irr}\,(\bar{a}, k, Z)$, comme Q est séparable il est facile de montrer qu'il existe $\alpha \in A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}}$ tel que $Q(\alpha) = 0$, ce veut dire $A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}} \supset k[\alpha]$ et $k[\alpha] \simeq A/\mathfrak{M}$. Soit ζ l'image de z dans $A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}}$, on a $A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}} = k[\alpha, \zeta]$ et comme ζ est nilpotent il est facile de montrer que $A_{\mathfrak{M}}/tA_{\mathfrak{M}} = k[\alpha + \zeta]$. Il suit donc du lemme de Nakayama que $A_{\mathfrak{M}} = k[t]_{tk[t]}[a + z]$. Ceci veut donc dire que X est au voisinage de p une courbe plane.

Soient $s = a + z$, $u_0 + u_1 S + u_2 S^2 + \ldots + S^{\mathrm{ef}} = \mathrm{irr}\,(s, k(t), S)$, on a $u_i \in k[t]_{tk[t]}$, ainsi il existe $u \in k[t] - tk[t]$ avec $uu_i \in k[t]$. Soit $P(T, S) = P_0(T) + P_1(T)S + \ldots + P_{\mathrm{ef}}(T)S^{\mathrm{ef}}$ où $P_i(t) = uu_i$ et $P_{\mathrm{ef}}(t) = u$, on a donc $P(t, s) = 0$. Il est alors facile de montrer qu'il existe $E_1(T)$ multiple de $P_{\mathrm{ef}}(T)$, avec $E_1(0) \neq 0$ et $A[1/E_1(t)] = k[t, 1/E_1(t), s]$.

Comme p est régulier et $k(p)$ séparable sur k, on a $(\partial P/\partial T)(t, s)(p) \neq 0$ ou $(\partial P/\partial S)(t, s)(p) \neq 0$.

1er *Cas.* – *Supposons* $(\partial P/\partial S)(t, s)(p) \neq 0$. Soit $\{q_1, \ldots, q_r\} = \{q \in \operatorname{Spm} A: (\partial P/\partial S)(t, s)(q) = 0\}$ on a $q_i \neq p$. Soit $E_2(T) = E_1(T) \times \prod_i \operatorname{irr}(t(q_i), k, T)$. Clairement on a $E_2(0) \neq 0$ et $(\partial P/\partial S)(t, s)$ inversible dans $A[1/E_2(t)] = k[t, 1/E_2(t), s]$.

2e *Cas.* – *Supposons* $(\partial P/\partial S)(t, s)(p) = 0$ *et* $(\partial P/\partial T)(t, s)(p) \neq 0$. Soit $G(T, S') = P(T, S' + T^\alpha)$, pour α assez grand on a $G(T, S')$ unitaire en T et $s \overset{\text{déf}}{=} s' + t^\alpha$ transcendant sur h, de plus $G(t, s') = 0$. Alors G se factorise en $G(T, S') = H(T, S')H_1(T, S')$ où H, H_1 sont unitaires en T et $H(T, s') = \operatorname{irr}(t, k(s'), T)$. Il suit alors que $(\partial G/\partial T)(t, s')(p) \neq 0$ et que $(\partial H/\partial T)(t, s')(p) \neq 0$. Soit $\{q_1, \ldots, q_r\} = \{q \in \operatorname{Spm} A: (\partial H/\partial T)(t, s')(q) = 0\}$, on a $p \neq q_i$. Soit $E_2(T) = E_1(T) \times \prod_i \operatorname{irr}(t(q_i), k, T)$. Clairement on a $E_2(0) \neq 0$ et $(\partial H/\partial T)(t, s)$ inversible dans $A[1/E_2(t)] = k[t, 1/E_2(t), s']$.

Soient $\{q'_1, \ldots, q'_{r'}\} = \{q' \in \operatorname{Spm} A: q' \notin W\}$, $E_3(T) = \prod_i \operatorname{irr}(t(q'_i), k, T)$. On a donc $\{q' \in \operatorname{Spm} A: E_3(t)(q') \neq 0\} = W' \subset W$ et $\mathcal{O}_X(W') = A[1/E_3(t)]$. Soit $U = \{q' \in \operatorname{Spm} A: E_2(t) \cdot E_3(t)(q') \neq 0\}$ on a $U \subset W' \subset W$,

$$\mathcal{O}_X(U) = A\left[\frac{1}{E(t)}\right] = k\left[t, \frac{1}{E(t)}, s\right] \text{ (1er cas)}$$

et

$$\mathcal{O}_X(U) = A\left[\frac{1}{E(t)}\right] = k\left[t, \frac{1}{E(t)}, s'\right] \text{(2e cas) et } E = E_2E_3. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE 1. – Ce lemme se trouve dans [vdP 1], ici la démonstration est différente (plus élémentaire) et le corps k n'est pas supposé algébriquement clos.

REMARQUE 2. – *Il existe un espace affinoïde distingué X sur k* (avec $\bar{k}$ non parfait) *tel que $X_{(l)}$ ne soit pas ouvert affinoïde d'un espace projectif sur l, pour tout l fini sur k.*

Soit k un corps valué complet de caractéristique $p > 0$ avec k inerte sur k^p, de dimension infinie sur k^p et de type dénombrable sur k^p; ce qui veut dire que k admet une base normale $\{e_n\}_{n\geq 0}$ sur k^p avec $e_0 = 1$.

Soient $\pi \in k$ avec $0 < |\pi| < 1$, $a = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{(n-1)p} e_n T^{np} \in k\langle T\rangle$, $b \in k^{1/p}\langle T\rangle$ avec $b^p = a$, $A = k\langle T\rangle[b] \subset k^{1/p}\langle T\rangle$. Il est facile de montrer que $A^0 = k^0\langle T\rangle[b]$ et donc que A est une algèbre affinoïde distinguée.

Montrons que pour tout corps l fini sur k, on a $A \otimes_k l$ intègre. Il suffit de montrer que $Z^p - a$ est irréductible sur $l\langle T\rangle$; sinon $b \in l\langle T\rangle$ avec $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^n$, $b_n \in l$ et $b_n = \pi^{n-1} e_n^{1/p}$. Ce qui implique que $k^{1/p} \subset l$, c'est impossible parce que $[l:k] < \infty$.

Il est facile de montrer que l'idéal $\mathfrak{N} = T \cdot A + bA$ est maximal avec $A/\mathfrak{N} = k$ et donc que $\mathfrak{N}(A \mathbin{\widehat{\otimes}} l)$ est maximal pour tout corps valué complet $l \supset k$. Soit $f = b \otimes 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{n-1} \cdot T^n \otimes e_n^{1/p} \in A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p}$, montrons que $f^p = 0$ et que $f \neq 0$ dans

$(A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p})_{\mathfrak{M}}$ où $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p})$. Comme $\{e_n^{1/p}\}_{n\geqslant 0}$ est une base normale de $k^{1/p}$ sur k il suit que tout $g \in A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p}$ a une décomposition unique $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \otimes e_n^{1/p}$ avec $g_n \in A$, $\lim_{n\to\infty}\|g_n\| = 0$. Si $f = 0$ dans $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p})_{\mathfrak{M}}$, il existe $g \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p}) - \mathfrak{M}$ avec $g = \sum g_n \otimes e_n^{1/p}$ et $gf = 0$. On a donc un entier n_0 avec $g_{n_0} \notin \mathfrak{N}$, on montre facilement que $g_{n_0} b \in TA$ et en utilisant la décomposition $A = k\langle T\rangle \oplus bk\langle T\rangle \dots \oplus b^{p-1}k\langle T\rangle$ que $g_{n_0} \in \mathfrak{N}$, ce qui est impossible. Il suit de cela que $f \neq 0$ dans $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p})_{\mathfrak{M}}$ et il est immédiat que $f^p = 0$.

Soient $x \in X = \operatorname{Spm} A$ le point correspondant à $\mathfrak{N}$, $l_1 \supset k$ fini sur k, $Y = X_{(l_1)} = \operatorname{Spm}(A \otimes l_1)$, on note toujours x l'unique point de Y au-dessus de x. De même pour tout $l \supset l_1$ valué complet on note x l'unique point de $Y_{(l)}$ au-dessus de x; si l est fini sur l_1 on a $\mathcal{O}_{Y_{(l)},x} = \mathcal{O}_{Y,x} \otimes_{l_1} l$.

Montrons que Y n'est pas ouvert affinoïde d'un espace projectif sur l_1. Supposons le contraire, i.e. Y est ouvert affinoïde de P^{an} où P est une variété algébrique projective sur l_1 Soit $l \supset l_1$ fini sur l_1, comme $A \otimes_k l$ est intègre, on a $\mathcal{O}_{Y_{(l)},x}$ réduit ([BGR], proposition 8, p. 300). Il suit que $\mathcal{O}_{P^{\mathrm{an}},x} \otimes l$ est réduit, ainsi $\mathcal{O}_{P,x} \otimes l$ est réduit pour tout l fini sur l_1. On sait alors que $\mathcal{O}_{P,x} \otimes k^{1/p} l_1 = \mathcal{O}_{P_{(k^{1/p}l_1)},x}$ est réduit ([Gr, D], proposition 4.6.1, p. 68). Il suit de cela que $\mathcal{O}_{P^{\mathrm{an}}_{(k^{1/p}l_1)},x}$ est réduit [BGR], proposition 8, p. 300). Ainsi $\mathcal{O}_{X_{(k^{1/p}l_1)},x} = \mathcal{O}_{X_{(k^{1/p})},x} \otimes_{k^{1/p}} k^{1/p} l_1$ serait réduit, ce qui est faux puisque $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} k^{1/p})_{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{O}_{X_{(k^{1/p})},x}$ n'est pas réduit.

Donc $Y = X_{(l_1)}$ n'est pas ouvert affinoïde d'un espace projectif sur l_1.

REMARQUE 3. – *Il existe un espace affinoïde X sur k* (non distingué) *avec $\bar{k}$ parfait tel que $X_{(l)}$ ne soit pas ouvert affinoïde d'un espace projectif sur l, pour tout l fini sur k.*

Soit k un corps valué complet de caractéristique $p > 0$ avec k de dimension infinie sur k^p, de type dénombrable sur k^p et $\bar{k}$ algébriquement clos. Ainsi k admet une c-base $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ sur k^p $(c > 0)$ avec $e_0 = 1$; ceci veut dire que $e_n \in k^0$ et que $c \max|\lambda_n| \leqslant |\sum \lambda_n e_n| \leqslant \max|\lambda_n|$ pour tout $\lambda_n \in k^p$ et $\lim_n |\lambda_n| = 0$.

Soit $\pi \in k$ avec $0 < |\pi| < 1$, $a = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{np} e_n T^{np}$, $b \in k^{1/p}\langle T\rangle$ avec $b^p = a$, $A = k\langle T\rangle[b] \subset k^{1/p}\langle T\rangle$. Comme $\bar{k}$ est algébriquement clos on a $\overline{k\langle T\rangle} = \bar{A} = \overline{k^{1/p}\langle T\rangle}$. Il suit donc que A n'est pas distingué puisque $A \supset k\langle T\rangle$ ([Fr], théorème 1, p. 69). Comme pour la remarque 1 on montre que $A \otimes_k l$ est intègre pour tout l fini sur k et que $A \mathbin{\widehat{\otimes}}_k k^{1/p}$ n'est pas réduit. Ainsi l'argument de la remarque 1 montre que $X_{(l_1)}$ n'est pas ouvert affinoïde d'un espace projectif sur l_1, pour tout l_1 fini sur k.

REMARQUE 4. – Les hypothèses des remarques 2 et 3 montrent que les hypothèses du corollaire 2 du théorème 6 ne sont pas superflues. Néanmoins ces exemples sont essentiellement basés sur le fait que car $(k) = p > 0$ et que k est infini sur k^p. Dans le cas où car $(k) = p > 0$, $[k : k^p] < \infty$ (resp. car $(k) = 0$, car $(\bar{k}) = p > 0$) on aimerait savoir si un espace affinoïde de dimension 1 sur k est ouvert affinoïde d'un espace projectif sur k?

3. – Changement de corps de base.

3.1. *Composantes géométriquement irréductibles.*

NOTATION. – Soient X un espace analytique sur k, $x \in X$ on note $k(x)$ le corps $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$; soit l un corps extension de k, on note $X(l)$ l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe un k-homomorphisme de $k(x)$ dans l (ce qu'on écrira brièvement $k(x) \subset l$), on dit aussi que $X(l)$ est l'ensemble des points de X *rationnels* sur l.

PROPOSITION 6. – *Soient k un corps valué complet, $\varphi: T_d = k\langle Z_1, \dots, Z_d\rangle \to A$ un homomorphisme injectif et fini dans une algèbre affinoïde A. On suppose que $X = \operatorname{Spm} A$ est pur* (i.e. les composantes irréductibles de X sont de dimension d) *et que $Fr(A/\mathfrak{P})$ est séparable sur $Fr(T_d)$ pour tout premier minimal $\mathfrak{P}$ de A. Alors il existe un corps l séparable fini sur k et une partie dénombrable X^* de $X(l)$ qui soit Zariski dense dans X. En particulier X est géométriquement réduit si X est réduit.*

DÉMONSTRATION. – *A) On suppose A intègre et $Fr(A)$ séparable sur $Fr(T_d)$.*

α) Il existe $f \in T_d$, $f \neq 0$, $a \in A$ avec $A_f \overset{\text{déf}}{=} A[1/f] = T_d[a]_f$. Soit $F(S) = \operatorname{irr}(a, Fr(T_d), S) = u_0 + u_1 S + \dots + S^n$, on a $u_i \in T_d$ et $F'(a) \neq 0$ parce que $Fr(A)$ est séparable sur $Fr(T_d)$. Soit $\operatorname{irr}(F'(a), Fr(T_d), S) = v_0 + v_1 S + \dots + S^m$, on a $v_i \in T_d$, $v_0 \neq 0$ parce que $F'(a) \in A$ et $F'(a) \neq 0$; ainsi $v_0(x) \neq 0$ implique $F'(a)(x) \neq 0$.

β) *Il existe l séparable fini sur k et une partie dénombrable X_1 de $X(l)$ qui soit Zariski dense dans X.*

Soient $y_0 \in Y = \operatorname{Spm} T_d$ avec $fv_0(y_0) \neq 0$, $k(y_0)$ séparable sur k et $x_0 \in X$ au-dessus de y_0. Il suit de α) que $a(x_0)$ est racine simple du polynôme $u_0(x_0) + u_1(x_0) S + \dots + S^n$ et que $k(x_0) = k(y_0)[a(x_0)]$ parce que $fv_0(y_0) \neq 0$ et que $A_f = (T_d)_f[a]$. Ainsi $k(x_0)$ est séparable sur k, soit $l = k(x_0)$. Il existe $\pi \in k^\times$ avec la propriété suivante: soit

(1) $P(S) = \lambda_0 + \lambda_1 S + \dots + S^n \in l[S]$ avec $|\lambda_i - u_i(y_0)| \leqslant |\pi|$, alors ce polynôme possède une racine dans l; ceci résulte du fait que $a(x_0) \in l$ est racine simple de $\sum u_i(x_0) S^i$.

(2) Il existe $\pi_1 \in k^\times$ tel que $|Z_j(y) - Z_j(y_0)| \leqslant |\pi_1|$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$ implique $|u_i(y) - u_i(y_0)| \leqslant |\pi|$, soit $Y_1 = \{y \in Y(l) \,|\, |Z_j(y) - Z_j(y_0)| \leqslant |\pi_1|, 1 \leqslant j \leqslant d\}$.

Il existe $Y_2 \subset Y_1$ dénombrable et Zariski dense dans Y; soit A_j une partie dénombrable de l telle que $|z - Z_j(y_0)| \leqslant |\pi_1|$ pour tout $z \in A_j$, alors $Y_2 = \{y \in Y: (Z_1(y), \dots, Z_d(y)) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d\}$ convient. Comme

(3) Y est irréductible il suit que $Y_3 = Y_2 \cap D(fv_0)$ est Zariski dense dans Y ($D(fv_0)$ est l'ouvert principal de Y associé à fv_0).

Soit $X^* = \mathrm{Spm}\, \varphi^{-1}(Y_3) \cap X(l)$, comme φ est fini on a X^* démombrable. Montrons que $\mathrm{Spm}\, \varphi(X^*) = Y_3$: Soit $y \in Y_3$ par (1), (2), (3) il existe $\zeta \in l$ avec $\sum u_i(y)\zeta^i = 0$. Comme $f(y) \neq 0$ il existe $x \in X$ au-dessus de y tel que $a(x) = \zeta$ et comme $k(x) = k(y)[a(x)]$, on a $k(x) \subset l$.

Comme l'homomorphisme $\varphi\colon T_d \to A$ est injectif et fini, que A est intègre, il suit que Y_3 Zariski dense dans Y implique que X^* est Zariski dense dans X.

B) On suppose maintenant que X est pur et que $Fr(A/\mathfrak{P})$ est séparable sur $Fr(T_d)$ pour chaque premier minimal $\mathfrak{P}$ de A.

γ) Il existe l séparable fini sur k tel que $X(l)$ soit Zariski dense dans X.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ les composantes irréductibles de X. Par β) il existe l_i séparable fini sur k, X_i^* une partie dénombrable de $X_i(l_i)$ qui soit dense dans X_i. Soit $l = l_1 \cdot l_2 \ldots l_r$, alors $X_* = \bigcup_i X_i^*$ est une partie dénombrable de $X(l)$, Zariski dense dans X.

δ) Soit X réduit, alors X est géométriquement réduit.

Soient l défini par γ), $\varrho\colon X_{(l)} \to X$ le morphisme canonique, c'est un petit exercice de montrer que $\varrho^{-1}(X(l))$ est Zariski dense dans $X_{(l)}$ et que $\varrho^{-1}(X(l)) \subset X_{(l)}(l)$. Comme l est séparable sur k il suit que $X_{(l)}$ est réduit parce que X l'est. Ainsi [Bo 2], Satz 2.3, p. 137 montre que $X_{(l)}$ est géométriquement réduit; donc X est géométriquement réduit.

PROPOSITION 7. – *Soient k un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, X un espace analytique sur k, $\{X_i\}_{i\in I}$ les composantes irréductibles de X. Alors $\{X_{i(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}\}_{i\in I}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$* ($\widehat{k^{p^{-\infty}}}$ est le complété de l'extension purement inséparable maximale de k).

A) On suppose $X = \mathrm{Spm}\, A$ où A est une algèbre affinoïde intègre.

α) Il existe un entier $r \geq 0$, n une extension algébrique de k de dimension dénombrable sur k avec $n^{p^r} \subset k$, l une extension galoisienne finie de k, X^* une partie Zariski dense de X avec $k(x) \subset l \cdot n$ pour tout $x \in X^*$.

Soient $\varphi\colon T_d \to A$ un homomorphisme injectif et fini, L la clôture séparable de $Fr(T_d)$ dans $Fr(A)$ et $r \geq 0$ tel que $Fr(A)^{p^r} \subset L$, $B = L \cap A$ (qui est affinoïde) et $Y = \mathrm{Spm}\, B$. Par la proposition 6 il existe l galoisien fini sur k, $Y^* \subset Y(l)$ une partie Zariski dense de Y.

Soit $\psi\colon B \to A$ l'injection canonique, alors $\mathrm{Spm}\, \psi\colon X = \mathrm{Spm}\, A \to Y = \mathrm{Spm}\, B$ est un homéomorphisme parce que $B \supset A^{p^r}$, soit $i\colon Y \to X$ l'application réciproque. Soit n' la clôture normale de $k(i(y))_{y\in Y^*}$, $A^{p^r} \subset B$ implique $n'^{p^r} \subset l$; enfin le corps n' est un k-espace vectoriel de dimension dénombrable parce que Y^* est dénombrable. Soit n l'extension purement inséparable maximale de k contenue dans n', on a $n' = ln$ et $n^{p^r} \subset k$.

Il suit donc que $X^* = i(Y^*)$ convient parce que i est un homéomorphisme.

β) L'espace $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ est irréductible.

Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de A, montrons que $\sqrt{\mathfrak{M}(A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}})}$ est un maximal de $A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$. En effet $\mathfrak{M}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$ est un idéal de $A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$ et $\mathfrak{M}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}} \neq A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$ (par «fidèle platitude» § 1.2), il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{M}'$ de $A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$ avec $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$. Soit $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ l'image de $\mathfrak{M}'$ dans $A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}/\mathfrak{M}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}} = (A/\mathfrak{M})\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}} = (A/\mathfrak{M}) \otimes \widehat{k^{p^{-\infty}}}$ (parce que $A/\mathfrak{M}$ est fini sur k), k' l'extension séparable maximale de k contenue dans $A/\mathfrak{M}$, il existe $r \geqslant 0$ tel que $(A/\mathfrak{M})^{p^r} \subset k'$. Ainsi $(\widetilde{\mathfrak{M}}')^{p^r} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}' \cap (k' \otimes \widehat{k^{p^{-\infty}}})$, or k' et $\widehat{k^{p^{-\infty}}}$ sont linéairement disjoints sur k (c'est γ)) il suit donc que $(\widetilde{\mathfrak{M}}')^{p^r} = (0)$, soit donc $\mathfrak{M}'^{p^r} \subset \mathfrak{M}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$. Ce qui montre que $\mathfrak{M}' = \sqrt{\mathfrak{M}(A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}})}$.

Soit $j\colon X \to X(\widehat{k^{p^{-\infty}}})$ l'injection définie par $\mathfrak{M}_{j(x)} = \sqrt{\mathfrak{M}_x\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}}$.

Soient $f, g \in A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$ avec fg nilpotent. Montrons que f ou g est nilpotent. Soient $Z = \{x \in X^*\colon f(j(x)) = 0\}$, $T = \{x \in X^*\colon g(j(x)) = 0\}$, on a $X^* = Z \cup T$, comme X est irréductible et X^* dense, on a Z ou T dense dans X. Supposons Z dense dans X.

Il existe $n \subset m \subset k^{p^{-\infty}}$ un corps de dimension dénombrable sur k avec $f \in A\,\widehat{\otimes}_k\, m$. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\hat{m}$ admette une base c-normale $\{e_i\}$ sur $\hat{n}$ indexée sur N ([Mo], théorème 8, p. 50). On a $f = \sum_i u_i \otimes e_i$ avec $u_i \in A\,\widehat{\otimes}\,n$ et $\lim_{i\to\infty} \|u_i\| = 0$ où $\|\cdot\|$ est la norme tensorielle de $A\,\widehat{\otimes}\,n$. Soit $x \in Z$, on a $0 = f(j(x)) = \sum_i u_i(j(x))\,e_i$, il suit facilement de α) que $u_i(j(x)) \in l\cdot\hat{n}$. Comme $l\hat{n}$ est séparable sur $\hat{n}$, on a $l\hat{n}$ et $\hat{m}$ linéairement disjoints sur $\hat{n}$ (γ), ce qui montre que $u_i(j(x)) = 0$ pour tout $x \in Z$. Comme $u_i^{p^r} \in A$ on a $0 = u_i(j(x))^{p^r} = u_i^{p^r}(x)$ pour $x \in Z$ et Z dense dans X implique que $u_i^{p^r} = 0$. Ceci montre que $f^{p^r} = 0$.

γ) Soient l un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, l' une extension séparable finie de l, alors $\hat{l}^{p^{-\infty}}$ et l' sont linéairement disjoints sur l.

Soient $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ une base de l' sur l, $\{\omega_1^*, \dots, \omega_n^*\}$ la base duale par rapport à la forme bilinéaire (non dégénérée) $(x, y) \to \mathrm{Tr}_{l'/l}(xy)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \hat{l}^{p^{-\infty}}$ avec $0 = \sum \lambda_i \omega_i$, $\lambda_1', \dots, \lambda_n' \in l^{p^{-\infty}}$, $\theta = \sum \lambda_i' \omega_i$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n l-homomorphismes de l' dans l^{alg}, $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ des prolongements à l^{alg}. On a $\lambda_i' = \sum_i \tilde{\sigma}_i(\theta\omega_j^*)$, comme les $\tilde{\sigma}_i$ sont isométriques on a donc $|\lambda_j'| \leqslant |\theta|\cdot\max\{|\omega_j^*|\} \leqslant (\max_i\{|\lambda_i - \lambda_i'|\}) \times (\max_j\{|\omega_j|\}) \times (\max_j\{|\omega_j^*|\})$. Comme $l^{p^{-\infty}}$ est dense dans $\widehat{l^{p^{-\infty}}}$ il suit facilement que $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Ainsi l' et $\widehat{l^{p^{-\infty}}}$ sont linéairement disjoints sur l.

B) On suppose $X = \mathrm{Spm}\,A$ affinoïde.

Supposons d'abord X irréductible. Soit $\mathfrak{N}$ l'idéal des nilpotents de A, par A β) $\mathrm{Spm}\,(A/\mathfrak{N}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}})$ est irréductible; or $A/\mathfrak{N}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}} = A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}/\mathfrak{N}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}}$, ainsi $\mathrm{Spm}\,(A/\mathfrak{N}\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}})$ et $\mathrm{Spm}\,(A\,\widehat{\otimes}\,k^{p^{-\infty}})$ sont Zariski homéomorphes, ce qui montre que $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ est irréductible.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_r$ les composantes irréductibles de X, comme $X_{i(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ est irréductible par ce qui précède, il suit que $X_{1(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}, \ldots, X_{r(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$.

C) Le cas général.

La démonstration de $A, \beta)$ montre qu'il existe une application injective $j\colon X \to X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$. Soient G une composante irréductible de $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$, U un admissible affinoïde de X, $U_1, \ldots, U_n$ les composantes irréductibles de U, alors $U_{1(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}, \ldots, U_{n(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ sont les composantes irréductibles de $U_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ (c'est B)). D'autre part $G \cap U_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ est réunion (unique) de composantes irréductibles de $U_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$; ainsi $G \cap U_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})} = \bigcup_{i\in S} U_{i(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ où $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. On a donc $j^{-1}(G) \cap U = \bigcup_{i\in S} U_i$, il suit que $j^{-1}(G) \cap U$ est un fermé de U; ce qui montre que $j^{-1}(G)$ est un fermé de X. On a $(j^{-1}(G))_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})} = G$. Ceci montre que $j^{-1}(G)$ est irréductible et que les $X_{i(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(\widehat{k^{p^{-\infty}}})}$.

PROPOSITION 8. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique sur k, quasi-compact. Alors il existe une extension séparable finie l de k telle que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ soient géométriquement irréductibles.*

DÉMONSTRATION. – *A) On suppose que le corps k est parfait.*

α) Soit X affinoïde tel que pour tout l fini sur k, l'espace $X_{(l)}$ soit irréductible. Alors X est géométriquement irréductible.

Supposons que $X = \operatorname{Spm} A$ avec A intègre. Il existe un homomorphisme injectif et fini $\varphi\colon T_d \to A$, soient L la clôture séparable de $Fr(T_d)$ dans $Fr(A)$, $B = L \cap A$ qui est affinoïde et $Y = \operatorname{Spm} B$. Comme $A^{p^r} \subset B$ $(p = \operatorname{car}(k))$, X et Y sont homéomorphes. Par la proposition 6 il existe l fini sur k tel que $Y(l)$ soit dense dans Y; comme k est parfait l'homéomorphisme de Y sur X induit une bijection de $Y(l)$ sur $X(l)$, ainsi $X(l)$ est dense dans X. Il suit facilement que $X_{(l)}(l)$ est dense dans $X_{(l)}$ et [Bo 2], Satz, 2.3, p. 137 montre que $X_{(l)}$ (qui est irréductible) est géométriquement irréductible, donc X est géométriquement irréductible.

On suppose maintenant $X = \operatorname{Spm} A$ irréductible. Soient $\mathfrak{N}$ l'idéal des nilpotents de A, K le complété de la clôture algébrique de k, on a $A \hat{\otimes} K / \mathfrak{N} \hat{\otimes} K \simeq (A/\mathfrak{N}) \hat{\otimes} K$, il suit que $\operatorname{Spm}(A \hat{\otimes} K)$ est homéomorphe à $\operatorname{Spm}((A/\mathfrak{N}) \hat{\otimes} K)$. Ce qui précède montre que $\operatorname{Spm}((A/\mathfrak{N}) \hat{\otimes} K)$ est irréductible, ainsi $\operatorname{Spm}(A \hat{\otimes} K)$ est irréductible, i.e. X est géométriquement irréductible.

β) Soit X affinoïde, alors il existe l fini sur k tel que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ soient géométriquement irréductibles.

Soient K le complété de la clôture algébrique de k, $X_1, \ldots, X_r$ les composantes irréductibles de X. Soient $k \subset l \subset K$, $Z_1, \ldots, Z_s$ les composantes irréductibles de $X_{(l)}$, alors il existe une partition (unique) $\{1, 2, \ldots, s\} = I_1 \coprod I_2 \coprod \ldots \coprod I_r$ telle que

$X_{i(l)} = \bigcup_{j \in I_i} Z_j$. Comme les composantes irréductibles de $X_{(K)}$ sont en nombre fini il existe l fini sur k tel que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ restent irréductibles après extension finie des scalaires. Alors α) montre que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ sont géométriquement irréductibles.

γ) *Soit X un espace analytique quasi-compact, alors il existe l fini sur k tel que les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ soient géométriquement irréductibles.*

Soit $\{U_1, \ldots, U_s\}$ un recouvrement de X par des affinoïdes extrait d'un recouvrement admissible. D'après β) il existe l fini sur k tel que les composantes irréductibles $\{Y_{ij}\}_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$ de $U_{i(l)}$ soient géométriquement irréductibles pour $1 \leqslant i \leqslant s$; ainsi $\{Y_{ij(K)}\}_j$ sont les composantes irréductibles de $U_{i(K)}$ (K est toujours le complété de la clôture algébrique de k). Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ les composantes irréductibles de $X_{(K)}$, alors il existe $A_t \subset \{1, 2, \ldots, n_i\}$ tel que $Z_t \cap U_{i(K)} = \bigcup_{j \in A_t} Y_{ij(K)}$. Soit Z'_t l'ensemble des points de $X_{(l)}$ au-dessous de Z_t, on a donc $Z'_t \cap U_{i(l)} = \bigcup_{j \in A'} Y_{ij}$, ce qui montre que Z'_t est un fermé de $X_{(l)}$; de plus on a $Z'_{t(K)} = Z_t$. Il est alors aisé de montrer que $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_r$ sont les composantes irréductibles de $X_{(l)}$ et qu'elles sont géométriquement irréductibles.

B) *Le cas général.*

Le cas où $0 = \operatorname{car}(k)$ est résolu par A), supposons $\operatorname{car}(k) = p > 0$. Soit $l = k^{p^{-\infty}}$, alors il existe l_1 fini sur l tel que les composantes irréductibles de $X_{(l_1)}$ soient géométriquement irréductibles (c'est A) appliqué à $X_{(l)}$). Soit $m = l_1 \cap k^{\text{sép}}$, comme $k^{\text{sép}}$ et l sont linéairement disjoints sur k (proposition 7, démonstration γ)) on a $[m:k] = [l_1:l]$ et $l_1 \subset (m^{p^{-\infty}})^\wedge$ (il faut utiliser le fait que l_1 est engendré sur l par des éléments algébriques séparables sur k). Soient $Y_1, \ldots, Y_s$ les composantes irréductibles de $X_{(m)}$, il suit de la proposition 7 que $Y_{i(\widehat{m^{p^{-\infty}}})}$ est irréductible, ainsi $Y_{i(l_1)}$ est irréductible. Ceci montre que $Y_{1(l_1)}, \ldots, Y_{s(l_1)}$ sont les composantes irréductibles de $X_{(l_1)}$ qui sont géométriquement irréductibles. Ainsi les composantes irréductibles de $X_{(m)}$ sont géométriquement irréductibles.

3.2. *Action d'un groupe fini d'automorphismes.*

LEMME 6. – *Soient k un corps valué complet, l normal et fini sur k, $G = \operatorname{Aut}(l/k)$, X un espace analytique irréductible sur k. Alors G agit transitivement sur les composantes irréductibles de $X_{(l)}$.*

DÉMONSTRATION. – α) *On suppose $X = \operatorname{Spm} A$ affinoïde.*

Soient $\mathfrak{P}$ un premier minimal de $A \otimes l$, $\mathfrak{A} = \bigcap_{\sigma \in G} \mathfrak{P}^\sigma$, $f \in \mathfrak{A}$, $P(T) = \prod_{\sigma \in G} (T - f^\sigma)^{p^r} = p_0 + p_1 T + \ldots + T^n$ où $p^r = [l:k]_{\text{ins}}$. Alors on a $P(f) = 0$, $p_i \in \mathfrak{A} \cap A \subset \mathfrak{P} \cap A$; ainsi p_i est nilpotent et par suite f^n est nilpotent, donc f est nilpotent. Ceci montre que $X_{(l)} = \bigcup_\sigma V(\mathfrak{P}^\sigma)$, ainsi G agit transitivement sur les composantes irréductibles de $X_{(l)}$.

β) *Le cas général.*

Soient Y une composante irréductible de $X_{(l)}$, $F = \bigcup_\sigma Y^\sigma$ et H la réunion des autres composantes irréductibles de $X_{(l)}$; si Z est une composante irréductible de H, alors Z^σ est aussi une composante irréductible de H.

Soit $p: X_{(l)} \to X$ la projection, il faut montrer que $p(F)$ et $p(H)$ sont fermés de X. Soit U un admissible affinoïde de X, $U_1, U_2, \ldots, U_s$ ses composantes irréductibles, $\{U_{ij}\}_j$ les composantes irréductibles de $U_{i(l)}$; ainsi par α) $\{U_{ij}\}_j = \{U_{i1}^\sigma\}_\sigma$. On montre facilement qu'il existe une partition $I_1 \coprod I_2 = \{1, 2, \ldots, s\}$ telle que $U_{(l)} \cap F = \bigcup_{i \in I_1} \left(\bigcup_\sigma U_{i1}^\sigma\right)$ et $U_{(l)} \cap H = \bigcup_{i \in I_2} \left(\bigcup_\sigma U_{i1}^\sigma\right)$. Par suite $p(F) \cap U = \bigcup_{i \in I_1} U_i$ et $p(H) \cap U = \bigcup_{i \in I_2} U_i$. Ainsi $p(F)$ est fermé et $\dim F = \dim p(F) = \dim X_{(l)} = \dim X$. Comme X est irréductible on a $p(F) = X$ et $F = p^{-1}(p(F))$ implique $F = X_{(l)}$.

3.3. *Ouverts affinoïdes de* $X_{(K)}$.

LEMME 7. – *Soient k un corps valué complet, K le complété de la clôture algébrique de k, X un espace analytique sur k, U un ouvert affinoïde de $X_{(K)}$. Alors il existe un corps l séparable et fini sur k, V un ouvert affinoïde de $X_{(l)}$ tel que $V_{(K)} = U$.*

DÉMONSTRATION. – α) *Soient X un espace analytique sur k, $\{X_i\}_{i\in I}$ un recouvrement admissible affinoïde. On suppose que $X_{(K)}$ est affinoïde, qu'il existe $I' \subset I$ une partie finie, qu'il existe $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(X)$ avec $\sum_j f_{ij}\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$ pour $i \in I'$ et $X_{i(K)} = \{x \in X_{(K)}: |f_{ij}(x)| \leqslant |f_{i0}(x)|,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i\}$ pour $i \in I'$ et $X_{(K)} = \bigcup_{i\in I'} X_{i(K)}$. Alors X est affinoïde.*

Montrons d'abord que $\mathcal{O}_X(X)$ est une algèbre affinoïde. La suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \bigoplus_{i\in I'} \mathcal{O}_X(X_i) \to \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ montre que $\mathcal{O}_X(X) \hat{\otimes}_k K \simeq \mathcal{O}_{X_{(K)}}(X_{(K)})$. Il existe donc un homomorphisme surjectif $\varphi: K\langle Z_1, \ldots, Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes} K$ puisque $X_{(K)}$ est affinoïde. Soit $z_i = \varphi(Z_i)$, si on choisit $z'_1, \ldots, z'_n$ assez proche de $z_1, \ldots, z_n$, alors il existe $\psi: K\langle Z_1, \ldots, Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes} K$ avec $\psi(Z_i) = z'_i$ et ψ est surjectif ([Fr], lemme 1, p. 128). Comme $k^{\text{sép}}$ est dense dans K il existe l séparable fini sur k avec $z'_i \in \mathcal{O}_X(X) \otimes l$. Soit $\theta: l\langle Z_1, \ldots, Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X) \otimes l$ défini par $\theta(Z_i) = z'_i$, comme $\theta \hat{\otimes} 1_K$ est surjectif, il suit que θ est surjectif, ainsi $\mathcal{O}_X(X) \otimes l$ est une algèbre affinoïde. Il résulte facilement que $\mathcal{O}_X(X)$ est une algèbre affinoïde (on peut appliquer [BGR], 6.3.3$_3$, p. 247).

Soient $Y = \operatorname{Spm} \mathcal{O}_X(X)$, $\varepsilon_i: \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_i)$ l'homomorphisme restriction $X'_i = \operatorname{Spm} \varepsilon_i(X_i)$ et $Y_i = \{y \in Y: |f_{ij}(y)| \leqslant |f_{i0}(y)|,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i\}$, on a $X'_i \subset Y_i$; ainsi ε_i induit un homomorphisme $\varrho_i: \mathcal{O}_Y(Y_i) \to \mathcal{O}_X(X_i)$. Comme $\varrho_i \hat{\otimes} 1_K$ est un isomorphisme, il résulte que ϱ_i est un isomorphisme. Ainsi X_i est isomorphe à Y_i, de même $X_i \cap X_j$ est isomorphe à $Y_i \cap Y_j$.

Il reste à montrer que $Y = \bigcup_{i \in I'} Y_i$. Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de $\mathcal{O}_X(X)$, on a $\mathfrak{M}\hat{\otimes}K \subsetneq \mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes}K$, ainsi $\mathfrak{M}\hat{\otimes}K \subset \mathfrak{M}'$ où $\mathfrak{M}'$ est un maximal de $\mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes}K = \mathcal{O}_{X_{(K)}}(X_{(K)})$. Par exemple $\mathfrak{M}' \in X_{i(K)}$, il résulte que $\mathfrak{M}(\mathcal{O}_X(X_i)\hat{\otimes}K) \subsetneq \mathcal{O}_X(X_i)\hat{\otimes}K$, ce qui montre que $\mathfrak{M}\mathcal{O}_X(X_i) \subsetneq \mathcal{O}_X(X_i)$, donc $\mathfrak{M} \in X'_i \subset Y_i$. Ainsi X isomorphe à Y est affinoïde.

β) *Soit X un espace analytique sur k tel que $X_{(K)}$ soit affinoïde. Alors il existe un corps l séparable et fini sur k, $\{Y_i\}_{i\in I}$ un recouvrement admissible affinoïde de $X_{(l)}$, $I' \subset I$ fini, $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(X)\otimes l$ tels que $\sum_j f_{ij}\mathcal{O}_X(X)\otimes l = \mathcal{O}_X(X)\otimes l$ pour $i \in I'$, $Y_{i(K)} = \{x \in X_{(K)}\colon |f_{ij}(x)| \leqslant |f_{i0}(x)|,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i\}$ et $X_{(K)} = \bigcup_{i\in I'} Y_{i(K)}$.*

Soit $\{X_i\}$ un recouvrement admissible affinoïde de X, alors $X_{(K)}$ est recouvert par un nombre fini de $X_{i(K)}$ et $X_{i(K)}$ est réunion finie de S_{ij} qui sont rationnels dans $X_{(K)}$. Ainsi S_{ij} peut s'écrire $S_{ij} = \{x \in X_{(K)}\colon |g_{ijs}(x)| \leqslant |g_{ij0}(x)|,\ 0 \leqslant s \leqslant n_{ij}\}$ et $g_{ijs} \in \mathcal{O}_X(X)\otimes l$ pour l séparable, fini sur k, assez grand. Soit $T_{ij} = \{y \in X_{i(l)}\colon |g_{ijs}(y)| \leqslant |g_{ij0}(y)|,\ 0 \leqslant s \leqslant n_{ij}\}$, alors T_{ij} est rationnel dans $X_{i(l)}$, $T_{ij(K)} = S_{ij}$ et les T_{ij} recouvrent $X_{(l)}$. On en déduit facilement β).

γ) *Le cas général.* - Soit $\{X_i\}$ un recouvrement affinoïde admissible de X, alors $U \cap X_{i(K)}$ est une réunion finie de S_{ij} qui sont rationnels dans $X_{i(K)}$. Par le même procédé que β) il existe l séparable, fini sur k, T_{ij} des rationnels de $X_{i(l)}$ avec $T_{ij(K)} = S_{ij}$. Soit $V = \bigcup_{ij} T_{ij}$, c'est un ouvert analytique de $X_{(l)}$ et on a $V_{(K)} = U$. Ainsi V est un espace analytique et $V_{(K)}$ est affinoïde. Par α) et β) il existe l_1 séparable fini sur k tel que $W = V_{(l_1)}$ soit affinoïde. Ainsi W est un ouvert affinoïde de $X_{(l_1)}$ et on a $W_{(K)} = U$.

REMARQUE. - Les parties α) et β) montrent que $X_{(K)}$ affinoïde implique $X_{(l)}$ affinoïde pour un certain corps l séparable, fini sur k. De là on peut montrer que X est affinoïde (par ex. [Fr], exercice 38, p. 188).

4. - Faisceaux amples sur un espace analytique.

4.1. *Espace réduit associé à un espace analytique.*

Soit $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique, alors il existe sur X un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{N}_X$ tel que $\mathcal{N}_X(U)$ soit l'idéal des nilpotents de $\mathcal{O}_X(U)$ pour tout admissible affinoïde U de X. Alors $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X)$ est un espace analytique réduit noté X_{red} et appelé *l'espace réduit associé à X*. L'identité $i\colon X_{\mathrm{red}} \to X$ induit un morphisme et pour tout admissible affinoïde U, $i^{\#}(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(U) = \mathcal{O}_{X/\mathfrak{N}_X}(U) = \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{N}_X(U)$ est la surjection canonique ([Fr], ex. 12, p. 280). En particulier *X est affinoïde si et seulement si X_{red}* est affinoïde ([Fr], ex. 13, p. 280).

4.2. *Faisceaux amples sur un espace analytique.*

DÉFINITION. – Soit X un espace analytique, quasi-compact, un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X est dit *ample* si pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X il existe un entier n_0 (dépendant de $\mathcal{F}$) tel que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout $n \geqslant n_0$ ($\mathcal{L}^n \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}^{\otimes n}$).

PROPOSITION 9. – *Soient X un espace analytique, quasi-compact sur un corps k valué complet, i: $X_{\text{red}} \to X$ le morphisme canonique.*

1) *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Alors $\mathcal{L}$ est ample si et seulement si $i^*\mathcal{L}$ est ample.*

2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

   i) *pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, le k-espace vectoriel $\mathcal{F}(X)$ est de dimension finie;*

   ii) *pour tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur X_{red}, le k-espace vectoriel $\mathcal{G}(X_{\text{red}})$ est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. – 1) Soient $\mathcal{L}$ ample sur X, $\mathcal{G}$ cohérent sur X_{red}, on a $i_*(\mathcal{G} \otimes (i^*\mathcal{L})^n) = i_*\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^n$ et ainsi

$$H^i\big(X, i_*(\mathcal{G} \otimes (i^*\mathcal{L})^n)\big) = H^i\big(X_{\text{red}}, \mathcal{G} \otimes (i^*\mathcal{L})^n\big) = H^i(X, i_*\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^n)$$

Comme $\mathcal{L}$ est ample on a bien $H^i(X_{\text{red}}, \mathcal{G} \otimes (i^*\mathcal{L})^n) = 0$ pour $i > 0$ et $n \gg 0$, ce qui montre que $i^*\mathcal{L}$ est ample.

Supposons $i^*\mathcal{L}$ ample. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, $\mathcal{N}$ le faisceau des nilpotents sur X, comme X est quasi-compact il existe $r \geqslant 1$ avec $\mathcal{N}^r = 0$. On a la suite de sous-faisceaux de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \supset \mathcal{N}\mathcal{F} \supset \mathcal{N}^2\mathcal{F} \supset \ldots \supset \mathcal{N}^r\mathcal{F} = 0$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, r-1$, on a la suite exacte $0 \to \mathcal{N}^i\mathcal{F} \to \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F} \to \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F} \to 0$, ce qui donne la suite exacte de cohomologie

$$\to H^p(X, \mathcal{N}^i\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \to H^p(X, \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \to H^p\big(X, (\mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}^n\big) \to \\ \to H^{p+1}(X, \mathcal{N}^i\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)\,.$$

En raisonnant par récurrence on peut supposer que $H^p(X, \mathcal{N}^i\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $p > 0$ et $n \gg 0$ ($\mathcal{N}^r = 0$). D'autre par $\mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$-module cohérent, ainsi $H^p(X, (\mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $p > 0$ et $n \gg 0$.

Ainsi $\mathcal{L}$ est ample.

2) ii) *implique* i). – Soit $\mathcal{G}$ un faisceau cohérent sur X_{red}, on a $H^0(X_{\text{red}}, \mathcal{G}) = H^0(X, i_*\mathcal{G})$, ce qui montre que $\mathcal{G}(X_{\text{red}})$ est de dimension finie.

i) *implique* ii). – Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Avec les notations de 1), on a toujours la suite exacte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{N}^i \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F}),$$

par récurrence on peut supposer que $H^0(X, \mathcal{N}^i\mathcal{F})$ est de dimension finie, comme $\mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F}/\mathcal{N}^i\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}$-module cohérent, on a aussi $H^0(X, \mathcal{N}^{i-1}\mathcal{F})$ de dimension finie.

PROPOSITION 10. – *Soient X un espace analytique pur de dimension* 1, *quasi-compact, réduit sur un corps k valué complet, $\varphi\colon X' \to X$ la normalisation de X.*

1) *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Alors $\mathcal{L}$ est ample si et seulement si $\varphi^*\mathcal{L}$ est ample.*

2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

   i) *pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, le k-espace vectoriel $\mathcal{F}(X)$ est de dimension finie;*

   ii) *pour tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur X', le k-espace vectoriel $\mathcal{G}(X')$ est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. – 1) Soient $\mathcal{L}$ ample sur X et $\mathcal{G}$ un faisceau cohérent sur X', on a $\varphi_*(\mathcal{G}\otimes(\varphi^*\mathcal{L})^n) = \varphi_*\mathcal{G}\otimes\mathcal{L}^n$ et ainsi $H^i\big(X, \varphi_*(\mathcal{G}\otimes(\varphi^*\mathcal{L})^n)\big) = H^i(X', \mathcal{G}\otimes(\varphi^*\mathcal{L})^n) = H^i(X, \varphi_*\mathcal{G}\otimes\mathcal{L}^n)$. Ce qui montre que $\varphi^*\mathcal{L}$ est ample.

Supposons $\varphi^*\mathcal{L}$ ample. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, le faisceau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi_*\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et aussi un $\varphi_*\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent; ainsi il existe un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur X' avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi_*\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{F}) = \varphi_*\mathcal{G}$. D'autre part le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \varphi_*\mathcal{O}_{X'}$ induit un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi_*\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$, donc induit un morphisme $u\colon \varphi_*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$. De plus $u_x\colon (\varphi_*\mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x$ est un isomorphisme pour $x \in X_{\mathrm{reg}}$. On a les suites exactes de faisceaux,

$$0 \to \mathcal{K} \to \varphi_*\mathcal{G} \to \operatorname{im} u \to 0\,, \qquad 0 \to \operatorname{im} u \to \mathcal{F} \to \mathcal{C} \to 0\,.$$

On a donc $\mathrm{Supp}\,(\mathcal{K}) \subset X_{\mathrm{sing}}$, $\mathrm{Supp}\,(\mathcal{C}) \subset X_{\mathrm{sing}}$; ainsi les supports de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ sont de dimension zéro. Ensuite on a les suites exactes de cohomologie

$$H^p(X, \mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n) \to H^p(X, \varphi_*\mathcal{G}\otimes\mathcal{L}^n) \to H^p(X, \operatorname{im} u\otimes\mathcal{L}^n) \to H^{p+1}(X, \mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n)\,,$$

$$H^p(X, \operatorname{im} u\otimes\mathcal{L}^n) \to H^p(X, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^n) \to H^p(X, \mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^n)\,.$$

On a $H^p(X, \mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n) = H^p(X, \mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^n) = 0$ pour $p > 0$; ainsi

$$H^p\big(X', \mathcal{G}\otimes(\varphi^*\mathcal{L})^n\big) = H^p(X, \varphi_*\mathcal{G}\otimes\mathcal{L}^n) = H^p(X, \operatorname{im} u\otimes\mathcal{L}^n)\,.$$

Donc pour $p > 0$, $n \gg 0$ on a $H^p(X, \operatorname{im} u\otimes\mathcal{L}^n) = 0$. Ce qui montre que $\mathcal{L}$ est ample.

2) ii) *implique* i). – Se traite comme pour la proposition 9.

i) *implique* ii). – Avec les notations de 1), on a les suites exactes

$$0 \to H^0(X, \mathcal{K}) \to H^0(X, \varphi_* \mathcal{G}) \to H^0(X, \operatorname{im} u) \to H^1(X, \mathcal{K}),$$
$$0 \to H^0(X, \operatorname{im} u) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{C}).$$

Comme $H^0(X, \varphi_* \mathcal{G}) = H^0(X, \mathcal{G})$ et que $0 = H^1(X, \mathcal{K})$, il suit que $H^0(X, \operatorname{im} u)$ est de dimension finie. Comme $H^0(X, \mathcal{C})$ est de dimension finie, on a donc $\mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})$ qui est de dimension finie.

4.3. *Immersion fermée dans un espace projectif.*

Théorème 7. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique quasi-compact sur k, $\mathfrak{L}$ un faisceau inversible sur X avec les propriétés suivantes:*

a) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, le k-espace vectoriel $\mathcal{F}(X)$ est de dimension finie.

b) Le faisceau $\mathfrak{L}$ est engendré par ses sections globales.

c) L'homomorphisme canonique $\mathfrak{L}(X)^{\otimes n} \to \mathfrak{L}^n(X)$ est surjectif ($\mathfrak{L}^n \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{L}^{\otimes n}$).

d) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ il existe $n_0 \geqslant 0$ (dépendant de $\mathcal{F}$) *tel que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathfrak{L}^n) = 0$ pour tout $i > 0$, et pour tout $n \geqslant n_0$.*

Soient l'algèbre graduée $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{L}^n(X)$ (elle est de type fini sur k), *$x \in X$, $\mathfrak{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à x* (i.e. $\mathfrak{J}_{x'} = \mathcal{O}_{X,x'}$ pour $x' \neq x$ et $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{M}_x$).

Alors $\mathfrak{P}_x \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n(X)$ est un idéal premier homogène de A avec $\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P}_x = 1$ *et $x \to \mathfrak{P}_x$ induit un isomorphisme de X sur* $(\operatorname{Proj} A)^{\text{an}}$.

Démonstration. – α) *L'idéal $\mathfrak{P}_x = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n(X)$ est premier homogène avec*

$$\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P}_x = 1 \qquad \textit{et} \qquad \varphi \colon X \to Z \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Proj} A$$

défini par $\varphi(x) = \mathfrak{P}_x$ est bijectif.

Il existe $g \in \mathfrak{L}(X)$ dont la fibre en x est une base de $\mathfrak{L}_x$, il suit que g^n l'image de $g^{\otimes n}$ dans $\mathfrak{L}^n(X)$ est une base de $\mathfrak{L}^n_x$.

Soit $f \in \mathfrak{L}^n(X)$ son image dans $\mathfrak{L}^n_x$ s'écrit $f = u \cdot g^n$ où $u \in \mathcal{O}_{X,x}$, soit $\bar{u}$ l'image de u dans $L = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$. Il existe donc un homomorphisme $\psi \colon A \to L[T]$ tel que $\psi(f) = \bar{u}T^n$. Il est alors clair que $\mathfrak{P}_x = \ker \psi$ et que $1 = \dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P}_x$.

Montrons que $\varphi \colon X \to Z$ est injectif. Soient $x, x' \in X$, $x \neq x'$, $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}'$) le faisceau cohérent d'idéaux associé à x (resp. x'). Soit n tel que $\mathfrak{J}\mathfrak{L}^n(X)$ engendre $\mathfrak{J}\mathfrak{L}^n$ (lemme 8.1), ci-après). Comme $(\mathfrak{J}\mathfrak{L}^n)_{x'} = \mathfrak{L}^n_{x'}$ il existe $f \in \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n(X)$ avec $f_{x'} \notin (\mathfrak{J}'\mathfrak{L}^n)_{x'}$. Ainsi $\mathfrak{P}_x \neq \mathfrak{P}_{x'}$.

Montrons que φ est surjectif. Soient $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène avec $\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P} = 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ des générateurs homogènes de $\mathfrak{P}$, $n = \max_i$ degré p_i, $a_1, a_2, \ldots, a_t$ une famille génératrice du $\mathcal{O}_X(X)$-module $\mathfrak{P}_n$ des éléments de $\mathfrak{P}$ de degré n. Montrons qu'il existe $x \in X$ avec $\mathfrak{P}_n \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \neq \mathfrak{L}^n_x$; supposons le contraire et montrons qu'il existe $m \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{P}_n \mathfrak{L}^m(X) = \mathfrak{L}^{n+m}(X)$. Soit $u\colon \mathcal{O}_X^{\oplus t} \to \mathfrak{L}^n$ le morphisme défini sur U affinoïde par $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) \to \sum_i \lambda_i a_{i|U}$, ce morphisme u est surjectif; on a alors une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_X^{\oplus t} \to \mathfrak{L}^n \to 0$, il existe $m \geqslant 0$ tel que $H^1(X, \mathcal{N} \otimes \mathfrak{L}^m) = 0$, ainsi la suite exacte de cohomologie montre que $\mathcal{O}^{\oplus t} \otimes \mathfrak{L}^m(X) \to \mathfrak{L}^{n+m}(X)$ est surjectif. Comme $\mathcal{O}_X^{\oplus t} \otimes \mathfrak{L}^m \simeq (\mathfrak{L}^m)^{\oplus t}$ on a $\mathfrak{L}^m(X)^{\oplus t} \to \mathfrak{L}^{n+m}(X)$ surjectif, ce qui veut dire que $\mathfrak{P}_n \mathfrak{L}^m(X) = \mathfrak{L}^{n+m}(X)$. Soit $a \in \mathfrak{L}(X)$, on a $a^{n+m} \in \mathfrak{L}^{n+m}(X) \subset \mathfrak{P}$, ainsi $a \in \mathfrak{P}$, comme $\mathfrak{L}^s(X)$, $s > 0$ est engendré par $\mathfrak{L}(X)$ on a $\mathfrak{P} \supset \bigoplus_{n>0} \mathfrak{L}^n(X)$, ce qui contredit $\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P} = 1$.

Ainsi il existe $x \in X$ avec $\mathfrak{P}_n \otimes \mathcal{O}_{X,x} \subsetneq \mathfrak{L}^n_x$, ceci implique $\mathfrak{P}_n \otimes \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathfrak{M}_x \mathfrak{L}^n_x$. Soit $\mathfrak{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à x, montrons qu'il existe $m \geqslant 1$ avec $\mathfrak{P}_n \mathfrak{L}^m(X) = \mathfrak{J}\mathfrak{L}^{m+n}(X)$. On a la suite exacte $0 \to \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n \to \mathfrak{L}^n \to \mathfrak{L}^n/\mathfrak{J}\mathfrak{L}^n \to 0$, il existe m tel que $H^1(X, \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n \otimes \mathfrak{L}^m) = 0$, on a donc la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n \otimes \mathfrak{L}^m(X) \to \mathfrak{L}^{n+m}(X) \xrightarrow{\beta} (\mathfrak{L}^n/\mathfrak{J}\mathfrak{L}^n) \otimes \mathfrak{L}^m(X) \to 0 .$$

Clairement $\beta(\mathfrak{P}_n \mathfrak{L}^m(X)) = 0$ parce que la fibre en x est nulle; on a donc $\mathfrak{P}_n \mathfrak{L}^m(X) \subset \mathfrak{J}\mathfrak{L}^{n+m}(X)$. Soit $\mathfrak{P}_x = \bigoplus_n \mathfrak{J}\mathfrak{L}^n(X)$, il existe $a \in A - \mathfrak{P}_x$ avec degre $(a) = 1$ parce que $\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P}_x = 1$. Soit p_i un générateur homogène de $\mathfrak{P}$ avec degre $(p_i) = \alpha_i \leqslant n$. On a $p_i a^{n+m-\alpha_i} \in \mathfrak{P}_x \mathfrak{L}^m(X) = \mathfrak{J}\mathfrak{L}^{n+m}(X) \subset \mathfrak{P}_x$; il suit que $p_i \in \mathfrak{P}_x$, donc que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_x$. Or $\dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P} = \dim \operatorname{alg}_k A/\mathfrak{P}_x = 1$ implique $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_x$. Ce qui montre que φ est surjectif.

Soient $f_0, f_1, \ldots, f_n$ une base de $\mathfrak{L}(X)$ sur k, $\psi\colon k[T_0, T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{O}_Z(D_+(f_i)) = A_{(f_i)}$ l'homomorphisme surjectif défini par $\psi(T_j) = f_j/f_i$ (en effet $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \ldots$ est engendré sur k par $f_0, f_1, \ldots, f_n$), et $\mathfrak{A} = \ker \psi$. Soit $Z_i = \{z \in D_+(f_i)\colon |f_j/f_i(z)| \leqslant 1,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$, alors on a par définition

$$\mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}(Z_i) = \frac{k\langle T_0, T_1, \ldots, T_n\rangle}{\mathfrak{A}k\langle T_0, \ldots, T_n\rangle} .$$

β) *Soit $W \subset \varphi^{-1}(Z_i)$ un admissible affinoïde de X. Alors il existe un homomorphisme unique $\varrho\colon \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(Z_i) \to \mathcal{O}_X(W)$ tel que $\varrho(f_j/f_i) = u_j$ où u_j est l'unique élément de $\mathcal{O}_X(W)$ tel que $f_{j|W} = u_j f_{i|W}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.*

Soit $x \in W \subset \varphi^{-1}(Z_i)$, on a donc $f_i \notin \mathfrak{J}\mathfrak{L}(X)$ ($\mathfrak{J}$ associé à x), ce qui veut dire que f_{ix} est une base de $\mathfrak{L}_x$ pour tout $x \in W$; il suit facilement que $f_{i|W}$ est une base de $\mathfrak{L}(W)$, ainsi il existe $u_j \in \mathcal{O}_X(W)$ avec $f_{j|W} = u_j \cdot f_{i|W}$.

Montrons que $|f_j/f_i(\varphi(x))| \leqslant 1$ implique $|u_j(x)| \leqslant 1$. Puisque $|f_j/f_i(\varphi(x))| \leqslant 1$, il existe

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1} \in k^0$, $v \in \mathfrak{J}\mathfrak{L}^m(X)$ avec $a_0 + a_1 f_j/f_i + \ldots + a_{r-1}(f_j/f_i)^{r-1} + (f_j/f_i)^r = v/f_i^m$ dans $A_{(f_i)}$. On a

(1) $t \geqslant 0$ avec $f_i^t(f_i^m(a_0 f_i^r + a_1 f_i^{r-1} f_j + \ldots + f_j^r) - v f_i^r) = 0$ dans A (donc dans $\mathfrak{L}^{t+m+r}(X)$). Comme f_{i_x} est une base de $\mathfrak{L}_x$, $f_{i_x}^m$ est une base de $\mathfrak{L}_x^m$, ainsi $v_x = \omega f_{i_x}^m$ où $\omega \in \mathfrak{M}_x$ ($v \in \mathfrak{J}\mathfrak{L}^m(X)$). Ainsi (1) s'écrit $(a_0 + a_1 u_{j_x} + \ldots + u_{j_x}^r - \omega) f_{i_x}^{t+m+r} = 0$; i.e. $a_0 + a_1 u_{j_x} + \ldots + u_{j_x}^r - \omega = 0$ ($f_{i_x}^{t+m+r}$ est une base de $\mathfrak{L}_x^{t+m+r}$). On a donc $a_0 + a_1 u_j(x) + \ldots + u_j(x)^r = 0$, soit $|u_j(x)| \leqslant 1$.

Soient $\Phi\colon k[T_0, \ldots, T_n] \to \mathcal{O}_X(W)$ défini par $\Phi(T_j) = u_j$, $P(T_0, \ldots, T_n) \in \mathfrak{A} = \ker \psi$. On a $f_i^{m+s} P(f_0/f_i, \ldots, f_n/f_i) = 0$ dans $\mathfrak{L}^{m+s}(X)$ pour $m \gg 0$ et $s = \deg_{\text{total}} P$. Ceci veut dire que $P(u_0, u_1, \ldots, u_n) f_{i|W}^{m+s} = 0$ et donc $\Phi(P) = P(u_0, \ldots, u_n) = 0$; on a donc $\Phi(\mathfrak{A}) = 0$. Comme $\|\Phi(T_j)\|_{\text{SP}}^W = \|u_j\|_{\text{SP}}^W \leqslant 1$, Φ induit un homomorphisme $\varrho\colon \mathcal{O}_{Z_{\text{an}}}(Z_i) \to \mathcal{O}_X(W)$.

γ) *On a* $\operatorname{Spm} \varrho = \varphi|_W$ *et* $\operatorname{Spm} \varrho\colon W \to Z_i$ *est une immersion injective et ouverte.*

Soient $x \in W$, $\mathfrak{M}_x$ le maximal de $\mathcal{O}_X(W)$, $\mathfrak{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à x et $P[T_0, \ldots, T_n]$ tel que $P(u_0, \ldots, u_n) \in \mathfrak{M}_x$. Il existe donc $m \gg 0$ tel que $f_i^{m+s} P(f_0/f_i, \ldots, f_n/f_i) \in \mathfrak{J}\mathfrak{L}^{m+s}(X)$; ce qui veut dire que $\operatorname{Spm} \varrho(x) = \varphi(x)$.

Soient $\mathcal{O}_Z(D_+(f_i)) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{Z_{\text{an}}}(Z_i) \to \mathcal{O}_X(W)$, i est l'homomorphisme canonique, $x \in W$, $\mathfrak{M}_x$ le maximal correspondant de $\mathcal{O}_X(W)$, $\mathfrak{M}' = \varrho^{-1}(\mathfrak{M}_x)$, $\mathfrak{M} = (\varrho \circ i)^{-1}(\mathfrak{M}_x)$. On sait que i induit un isomorphisme $\mathcal{O}_Z(D_+(f_i))/\mathfrak{M}^\alpha \simeq \mathcal{O}_{Z_{\text{an}}}(Z_i)/\mathfrak{M}'^\alpha$.

Montrons que $\varrho \circ i$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_Z(D_+(f_i))/\mathfrak{M}^\alpha$ sur $\mathcal{O}_X(W)/\mathfrak{M}_x^\alpha$. Soit toujours $\mathfrak{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux correspondant à x. Soit la suite exacte $0 \to \mathfrak{J}^\alpha \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}^\alpha \to 0$. Pour $n \gg 0$ on a $H^1(X, \mathfrak{J}^\alpha \otimes \mathfrak{L}^n) = 0$ (c'est d)); ainsi on a a suite exacte

$$0 \to \mathfrak{J}^\alpha \mathfrak{L}^n(X) \to \mathfrak{L}^n(X) \to \frac{\mathfrak{L}^n}{\mathfrak{J}^\alpha \mathfrak{L}^n}(X) \to 0 . \tag{1}$$

De plus pour $n_1 \gg 0, \ldots, n_\alpha \gg 0$ (lemme 8, 2), ci-après)

(2) l'homomorphisme canonique $\mathfrak{J}\mathfrak{L}^{n_1}(X) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{J}\mathfrak{L}^{n_\alpha}(X) \to \mathfrak{J}^\alpha \mathfrak{L}^{n_1 + \ldots + n_\alpha}(X)$ est surjectif.

Soit $g \in \mathcal{O}_X(W)/\mathfrak{M}_x^\alpha = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x^\alpha \mathcal{O}_{X,x}$; on a $(\mathfrak{L}^n/\mathfrak{J}^\alpha \mathfrak{L}^n)(X) = \mathfrak{L}_x^n/\mathfrak{M}_x^\alpha \mathfrak{L}_x^n$ ainsi il existe $h \in \mathfrak{L}^n(X)$ dont l'image par v est $g \cdot f_{ix}^n$. Il est alors clair que h/f_i^n a pour image g dans $\mathcal{O}_X(W)/\mathfrak{M}_x^\alpha$.

Soit $g \in \mathcal{O}_X(D_+(f_i))$ tel que $\varrho(g) \in \mathfrak{M}_x^\alpha$. On a $g = P(f_0/f_i, \ldots, f_n/f_i)$ et pour $m \gg 0$, $f_i^{m+s} g \in \mathfrak{L}^{m+s}(X)$, par suite $f_i^{m+s} g \in \mathfrak{J}^\alpha \mathfrak{L}^{m+s}(X)$ parce que $(f_i^{m+s} g)_x = (f_i^{m+s})_x (P(u_0, \ldots, u_n))_x$ et que $P(u_0, \ldots, u_n) \in \mathfrak{M}_x^\alpha$. Il suit alors de (2) que $f_i^m g = \sum f_i^{m_1} g_1 \times \ldots \times f_i^{m_\alpha} g_\alpha$ où $f_i^{m_\nu} g_\nu \in \mathfrak{L}^{m_\nu + s_\nu}(X)$. On a donc $g \in \mathfrak{M}^\alpha$.

Il suit donc que ϱ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Z_{\text{an}}}(Z_i)/\mathfrak{M}'^\alpha$ sur $\mathcal{O}_X(W)/\mathfrak{M}^\alpha$. Par suite le théorème de GERRITZEN et GRAUERT ([Ge, Gr]; [BGR], p. 309) montre que Spm $\varrho\colon W \to Z_i$ est une immersion ouverte et injective (parce que φ est injectif).

δ) *$\varphi^{-1}(Z_i)$ est réunion finie d'affinoïdes.*

Soit U un affinoïde admissible de X, il suffit de montrer que $U \cap \varphi^{-1}(Z_i)$ est réunion finie de parties rationnelles de U (X est quasi-compact).

Soient $U_i = U \cap \varphi^{-1}(Z_i)$, $U_i' = \{x \in U\colon f_i \text{ engendre } \mathcal{L}_x\}$. Montrons que U_i' est un ouvert de Zariski de U. Soient $x \in U_i'$, $B = \mathcal{O}_X(U)$ et $\mathfrak{M}$ le maximal de B associé à x. On a $\mathcal{L}(U) \otimes_B \mathcal{O}_{X,x} = (\mathcal{O}_X(U) f_{i|U}) \otimes_B \mathcal{O}_{X,x}$ et donc $\mathcal{L}(U) \otimes_B B_{\mathfrak{M}} = (A f_{i|U}) \otimes_B B_{\mathfrak{M}}$ ($B_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est fidèlement plat). Ceci montre que U_i' est un ouvert de Zariski, il existe donc un idéal $\mathfrak{A}$ de B avec $U - U_i' = V(\mathfrak{A})$. Soient $j \neq i$, $V_j \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in U\colon f_j$ engendre $\mathcal{L}_x$ et $|(f_i/f_j)(x)| < 1\}$ (si f_j engendre $\mathcal{L}_x$, on a $f_i = u f_j$ dans $\mathcal{L}_x$, $u \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $|f_i/f_j(x)| < 1$ veut dire $|u(x)| < 1$). On a donc $V(\mathfrak{A}) \subset \bigcup_{j \neq i} V_j$, $U_i \cap \Big(\bigcup_{j \neq i} V_j\Big) \neq \phi$. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_r \in \mathfrak{A}$ avec $\mathfrak{A} = g_1 B + \ldots + g_r B$, il existe $\pi \in k^\times$ tel que $W_0 \subset \bigcup_{j \neq u} V_j$ avec $W_0 = \{x \in U\colon |g_t(x)| \leqslant |\pi|, 1 \leqslant t \leqslant r\}$ ([Fr], ex. 3, p. 123). Soient $g_0 = \pi$, $W_l = \{x \in U\colon |g_t(x)| \leqslant |g_l(x)|, 0 \leqslant t \leqslant r\}$, $0 \leqslant l \leqslant r$. On a $U_i \subset \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} W_l$ et $V(\mathfrak{A}) \cap \Big(\bigcup_{l > 0} W_l\Big) = \emptyset$. Soit $l > 0$, alors il existe $u_j \in \mathcal{O}_X(W_l)$ tel que $f_{j|W_l} = u_j f_{i|W_l}$; ceci montre que $U_i \cap W_l = \{x \in \in W_l\colon |u_j(x)| \leqslant 1, 0 \leqslant j \leqslant n\}$, ainsi $U_j \cap W_l$ est une partie rationnelle de W_l. Comme W_l est une partie rationnelle de U, il suit que U_i est réunion finie d'admissibles affinoïdes de X.

ε) *L'application $\varphi\colon X \to Z$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques.*

Il suit facilement de δ) que Z_i admet un recouvrement affinoïde admissible fini $\{Z_{ij}\}$, que $\varphi^{-1}(Z_{ij})$ est affinoïde admissible de X et que $\{\varphi^{-1}(Z_{ij})\}_{i,j}$ est un recouvrement admissible de X. Par γ) l'homomorphisme $\varrho\colon \mathcal{O}_{Z^{\text{an}}}(Z_i) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(Z_{ij}))$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Z^{\text{an}}}(Z_{ij})$ sur $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(Z_{ij}))$. Il suit de la définition de ϱ (γ)) que ces isomorphismes coïncident sur $Z_{ij} \cap Z_{i',j'}$. Ce qui montre que φ induit un isomorphisme de X sur Z^{an}.

COROLLAIRE 1. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique quasi-compact sur k, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X avec les propriétés suivantes*

a) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X)$ est de dimension finie.

b) Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ il existe n_0 (dépendant de $\mathcal{F}$) tel que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour tout $i > 0$ et $n \geqslant n_0$.

Alors X est projectif.

DÉMONSTRATION. – C'est une conséquence du théorème 7 et du lemme 8 ci-après.

COROLLAIRE 2. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique propre* *sur k, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X avec la propriété suivante: pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ il existe n_0 tel que $H^i(X, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour tout $i > 0$ et $n \geqslant n_0$.*

Alors X est projectif.

DÉMONSTRATION. – En effet X propre sur k implique que la condition a) du corollaire 1 est satisfaite ([Ki 3]; [BGR], theorem 1, p. 397). Ainsi le corollaire 1 montre le corollaire 2.

LEMME 8. – *Soient k un corps valué complet, X un espace analytique quasi-compact, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. On suppose que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X il existe un entier n_0 (dépendant de $\mathcal{F}$) tel que $H^i(X, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout $n \geqslant n_0$.*

1) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent. Alors il existe un entier n_1 (dépendant de $\mathcal{F}$) tel que $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n$ soit engendré par ses sections globales pour tout $n \geqslant n_1$.*

On suppose en plus que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ que $\mathcal{F}(X)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

2) *Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ des faisceaux cohérents, alors il existe n_2 (dépendant de $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$) tel que l'homomorphisme canonique $(\mathcal{F}_1\otimes \mathcal{L}^{m_1}(X))\otimes \ldots \otimes (\mathcal{F}_r\otimes \mathcal{L}^{m_r}(X)) \to \mathcal{F}_1\otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_r\otimes \mathcal{L}^{m_1+\ldots+m_r}(X)$ soit surjectif pour tout $m_i \geqslant n_2$.*

DÉMONSTRATION. – 1) Soient $U \subset X$ un affinoïde, $x \in U$, $\mathfrak{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à x, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent on a la suite exacte $0 \to \mathfrak{J}\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}\otimes \mathcal{O}_X/\mathfrak{J} \to 0$. Soit n_0 tel que $H^1(X, \mathfrak{J}\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $n \geqslant n_0$. Ainsi l'homomorphisme $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(X) \to \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n\otimes \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}(X)$ est surjectif; comme $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n\otimes \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}(X) = (\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)_x/\mathfrak{M}_x(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)_x$, il suit par Nakayama que l'homomorphisme $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(X)\otimes \mathcal{O}_{X,x} \to (\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)_x$ est surjectif. Soient $M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)$ l'image de $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(X)\otimes \mathcal{O}_X(U)$ dans $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(U)$, $A = \mathcal{O}_X(U)$, $\mathfrak{M}$ le maximal de A associé à x. On a donc $M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)\otimes_A \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(U)\otimes_A \mathcal{O}_{X,x}$ et donc $M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)\otimes A_{\mathfrak{M}} = \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(U)\otimes A_{\mathfrak{M}}$ ($A_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est fidèlement plat). De même pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ il existe n_1 avec $M(\mathcal{L}^{n_1})\otimes A_{\mathfrak{M}} = \mathcal{L}^{n_1}(U)\otimes A_{\mathfrak{M}}$. Il existe donc $g_x \in A - \mathfrak{M}$ tel que

$$M(\mathcal{L}^{n_1})\otimes Ag_x = \mathcal{L}^{n_1}(U)\otimes Ag_x\,, \qquad M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^{n_0+r})\otimes Ag_x = \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^{n_0+r}(U)\otimes Ag_x$$

pour $0 \leqslant r < n_1$. En écrivant $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n = (\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^{n_0+r})\otimes (\mathcal{L}^{n_1})^m$ on a $M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n)\otimes Ag_x = \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(U)\otimes Ag_x$ pour tou $n \geqslant n_0$. Comme un nombre fini d'ouverts de Zariski $D(g_x)$ recouvrent U (qui est noethérien), il existe n_2 avec $M(\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n) = \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n(U)$ pour tout $n \geqslant n_2$.

Enfin comme X est quasi-compact il existe n_3 tel que $\mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^n$ soit engendré par ses sections globales pour tout $n \geqslant n_3$.

2) α) *Soit $\mathcal{F}$ cohérent engendré par ses sections globales. Alors il existe r_0 tel que l'homomorphisme $\mathcal{F}(X)\otimes \mathcal{L}^r(X) \to \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^r(X)$ soit surjectif pour $r \geqslant r_0$.*

Soit $\alpha = \dim_k \mathcal{F}(X)$, il existe une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_X^\alpha \to \mathcal{F} \to 0$ telle que $\mathcal{O}_X(X)^\alpha \to \mathcal{F}(X)$ soit surjectif. Il existe r_0 avec $H^1(X, \mathcal{N}\otimes \mathcal{L}^r) = 0$ pour $r \geqslant r_0$; ainsi $\mathcal{O}_X^\alpha \otimes \mathcal{L}^r(X) \to \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^r(X)$ est surjectif. D'où il suit que $\mathcal{F}(X)\otimes \mathcal{L}^r(X) \to \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}^r(X)$ est surjectif.

β) *Il existe $r_1 \geqslant 0$ tel que $\mathcal{L}^{r'}(X)\otimes \mathcal{L}^{r''}(X) \to \mathcal{L}^{r'+r''}(X)$ soit surjectif pour tout $r' \geqslant r_1$, $r'' \geqslant r_1$.*

Par 1) il existe t_1 tel que $\mathcal{L}^t$ soit engendré par ses sections globales pour $t \geqslant t_1$. Par α) il existe r_0 tel que $\mathcal{L}^t(X)\otimes \mathcal{L}^r(X) \to \mathcal{L}^{t+r}(X)$ soit surjectif pour $r \geqslant r_0$ et $t_1 \leqslant t < 2t_1$. Soit $r_1 = \max(t_1, r_0)$, il est facile de montrer que $\mathcal{L}^{r'}(X)\otimes \mathcal{L}^{r''}(X) \to \mathcal{L}^{r'+r''}(X)$ est surjectif pour $r' \geqslant r_1$, $r'' \geqslant r_1$.

γ) *Soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ deux faisceaux cohérents engendrés par leurs sections globales. Alors il existe r_2 tel que $(\mathcal{F}_1\otimes \mathcal{L}^{r'}(X))\otimes(\mathcal{F}_2\otimes \mathcal{L}^{r''}(X)) \to \mathcal{F}_1\otimes \mathcal{F}_2\otimes \mathcal{L}^{r'+r''}(X)$ soit surjectif pour tout $r' \geqslant r_2$, $r'' \geqslant r_2$.*

Soit $\alpha_i = \dim_k \mathcal{F}_i(X)$, il existe une suite exacte $0 \to \mathcal{N}_i \to \mathcal{O}_X^{\alpha_i} \to \mathcal{F}_i \to 0$ avec $\mathcal{O}_X^{\alpha_i}(X) \to \mathcal{F}_i(X)$ surjectif. Il existe r_2 tel que $H^1(X, \mathcal{N}_1\otimes\mathcal{N}_2\otimes \mathcal{L}^r) = 0$ pour $r \geqslant r_2$, ainsi $\mathcal{O}_X^{\alpha_1}\otimes \mathcal{O}_X^{\alpha_2}\otimes \mathcal{L}^r(X) \to \mathcal{F}_1\otimes \mathcal{F}_2\otimes \mathcal{L}^r(X)$ est surjectif. Soient r', r'' avec $r' + r'' \geqslant r_2$, $r' \geqslant r_1$, $r'' \geqslant r$, (r_1 défini en β)), il suit de β) que $(\mathcal{O}_X^{\alpha_1}\otimes \mathcal{L}^{r'}(X))\otimes(\mathcal{O}_X^{\alpha_2}\otimes \mathcal{L}^{r''}(X)) \to$ $\to \mathcal{O}_X^{\alpha_1}\otimes \mathcal{O}_X^{\alpha_2}\otimes \mathcal{L}^{r'+r''}(X)$ est surjectif. Ce qui montre γ) pour $r' \geqslant \max(r_1, r_2)$, $r'' \geqslant$ $\geqslant \max(r_1, r_2)$.

δ) *Le cas général.*

Soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, cohérents, il existe n_i tel que $\mathcal{F}_i\otimes \mathcal{L}^{n_i}$ soit engendré par ses sections globables (c'est 1)). Ainsi γ) montre que 2) est vrai pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Le cas général se déduit par récurrence.

PROPOSITION 11. – *Soient k un corps valué complet, K le complété de la clôture algébrique de k, X un espace analytique sur k pur de dimension* 1. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *X est projectif;*

ii) *X_{red} est projectif;*

iii) *$X_{(K)}$ est projectif;*

iv) *$(X_{\mathrm{red}})'$ est projectif $((X_{\mathrm{red}})'$ est la normalisation de $X_{\mathrm{red}})$.*

DÉMONSTRATION. – α) *Supposons* i) *satisfait.* On a donc $X = Z^{\mathrm{an}}$ où Z est une variété algébrique projective. Comme $(Z^{\mathrm{an}})_{\mathrm{red}} = (Z_{\mathrm{red}})^{\mathrm{an}}$, $(Z^{\mathrm{an}})_{(K)} = (Z_{(K)})^{\mathrm{an}}$, $((Z^{\mathrm{an}})_{\mathrm{red}})' =$ $= ((Z_{\mathrm{red}})')^{\mathrm{an}}$, il suit alors de ([Ha 1], § 4, p. 23) que ii), iii), iv) sont satisfaits.

β) *Supposons* ii) *ou* iii) *ou* iv) *satisfaits.* On déduit de cette hypothèse que X est quasi-compact.

Soit $D = \{(U_i, f_i)\}_i$ un diviseur de Cartier sur X (définition § 2.3) avec la propriété suivante:

(*) Pour tout i on a $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et pour toute composante irréductible Y de X il existe un indice i tel que f_i ait (au moins) un zéro sur $Y \cap U_i$.

Notons $\mathcal{L}(D)$ le faisceau inversible sur X associé à D.
Soient g_i l'image de f_i dans $\mathcal{O}_X(U_i)_{\mathrm{red}} = \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(U_i)$,

(1) $D_{\mathrm{red}} = \{U_{i\,\mathrm{red}}, g_i\}_i$, c'est un diviseur de Cartier sur X_{red}. Alors D_{red} possède aussi la propriété (*) et $\mathcal{L}(D_{\mathrm{red}}) = i^*\mathcal{L}(D)$ où $i\colon X_{\mathrm{red}} \to X$ est le morphisme canonique.

(2) Soit $D_{(K)} = \{(U_{i(K)}, f_i \otimes 1)\}_i$, c'est un diviseur de Cartier sur $X_{(K)}$ qui possède aussi la propriété (*) (proposition 8, § 3.1, lemme 6, § 3.2).

(3) Supposons X réduit. Soit $\varphi\colon X' \to X$ la normalisation de X et $D' = \{(U'_i, f_i)\}$; c'est un diviseur de Cartier sur X' qui possède la propriété (*) et $\mathcal{L}(D') = \varphi^*\mathcal{L}(D)$.

(4) Supposons X_{red} projectif, il suit de (1), de la proposition 9 et du corollaire 1 que X est projectif.

(5) Supposons X réduit et X' projectif, il suit de (3), de la proposition 10 et du corollaire 1 que X est projectif.

(6) Supposons $X_{(K)}$ projectif, il suit de (2) que $\mathcal{L}(D_{(K)})$ est ample. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, $\mathcal{F}_{(K)}$ le faisceau cohérent sur $X_{(K)}$ défini par $\mathcal{F}_{(K)}(U_{(K)}) = \mathcal{F}(U)\,\widehat{\otimes}_k K$ pour tout affinoïde admissible U de X (comme $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module fini c'est un $\mathcal{O}_X(U)$-module de Banach, donc un k-espace de Banach). On a donc $H^i(X_{(K)}, \mathcal{F}_{(K)} \otimes \mathcal{L}(D_{(K)})^n) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout $n \gg 0$. Comme X est quasi-compact on peut extraire d'un recouvrement admissible affinoïde un recouvrement $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Ainsi la suite

$$\bigoplus_i \mathcal{F}_{(K)} \otimes \mathcal{L}(D_{(K)})^n(U_{i(K)}) \to \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}_{(K)} \otimes \mathcal{L}(D_{(K)})^n(U_{i(K)} \cap U_{j(K)}) \to$$
$$\to \bigoplus_{i,j,k} \mathcal{F}_{(K)} \otimes \mathcal{L}(D_{(K)})(U_{i(K)} \cap U_{j(K)} \cap U_{k(K)}) \to \ldots$$

est exacte. Comme $\mathcal{F}\widehat{\otimes}_k K$ est «fidèlement plat» la suite

$$\bigoplus_i \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(D)^n(U_i) \to \bigoplus_{i,j} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(D)^n(U_i \cap U_j) \to \bigoplus_{i,j,k} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(D)^n(U_i \cap U_j \cap U_k) \to \ldots$$

est exacte, i.e. $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n(D)) = 0$ pour $i > 0$ et pour tout $n \gg 0$. Ce qui veut dire que $\mathcal{L}(D)$ est ample.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, alors la suite exacte $0 \to \mathcal{F}(X) \to \bigoplus_i \mathcal{F}(U_i) \to$ $\to \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ implique la suite exacte $0 \to \mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_k K \to \bigoplus_i \mathcal{F}_{(K)}(U_{i(K)}) \to \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}_{(K)}(U_{i(K)} \cap U_{j(K)})$. Ainsi $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_k K = \mathcal{F}_{(K)}(X_{(K)})$, c'est un K-espace vectoriel de dimension finie. Il suit alors de la « fidèle platitude » de $\cdot \widehat{\otimes}_k K$ que $\mathcal{F}(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Puisque X est quasi-compact, $\mathcal{L}(D)$ ample et $\mathcal{F}(X)$ de dimension finie pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, il suit du corollaire 1 que X est projectif.

Ainsi ii) implique i) est (4), iii) implique i) est (6), iv) implique i) est (5) et (4).

BIBLIOGRAPHIE

[Bo 1] S. BOSCH, *k-affinoide Tori*, Math. Ann., **192** (1971), pp. 1-16.

[Bo 2] S. BOSCH, *k-affinoide Gruppen*, Inv. Math., **10** (1970), pp. 128-176.

[Bo 3] S. BOSCH, *Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme*, Manuscripta Math., **20** (1977), pp. 1-27.

[Bo 4] S. BOSCH, *Meromorphic functions on proper rigid varieties*, Sém. Th. des Nombres de Bordeaux, 1982-1983, exp. 34.

[Bo 5] S. BOSCH, *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Raüme*, Math. Ann., **229** (1977), pp. 25-45.

[Bo, Lu] S. BOSCH - W. LÜTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann., **270** (1985), pp. 349-379.

[BGR] S. BOSCH - U. GÜNTZER - R. REMMERT, *Non-archimedean analysis*, Grund. der math. 261, Springer-Verlag, 1984.

[Fi] K. H. FIESELER, *Zariski's Main Theorem für affinoide Kurven*, Math. Ann., **251** (1980), pp. 97-110.

[Fr] J. FRESNEL, *Géométrie analytique rigide*, Polycopié, Université de Bordeaux I, 1984.

[Fr, vdP] J. FRESNEL - M. VAN DER PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math. 18, Birkhäuser, 1981.

[Ge, vdP] L. GERRITZEN - M. VAN DER PUT, *Schottky groups and Mumford curves*, L. N. 817, Springer, 1980.

[Ge, Gr] L. GERRITZEN - H. GRAUERT, *Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen. Global analysis*, Papers in honour of Kodaira, Univ. of Tokyo press, 1969, Ed. par Spencer et Yanaga.

[Gr] H. GRAUERT, *Affinoide Überdeckungen eindimensionaler affinoider Raüme*, 1968, Publ. I.H.E.S. no. 34, pp. 5-36.

[Gr, D] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. I.H.E.S. no. 24, 1965.

[Ha 1] R. HARTSHORNE, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, L. N. 156, Springer, 1970.

[Ha 2] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Grad. texts in math., Springer, 1977.

[Ki 1] R. KIEHL, *Die analytische Normalität affinoider Ringe*, Arch. Math., **18** (1967), pp. 479-484.

[Ki 2] R. KIEHL, *Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie* J. Reine Ang. Math., **234** (1969), pp. 89-98.

[Ki 3] R. KIEHL, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inv. Math., **2** (1967), pp. 191-214.

[Ko] U. KÖPF, *Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Raüme,* Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **2**, Serie Heft 7 (1974).

[Li] Q. LIU, *Ouverts analytiques d'une courbe projective sur un corps valué complet ultra-métrique algébriquement clos* (à paraître).

[Ma] H. MATSUMURA, *Commutative algebra,* Benjamin, 1980.

[Me] F. MEHLMANN, *Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren,* Schriftenreihe, Math. Inst. Univ. Münster, **2**, Serie Heft 19 (1981).

[Mo] A. F. MONNA, *Analyse non-archimédienne,* Erg. der math., **56**, Springer (1970).

[vdP 1] M. VAN DER PUT, *The class group of a one-dimensional affinoid space,* Ann. Inst. Fourier, **30**, no. 4 (1980), pp. 155-164.

[vdP 2] M. VAN DER PUT, *Stable reductions of algebraic curves,* Proc. Konink. Ned. Ak., serie A, **87** (1984), pp. 461-478.

[Se] J.-P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier, **6** (1956), pp. 1-42.

[Ta] J. TATE, *Rigid analytic spaces,* Inv. Math., **12** (1971), pp. 257-289.