

Géométrie différentielle 2018-2019

Licence de mathématiques fondamentales

Pierre Mounoud

Le poly se trouve ici

www.math.u-bordeaux.fr/~pmounoud/tds/chap1_2017.pdf

Les définitions

Définition 1

On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de \mathbf{R}^n , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans \mathbf{R}^n .

Les définitions

Définition 1

On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de \mathbf{R}^n , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans \mathbf{R}^n .

Mais ce n'est pas tant la façon de parcourir le chemin qui nous intéresse que le chemin lui-même. D'où la définition suivante :

Les définitions

Définition 1

On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de \mathbf{R}^n , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans \mathbf{R}^n .

Mais ce n'est pas tant la façon de parcourir le chemin qui nous intéresse que le chemin lui-même. D'où la définition suivante :

Définition 2

On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (de classe C^k) si il existe un difféomorphisme θ de J dans I de classe C^k tel que $g = f \circ \theta$.

Les définitions

Définition 1

On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de \mathbf{R}^n , un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans \mathbf{R}^n .

Mais ce n'est pas tant la façon de parcourir le chemin qui nous intéresse que le chemin lui-même. D'où la définition suivante :

Définition 2

On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (de classe C^k) A s'il existe un difféomorphisme θ de J dans I de classe C^k tel que $g = f \circ \theta$.

On dit que A est un arc géométrique paramétré par (I, f) (ou (J, g)) et que θ est un changement de paramétrage.

Deux arcs géométriques différents de même support.

Le sous-ensemble $f(I) \subset \mathbf{R}^n$ est appelé le *support* de A .

Deux arcs géométriques différents de même support.

Le sous-ensemble $f(I) \subset \mathbf{R}^n$ est appelé le *support* de A .
La donnée de A n'est pas équivalente à celle de $f(I)$.

Définition 3

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage *croissant*.

Définition 3

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage *croissant*.

Autrement dit, un arc géométrique orienté est un arc géométrique muni d'un sens de parcours.

Définition 3

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage *croissant*.

Autrement dit, un arc géométrique orienté est un arc géométrique muni d'un sens de parcours.

Remarque : La relation « (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (orienté ou non) » est une relation d'équivalence sur l'espace des arcs paramétrés.

Définition 3

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage *croissant*.

Autrement dit, un arc géométrique orienté est un arc géométrique muni d'un sens de parcours.

Remarque : La relation « (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (orienté ou non) » est une relation d'équivalence sur l'espace des arcs paramétrés.

Un arc géométrique (orienté ou non) est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés.

De même, un point d'une arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

De même, un point d'une arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

Définition 4

Un point p d'un arc géométrique A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est un paramétrage de A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage θ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$.

L'élément $f(t) = g(s)$ de \mathbf{R}^n est l'image du point.

De même, un point d'une arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

Définition 4

Un point p d'un arc géométrique A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est un paramétrage de A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage θ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$.

L'élément $f(t) = g(s)$ de \mathbf{R}^n est l'image du point.

La notation (I, f, t) étant trop lourde, on dira simplement soit $p = f(t)$ un point de A .

On fera attention cependant à ne pas confondre un point et son image.

De même, un point d'une arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

Définition 4

Un point p d'un arc géométrique A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est un paramétrage de A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage θ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$.

L'élément $f(t) = g(s)$ de \mathbf{R}^n est l'image du point.

La notation (I, f, t) étant trop lourde, on dira simplement soit $p = f(t)$ un point de A .

On fera attention cependant à ne pas confondre un point et son image.

Dans la suite on va s'intéresser aux propriétés des arcs géométriques, c'est-à-dire aux propriétés des arcs paramétrés invariantes par changement de paramètre.

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que et $p = f(t)$.

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que $p = f(t)$.

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point *régulier* de A . Cette propriété ne dépend pas du choix de (I, f) .

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que $p = f(t)$.

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point *régulier* de A . Cette propriété ne dépend pas du choix de (I, f) .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la *tangente* en p à A . Cette droite ne dépend pas du choix de (I, f) .

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que $p = f(t)$.

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point *régulier* de A . Cette propriété ne dépend pas du choix de (I, f) .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la *tangente* en p à A . Cette droite ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont réguliers, on dit que A est *régulier*.

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que $p = f(t)$.

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point *régulier* de A . Cette propriété ne dépend pas du choix de (I, f) .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la *tangente* en p à A . Cette droite ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont réguliers, on dit que A est *régulier*.

Preuve : Soit $(I, f) \sim (J, g)$ et θ le difféo tel que $g = f \circ \theta$. Soit $s \in J$ tel que $t = \theta(s)$. On a donc $p = f(t) = g(s)$ et

$$g'(s) = (f \circ \theta)'(s) = \theta'(s)f'(\theta(s)) = \underbrace{\theta'(s)}_{\neq 0} f'(t).$$

Points réguliers et tangente

Proposition-définition 5

Soient A un arc géométrique et p un point de A .

Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tels que $p = f(t)$.

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point *régulier* de A . Cette propriété ne dépend pas du choix de (I, f) .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la *tangente* en p à A . Cette droite ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont réguliers, on dit que A est *régulier*.

Preuve : Soit $(I, f) \sim (J, g)$ et θ le difféo tel que $g = f \circ \theta$. Soit $s \in J$ tel que $t = \theta(s)$. On a donc $p = f(t) = g(s)$ et

$$g'(s) = (f \circ \theta)'(s) = \theta'(s)f'(\theta(s)) = \underbrace{\theta'(s)}_{\neq 0} f'(t). \quad \square$$

Dans la suite, on va souvent se limiter à l'étude des arcs réguliers. D'une part cela va exclure les points de rebroussement et autres singularités et d'autre part cela va limiter beaucoup le nombre d'arcs ayant un même support.

Dans la suite, on va souvent se limiter à l'étude des arcs réguliers. D'une part cela va exclure les points de rebroussement et autres singularités et d'autre part cela va limiter beaucoup le nombre d'arcs ayant un même support.

Exercice 1 (voir TD)

- Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ et $(I =]-1, 1[, f)$ un paramétrage d'un arc régulier. Montrer que si $0 \in I$ et si $k \neq k'$ alors $(I, f(t^{2k+1}))$ et $(I, f(t^{2k'+1}))$ ne définissent pas le même arc géométrique.

Dans la suite, on va souvent se limiter à l'étude des arcs réguliers.

D'une part cela va exclure les points de rebroussement et autres singularités et d'autre part cela va limiter beaucoup le nombre d'arcs ayant un même support.

Exercice 1 (voir TD)

- Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ et $(I =]-1, 1[, f)$ un paramétrage d'un arc régulier. Montrer que si $0 \in I$ et si $k \neq k'$ alors $(I, f(t^{2k+1}))$ et $(I, f(t^{2k'+1}))$ ne définissent pas le même arc géométrique.
- Soient A et B deux arcs géométriques *réguliers* dont le support est $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$. Montrer que $A = B$.

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le *plan osculateur* à A au point p . Il ne dépend pas du choix de (I, f) .

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le *plan osculateur* à A au point p . Il ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit birégulier.

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le *plan osculateur* à A au point p . Il ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit birégulier.

Preuve : Soit $(I, f) \sim (J, g)$ et θ le difféo tel que $g = f \circ \theta$. Soit $s \in J$ tel que $t = \theta(s)$.

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le *plan osculateur* à A au point p . Il ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit birégulier.

Preuve : Soit $(I, f) \sim (J, g)$ et θ le difféo tel que $g = f \circ \theta$. Soit $s \in J$ tel que $t = \theta(s)$. On a donc $p = f(t) = g(s)$ et

$$g'(s) = (f \circ \theta)'(s) = \theta'(s)f'(\theta(s)).$$

Points biréguliers et plan osculateur

Proposition-définition 6

Soient A un arc géométrique régulier et p un point de A . Soient (I, f) un paramétrage de A et $t \in I$ tel que $p = f(t)$.

- Le point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*. Cette propriété ne dépend pas du choix du paramétrage.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le *plan osculateur* à A au point p . Il ne dépend pas du choix de (I, f) .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit birégulier.

Preuve : Soit $(I, f) \sim (J, g)$ et θ le difféo tel que $g = f \circ \theta$. Soit $s \in J$ tel que $t = \theta(s)$. On a donc $p = f(t) = g(s)$ et

$$g'(s) = (f \circ \theta)'(s) = \theta'(s)f'(\theta(s)).$$

$$g''(s) = \theta''(s)f'(\theta(s)) + \theta'(s)^2 f''(\theta(s)) = \theta''(s)f'(t) + \theta'(s)^2 f''(t)$$

Ainsi, $\text{Vect}(f'(t), f''(t)) = \text{Vect}(g'(s), g''(s))$. \square

Exercice 2

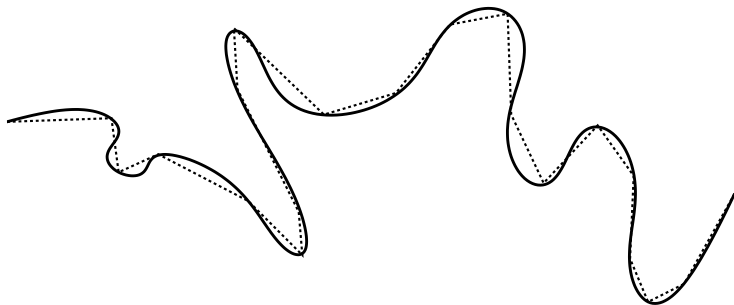
[cf examens an dernier] Montrer qu'un arc birégulier de \mathbf{R}^n est contenu dans un 2-plan si et seulement s'il a même plan osculateur en tout point.

Longueur d'un arc

On veut définir maintenant la longueur d'un arc, mais, a priori, on ne sait calculer que la longueur des lignes polygonales. Il est cependant possible d'approcher un arc A par des lignes polygonales

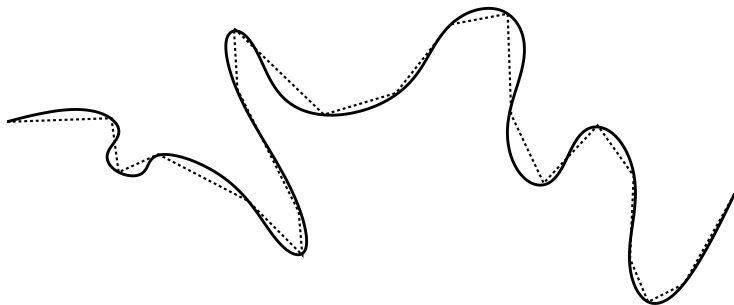
Longueur d'un arc

On veut définir maintenant la longueur d'un arc, mais, a priori, on ne sait calculer que la longueur des lignes polygonales. Il est cependant possible d'approcher un arc A par des lignes polygonales comme ceci :



Longueur d'un arc

On veut définir maintenant la longueur d'un arc, mais, a priori, on ne sait calculer que la longueur des lignes polygonales. Il est cependant possible d'approcher un arc A par des lignes polygonales comme ceci :



Intuitivement, on se dit que la longueur de la ligne polygonale donne une approximation par valeur inférieure de la longueur de l'arc et que plus on se donne de point mieux on approche cette longueur. . .

Une subdivision δ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un $(\ell + 1)$ -uplet (t_0, \dots, t_ℓ) vérifiant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$.
On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^n .

Définition 7

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$.

Pour toute subdivision $\delta = (t_0, \dots, t_\ell)$ de $[a, b]$, on note

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

Une subdivision δ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un $(\ell + 1)$ -uplet (t_0, \dots, t_ℓ) vérifiant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$.
On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^n .

Définition 7

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$.

Pour toute subdivision $\delta = (t_0, \dots, t_\ell)$ de $[a, b]$, on note

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

On définit la longueur de $f|_{[a,b]}$ comme étant

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta \in \Delta} L(\delta), \quad \Delta = \{\text{subdivisions de } [a, b]\}.$$

Une subdivision δ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un $(\ell + 1)$ -uplet (t_0, \dots, t_ℓ) vérifiant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$.
On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^n .

Définition 7

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$.

Pour toute subdivision $\delta = (t_0, \dots, t_\ell)$ de $[a, b]$, on note

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

On définit la longueur de $f|_{[a,b]}$ comme étant

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta \in \Delta} L(\delta), \quad \Delta = \{\text{subdivisions de } [a, b]\}.$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'arc est *rectifiable*.

Une subdivision δ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un $(\ell + 1)$ -uplet (t_0, \dots, t_ℓ) vérifiant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$.
On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^n .

Définition 7

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$.

Pour toute subdivision $\delta = (t_0, \dots, t_\ell)$ de $[a, b]$, on note

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

On définit la longueur de $f|_{[a,b]}$ comme étant

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta \in \Delta} L(\delta), \quad \Delta = \{\text{subdivisions de } [a, b]\}.$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'arc est *rectifiable*.

Remarques :

- La longueur d'un arc est bien invariante par reparamétrage (on calcule donc la longueur de l'arc géométrique associé).

Une subdivision δ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un entier $\ell \geq 1$ et d'un $(\ell + 1)$ -uplet (t_0, \dots, t_ℓ) vérifiant $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$.
On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^n .

Définition 7

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$.

Pour toute subdivision $\delta = (t_0, \dots, t_\ell)$ de $[a, b]$, on note

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

On définit la longueur de $f|_{[a,b]}$ comme étant

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta \in \Delta} L(\delta), \quad \Delta = \{\text{subdivisions de } [a, b]\}.$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'arc est *rectifiable*.

Remarques :

- La longueur d'un arc est bien invariante par reparamétrage (on calcule donc la longueur de l'arc géométrique associé).
- Avec cette définition, il est clair que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite (parcourue de façon "monotone").

Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, un arc paramétré *compact* et continu n'est pas forcément rectifiable.

Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, un arc paramétré *compact* et continu n'est pas forcément rectifiable. La courbe de Koch donne un exemple particulièrement pathologique : aucun de ses sous-arcs n'est rectifiable. Il s'agit de l'arc obtenu comme limite du processus suivant :

Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, un arc paramétré *compact* et continu n'est pas forcément rectifiable. La courbe de Koch donne un exemple particulièrement pathologique : aucun de ses sous-arcs n'est rectifiable. Il s'agit de l'arc obtenu comme limite du processus suivant :

Ce n'est pas le genre de situation que nous allons rencontrer ; en effet les arcs compacts et lisses (en fait C^1) sont rectifiables.

Si on a affaire à un arc lisse, le calcul différentiel suggère une autre façon d'approcher l'arc $([a, b], f)$.

Si on a affaire à un arc lisse, le calcul différentiel suggère une autre façon d'approcher l'arc $([a, b], f)$.

À partir d'une subdivision $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b)$: remplacer la restriction de f à $[t_i, t_{i+1}[$ par la fonction affine $t \mapsto f(t_i) + (t - t_i)f'(t_i)$.

Si on a affaire à un arc lisse, le calcul différentiel suggère une autre façon d'approcher l'arc $([a, b], f)$.

À partir d'une subdivision $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b)$: remplacer la restriction de f à $[t_i, t_{i+1}[$ par la fonction affine $t \mapsto f(t_i) + (t - t_i)f'(t_i)$.

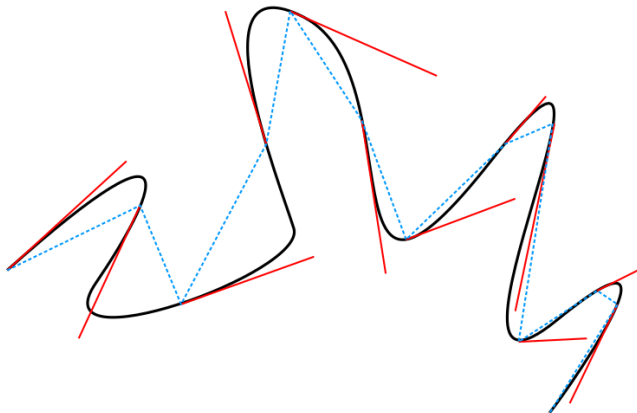


FIGURE – Les deux façons d'approcher un arc à partir d'une même subdivision

Ce nouvel arc n'est plus continu, mais sa comparaison avec l'arc polygonal précédent permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 8

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$ tels que f est de classe C^1 sur $]a, b[$.

L'arc $f([a, b])$ est rectifiable si et seulement si $\int_a^b \|f'(t)\| dt < +\infty$.

On a alors $L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $L(f([a, b])) < +\infty$.

Ce nouvel arc n'est plus continu, mais sa comparaison avec l'arc polygonal précédent permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 8

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$ tels que f est de classe C^1 sur $]a, b[$.

L'arc $f([a, b])$ est rectifiable si et seulement si $\int_a^b \|f'(t)\| dt < +\infty$.

On a alors $L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $L(f([a, b])) < +\infty$.

Notons ce que ce résultat a de satisfaisant : il affirme que la distance parcourue est obtenue en intégrant la vitesse. Quoi de plus naturel ?

Ce nouvel arc n'est plus continu, mais sa comparaison avec l'arc polygonal précédent permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 8

Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$ tels que f est de classe C^1 sur $]a, b[$.

L'arc $f([a, b])$ est rectifiable si et seulement si $\int_a^b \|f'(t)\| dt < +\infty$.

On a alors $L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $L(f([a, b])) < +\infty$.

Notons ce que ce résultat a de satisfaisant : il affirme que la distance parcourue est obtenue en intégrant la vitesse. Quoi de plus naturel ?

Remarquons aussi que la formule de changement de variable nous dit que l'intégrale présente dans l'énoncé ci-dessus est invariante par changement de paramétrage C^1 .

Preuve : cas f est de classe C^1 sur tout $[a, b]$.

Le segment $[a, b]$ est compact et l'application f' est continue donc la restriction de f' à $[a, b]$ est uniformément continue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\| < \varepsilon.$$

Preuve : cas f est de classe C^1 sur tout $[a, b]$.

Le segment $[a, b]$ est compact et l'application f' est continue donc la restriction de f' à $[a, b]$ est uniformément continue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\| < \varepsilon.$$

En appliquant la formule des accroissements finis à l'application $g : t \mapsto f(t) - tf'(t_2)$, en déduit que

Preuve : cas f est de classe C^1 sur tout $[a, b]$.

Le segment $[a, b]$ est compact et l'application f' est continue donc la restriction de f' à $[a, b]$ est uniformément continue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\| < \varepsilon.$$

En appliquant la formule des accroissements finis à l'application $g : t \mapsto f(t) - tf'(t_2)$, en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b],$$

$$|t_1 - t_2| < \eta \Rightarrow \underbrace{\|f(t_1) - f(t_2) - (t_1 - t_2)f'(t_2)\|}_{=g(t_1)-g(t_2)} \leq \underbrace{\varepsilon}_{=\sup_{[t_1, t_2]} g'(t)} |t_1 - t_2|. \quad (1)$$

On a noté Δ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour tout $\eta > 0$, on note Δ_η l'ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$.

On a noté Δ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour tout $\eta > 0$, on note Δ_η l'ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$.

Lemme 9

$$\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} = \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}.$$

Preuve Comme $\Delta_\eta \subset \Delta$, on a $\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} \geq \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}$.

On a noté Δ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour tout $\eta > 0$, on note Δ_η l'ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$.

Lemme 9

$$\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} = \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}.$$

Preuve Comme $\Delta_\eta \subset \Delta$, on a $\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} \geq \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}$. Réciproquement, pour tout $\delta = \{t_0 < \dots < t_\ell\} \in \Delta$, il est facile de trouver $\delta' = \{t'_0 < \dots < t'_{\ell'}\} \in \Delta_\eta$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, \ell\}$, il existe $j_i \in \{0, 1, \dots, \ell'\}$ tels que $t_i = t'_{j_i}$ (on a rajouté suffisamment de points).

On a noté Δ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour tout $\eta > 0$, on note Δ_η l'ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$.

Lemme 9

$$\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} = \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}.$$

Preuve Comme $\Delta_\eta \subset \Delta$, on a $\sup\{L(\delta), \delta \in \Delta\} \geq \sup\{L(\delta), \delta \in \Delta_\eta\}$. Réciproquement, pour tout $\delta = \{t_0 < \dots < t_\ell\} \in \Delta$, il est facile de trouver $\delta' = \{t'_0 < \dots < t'_{\ell'}\} \in \Delta_\eta$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, \ell\}$, il existe $j_i \in \{0, 1, \dots, \ell'\}$ tels que $t_i = t'_{j_i}$ (on a rajouté suffisamment de points).

L'inégalité triangulaire nous dit que $L(\delta) \leq L(\delta')$. Ce qui implique que $\sup\{L_\delta(f([a, b]), \delta \in \Delta\} \leq \sup\{L_\delta(f([a, b]), \delta \in \Delta_\eta\}$. \square

Pour tout $\delta \in \Delta$, on a

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|.$$

Pour tout $\delta \in \Delta$, on a

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par (1). Si $\delta \in \Delta_\eta$, par (1) on obtient :

$$\left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \leq \sum_i \| \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| - (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \|$$

Pour tout $\delta \in \Delta$, on a

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par (1). Si $\delta \in \Delta_\eta$, par (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| &\leq \sum_i \left| \|f(t_{i+1} - f(t_i))\| - (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \\ &\leq \sum_i \|f(t_{i+1} - f(t_i)) - (t_{i+1} - t_i) f'(t_i)\| \end{aligned}$$

Pour tout $\delta \in \Delta$, on a

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par (1). Si $\delta \in \Delta_\eta$, par (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \left| L(\delta) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| &\leq \sum_i \left| \|f(t_{i+1} - f(t_i))\| - (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \\ &\leq \sum_i \|f(t_{i+1} - f(t_i)) - (t_{i+1} - t_i) f'(t_i)\| \\ &\leq \varepsilon \sum_i (t_{i+1} - t_i) = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, on obtient que pour tout $\delta \in \Delta_{\eta_0}$:

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon(1 + (b - a)).$$

Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, on obtient que pour tout $\delta \in \Delta_{\eta_0}$:

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon(1 + (b - a)).$$

Ainsi, en prenant le sup sur les $\delta \in \Delta_{\eta_0}$ (en utilisant le lemme 9) et en faisant tendre ε vers 0, on a finalement :

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, on obtient que pour tout $\delta \in \Delta_{\eta_0}$:

$$\left| L(\delta) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon(1 + (b - a)).$$

Ainsi, en prenant le sup sur les $\delta \in \Delta_{\eta_0}$ (en utilisant le lemme 9) et en faisant tendre ε vers 0, on a finalement :

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt. \square$$

Exemple 10

Soit A l'arc défini par (\mathbf{R}, f) avec $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

$$L(f([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Le cercle unité est bien de longueur 2π ...

Exemple 10

Soit A l'arc défini par (\mathbf{R}, f) avec $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

$$L(f([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Le cercle unité est bien de longueur 2π ...

Exemple 11

On considère la parabole plane paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$.
Calculons $L(f([0, x]))$. D'après le théorème 8, on a :

$$L(f([0, x])) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

$$L(f([0, x])) = \int_0^{\operatorname{arg} \sinh x} \cosh^2 u du = \dots = \frac{\operatorname{arg} \sinh x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}.$$

Exemple 12

Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbf{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$.

Exemple 12

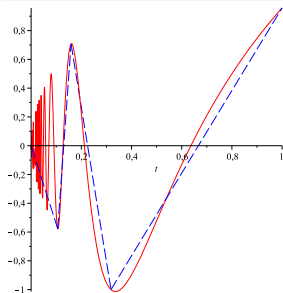
Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbf{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$. La fonction f est lisse sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 8 et donc

$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$

Exemple 12

Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbf{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$. La fonction f est lisse sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 8 et donc

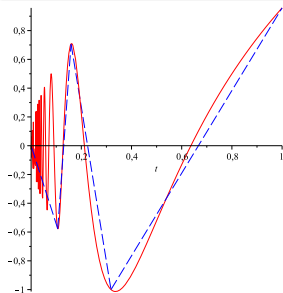
$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$



Exemple 12

Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbf{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$. La fonction f est lisse sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 8 et donc

$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$



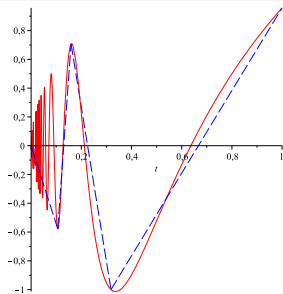
Si P_m est la ligne polygonale de sommets $f(0)$, $f(\frac{1}{n\pi})$, $n \in \{1, \dots, m\}$ et $f(1)$ alors

$$L(f([0, 1])) > L(P_m) \geq 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exemple 12

Considérons maintenant l'arc paramétré continu (\mathbf{R}, f) , où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$. La fonction f est lisse sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 8 et donc

$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$



Si P_m est la ligne polygonale de sommets $f(0)$, $f(\frac{1}{n\pi})$, $n \in \{1, \dots, m\}$ et $f(1)$ alors

$$L(f([0, 1])) > L(P_m) \geq 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$$

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Définition 13

On dit que (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc (ou une abscisse curviligne) si pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on a

$$t - t_0 = L(f([t, t_0])) = \int_{t_0}^t \|f'(s)\| ds.$$

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Définition 13

On dit que (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc (ou une abscisse curviligne) si pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on a

$$t - t_0 = L(f([t, t_0])) = \int_{t_0}^t \|f'(s)\| ds.$$

Il est évident que ceci est équivalent à $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Définition 13

On dit que (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc (ou une abscisse curviligne) si pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on a

$$t - t_0 = L(f([t, t_0])) = \int_{t_0}^t \|f'(s)\| ds.$$

Il est évident que ceci est équivalent à $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.

De même il est clair que si f et g sont deux paramétrages par longueur d'arc de A , alors l'application θ telle que $g = f \circ \theta$ est de la forme $\theta(t) = \pm t + C$.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I, f'(t) \neq 0$ (A est supposé régulier), la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I, f'(t) \neq 0$ (A est supposé régulier), la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I, f'(t) \neq 0$ (A est supposé régulier), la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$. Soit $\theta : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque, qui est, elle aussi, lisse.

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I, f'(t) \neq 0$ (A est supposé régulier), la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$. Soit $\theta : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque, qui est, elle aussi, lisse.

Pour tout $s \in J$,

$$\|(f \circ \theta)'(s)\| = \|\theta'(s)f'(\theta(s))\| = \left| \frac{1}{\varphi'(\theta(s))} \right| \|f'(\theta(s))\| = 1.$$

Proposition 14

Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soient (I, f) un paramétrage de A et $t_0 \in I$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I, f'(t) \neq 0$ (A est supposé régulier), la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$. Soit $\theta : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque, qui est, elle aussi, lisse.

Pour tout $s \in J$,

$$\|(f \circ \theta)'(s)\| = \|\theta'(s)f'(\theta(s))\| = \left| \frac{1}{\varphi'(\theta(s))} \right| \|f'(\theta(s))\| = 1. \square$$

Remarque

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$.

Remarque

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$.

Cette propriété sera souvent utilisée dans la suite.

Exemples 15

- Le paramétrage par longueur d'arc le plus connu est sans doute celui du cercle unité de \mathbf{R}^2 qui est donné par $s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$.

Remarque

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$.

Cette propriété sera souvent utilisée dans la suite.

Exemples 15

- Le paramétrage par longueur d'arc le plus connu est sans doute celui du cercle unité de \mathbf{R}^2 qui est donné par $s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$.
- Si on se donne un plan P dans \mathbf{R}^n , un point p dans P et $r > 0$, comment trouver un paramétrage du cercle contenu dans P de centre p et de rayon r ?

Remarque

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$.

Cette propriété sera souvent utilisée dans la suite.

Exemples 15

- Le paramétrage par longueur d'arc le plus connu est sans doute celui du cercle unité de \mathbf{R}^2 qui est donné par $s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$.
- Si on se donne un plan P dans \mathbf{R}^n , un point p dans P et $r > 0$, comment trouver un paramétrage du cercle contenu dans P de centre p et de rayon r ?
- Comment obtenir un paramétrage par longueur d'arc de la parabole ?

La courbure

Définition 16

Soit A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = f(t)$ un point de A . La *courbure* de A en p est le réel positif $K_A(p)$ défini par

$$K_A(p) = \|f''(t)\|$$

La courbure

Définition 16

Soit A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = f(t)$ un point de A . La *courbure* de A en p est le réel positif $K_A(p)$ défini par

$$K_A(p) = \|f''(t)\|$$

On a vu plus haut que si (J, g) est un autre paramétrage de A obtenu par un changement de paramétrage θ et si $p = f(t) = g(s)$ alors

$$g''(s) = \theta'(s)^2 f''(t) + \theta''(s) f'(t).$$

Rappelons que si (J, g) est lui aussi un paramétrage par longueur d'arc alors $\theta'(s) = \pm 1$ et $\theta''(s) = 0$. On a alors $g''(s) = f''(t)$.

Exemple 17

L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbf{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante ($ab \neq 0$).

Exemple 17

L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbf{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante ($ab \neq 0$).

En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc.

Exemple 17

L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbf{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante ($ab \neq 0$).

En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc. Dérivons :

$$g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Exemple 17

L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbf{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante ($ab \neq 0$).

En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc. Dérivons :

$$g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$g''(t) = -\frac{a}{a^2+b^2} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right).$$

On a donc pour tout $p \in H$, $K_H(p) =$

Exemple 17

L'hélice circulaire H paramétrée par (\mathbf{R}, f) , $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante ($ab \neq 0$).

En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc. Dérivons :

$$g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$g''(t) = -\frac{a}{a^2+b^2} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right).$$

On a donc pour tout $p \in H$, $K_H(p) = \frac{|a|}{a^2+b^2}$.

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $\theta'(s)^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle,$$

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $\theta'(s)^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $\theta'(s)^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

On a donc : $g''(s) = \|g'(s)\|^2 f''(t) + \langle g''(s), f'(t) \rangle f'(t)$.

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $\theta'(s)^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

On a donc : $g''(s) = \|g'(s)\|^2 f''(t) + \langle g''(s), f'(t) \rangle f'(t)$.

Comment calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) ?

On sait qu'il existe (I, f) paramétrage par longueur d'arc (souvent introuvable) et θ difféo tel que $g = f \circ \theta$.

D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $\theta'(s)^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

On a donc : $g''(s) = \|g'(s)\|^2 f''(t) + \langle g''(s), f'(t) \rangle f'(t)$. D'où

$$K_A(p)^2 = \|f''(t)\|^2 = \left(\frac{\|g''(s)\|}{\|g'(s)\|^2} \right)^2 - \left(\frac{\langle g'(s), g''(s) \rangle}{\|g'(s)\|^3} \right)^2.$$

(f'' et $f'(t)$ sont perpendiculaires).

On peut voir au passage que $f''(t) = \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2} - \left\langle \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}, f'(t) \right\rangle f'(t)$.
Autrement dit, que $f''(t)$ est le projeté orthogonal de $\frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}$ sur τ^\perp *.

*. Ainsi $\|g'(s)\|^2 K_A(p)$ est la norme de la partie centripète de l'accélération, la partie de l'accélération qui « fait tourner ».

On peut voir au passage que $f''(t) = \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2} - \left\langle \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}, f'(t) \right\rangle f'(t)$.

Autrement dit, que $f''(t)$ est le projeté orthogonal de $\frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}$ sur τ^\perp *.

Application : La courbure de la parabole paramétrée par

$f : t \mapsto (t^2/2, t)$ en 0 est 1. En effet $f'(0) = (0, 1)$ et $f''(0) = (1, 0)$.

*. Ainsi $\|g'(s)\|^2 K_A(p)$ est la norme de la partie centripète de l'accélération, la partie de l'accélération qui « fait tourner ».

On peut voir au passage que $f''(t) = \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2} - \left\langle \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}, f'(t) \right\rangle f'(t)$.

Autrement dit, que $f''(t)$ est le projeté orthogonal de $\frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}$ sur τ^\perp *.

Application : La courbure de la parabole paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$ en 0 est 1. En effet $f'(0) = (0, 1)$ et $f''(0) = (1, 0)$.

La courbure est une notion métrique, en tant que telle elle est invariante par isométries, plus précisément :

Proposition 18

Soit $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une isométrie, A un arc géométrique régulier et p un point de A . La courbure de A au point p est égale à la courbure de $F(A)$ au point $F(p)$.

*. Ainsi $\|g'(s)\|^2 K_A(p)$ est la norme de la partie centripète de l'accélération, la partie de l'accélération qui « fait tourner ».

Cercle osculateur

Définition 19

Soient A et B deux arcs géométriques réguliers. On dit que A et B ont un contact d'ordre k en p s'il existe des abscisses curvilignes (I, f) et (J, g) respectivement sur A et B telles que $f(0) = g(0)$ et que $d(f(s), g(s)) = o(s^k)$ au voisinage de 0.

Cercle osculateur

Définition 19

Soient A et B deux arcs géométriques réguliers. On dit que A et B ont un contact d'ordre k en p s'il existe des abscisses curvilignes (I, f) et (J, g) respectivement sur A et B telles que $f(0) = g(0)$ et que $d(f(s), g(s)) = o(s^k)$ au voisinage de 0.

Remarque

- Il s'agit d'une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire donne la transitivité).

Cercle osculateur

Définition 19

Soient A et B deux arcs géométriques réguliers. On dit que A et B ont un contact d'ordre k en p s'il existe des abscisses curvilignes (I, f) et (J, g) respectivement sur A et B telles que $f(0) = g(0)$ et que $d(f(s), g(s)) = o(s^k)$ au voisinage de 0.

Remarque

- Il s'agit d'une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire donne la transitivité).
- Deux arcs géométriques réguliers A et B ont un contact d'ordre k en p si et seulement si il existe (I, f) et (J, g) des paramétrages par longueur d'arc de A et B tels que $f(0) = g(0) = p$ et que f et g ont même développement de Taylor à l'ordre k en 0.

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .
Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .
Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Proposition 20

Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .
Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Proposition 20

Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

- Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .
Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Proposition 20

Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

- Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.
- Si p est birégulier, alors il existe un unique *cercle osculateur* à A en p .

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p .
Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Proposition 20

Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

- Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.
- Si p est birégulier, alors il existe un unique *cercle osculateur* à A en p . Il s'agit du cercle contenu dans le plan osculateur, de rayon $\frac{1}{K_A(p)}$ et de centre $f(0) + \|K_A(p)\|^{-2}f''(0)$.

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p . Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*.

Proposition 20

Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.

- Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.
- Si p est birégulier, alors il existe un unique *cercle osculateur* à A en p . Il s'agit du cercle contenu dans le plan osculateur, de rayon $\frac{1}{K_A(p)}$ et de centre $f(0) + \|K_A(p)\|^{-2}f''(0)$.

Les cercles osculateurs permettent en quelque sorte de visualiser la courbure. Bien sûr deux arcs sont osculateurs en p si et seulement si ils ont même cercle osculateur en p .

Preuve de la proposition 20

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$.

Preuve de la proposition 20

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par (\mathbf{R}, g) avec $g(t) = f(0) + tf'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Preuve de la proposition 20

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par (\mathbf{R}, g) avec $g(t) = f(0) + tf'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Supposons p birégulier i.e. $f''(0) \neq 0$. D'après la remarque 28, on cherche les cercles admettant un paramétrage par longueur d'arc (J, h) tel que $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$.

Preuve de la proposition 20

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par (\mathbf{R}, g) avec $g(t) = f(0) + tf'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Supposons p birégulier i.e. $f''(0) \neq 0$. D'après la remarque 28, on cherche les cercles admettant un paramétrage par longueur d'arc (J, h) tel que $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$.

Soit C le cercle de \mathbf{R}^n de centre a de rayon R contenu dans le plan de direction $\text{Vect}\{u, v\}$. Si $\{u, v\}$ est orthonormée alors C admet pour paramétrage par longueur d'arc

$$h : s \mapsto a + R \cos(s/R)u + R \sin(s/R)v.$$

Preuve de la proposition 20

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par (\mathbf{R}, g) avec $g(t) = f(0) + tf'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Supposons p birégulier i.e. $f''(0) \neq 0$. D'après la remarque 28, on cherche les cercles admettant un paramétrage par longueur d'arc (J, h) tel que $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$.

Soit C le cercle de \mathbf{R}^n de centre a de rayon R contenu dans le plan de direction $\text{Vect}\{u, v\}$. Si $\{u, v\}$ est orthonormée alors C admet pour paramétrage par longueur d'arc

$$h : s \mapsto a + R \cos(s/R)u + R \sin(s/R)v.$$

On voit que $h(0) = a + Ru$, $h'(0) = v$ et $h''(0) = -\frac{1}{R}u$.

Pour avoir $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$ il faut donc que $f(0) = a + Ru$, $f'(0) = v$ et $f''(0) = -\frac{1}{R}u$.

Pour avoir $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$ il faut donc que $f(0) = a + Ru$, $f'(0) = v$ et $f''(0) = -\frac{1}{R}u$.

On a alors

$$\begin{aligned}v &= f'(0), & u &= -\frac{1}{\|f''(0)\|} f''(0), \\R &= \frac{1}{\|f''(0)\|} & a &= h(0) + \frac{1}{\|f''(0)\|^2} f''(0)\end{aligned}$$

Pour avoir $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$ il faut donc que $f(0) = a + Ru$, $f'(0) = v$ et $f''(0) = -\frac{1}{R}u$.

On a alors

$$\begin{aligned}v &= f'(0), & u &= -\frac{1}{\|f''(0)\|} f''(0), \\R &= \frac{1}{\|f''(0)\|} & a &= h(0) + \frac{1}{\|f''(0)\|^2} f''(0)\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un cercle osculateur à A en p , il est paramétré par :

$$h(t) = f(0) + R^2 f''(0) - R \cos(t/R) R f''(0) + R \sin(t/R) f'(0),$$

où $R = \frac{1}{\|f''(0)\|}$.

Pour avoir $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$ il faut donc que $f(0) = a + Ru$, $f'(0) = v$ et $f''(0) = -\frac{1}{R}u$.

On a alors

$$\begin{aligned}v &= f'(0), & u &= -\frac{1}{\|f''(0)\|} f''(0), \\R &= \frac{1}{\|f''(0)\|} & a &= h(0) + \frac{1}{\|f''(0)\|^2} f''(0)\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un cercle osculateur à A en p , il est paramétré par :

$$h(t) = f(0) + R^2 f''(0) - R \cos(t/R) R f''(0) + R \sin(t/R) f'(0),$$

où $R = \frac{1}{\|f''(0)\|}$. Il s'agit bien du cercle donné dans l'énoncé. \square

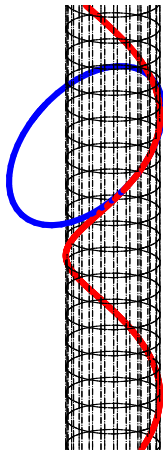


FIGURE – Hélice avec un cercle osculateur.

Arc dans \mathbf{R}^2

Rappel

Une base de \mathbf{R}^n est dite directe si le déterminant de l'unique endomorphisme qui envoie cette base sur la base canonique est positif.

Dans le plan orienté, il existe une notion de droite et de gauche.

Arc dans \mathbf{R}^2

Rappel

Une base de \mathbf{R}^n est dite directe si le déterminant de l'unique endomorphisme qui envoie cette base sur la base canonique est positif.

Dans le plan orienté, il existe une notion de droite et de gauche.

Il est donc possible de dire si un arc tourne vers la droite ou vers la gauche.

Arc dans \mathbf{R}^2

Rappel

Une base de \mathbf{R}^n est dite directe si le déterminant de l'unique endomorphisme qui envoie cette base sur la base canonique est positif.

Dans le plan orienté, il existe une notion de droite et de gauche.

Il est donc possible de dire si un arc tourne vers la droite ou vers la gauche.

Pour cela il faut bien-sûr faire attention au sens de parcours. En effet, si on se retourne, ce qui était à gauche est maintenant à droite.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21

Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21

Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21

Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21

Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.
- On peut aussi déterminer le signe de $k_A(p)$ à l'aide d'un paramétrage quelconque (ayant la bonne orientation).

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21

Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.
- On peut aussi déterminer le signe de $k_A(p)$ à l'aide d'un paramétrage quelconque (ayant la bonne orientation).
En effet, $\langle f''(t), i(f'(t)) \rangle$ et $\langle (f \circ \theta)''(\theta^{-1}(t)), i((f \circ \theta)'(\theta^{-1}(t))) \rangle$ sont de même signe, pour tout difféo θ croissant.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 21


Soit A un arc géométrique *orienté* de \mathbf{R}^2 et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :


- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.
- On peut aussi déterminer le signe de $k_A(p)$ à l'aide d'un paramétrage quelconque (ayant la bonne orientation).
En effet, $\langle f''(t), i(f'(t)) \rangle$ et $\langle (f \circ \theta)''(\theta^{-1}(t)), i((f \circ \theta)'(\theta^{-1}(t))) \rangle$ sont de même signe, pour tout difféo θ croissant.
- Si on change l'orientation de A , alors $k_A(p)$ change de signe (on s'est retourné).

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$ lisse telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))^\dagger$.

†. en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le 

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$ lisse telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))^\dagger$.


D'où $f''(t) = \lambda'(t) \underbrace{(-\sin(\lambda(t)), \cos(\lambda(t)))}_{=i(f'(t))}$ et donc $\lambda'(t) = k_A(f(t))$.

†. en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le 

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$ lisse telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))^\dagger$.

D'où $f''(t) = \lambda'(t) \underbrace{(-\sin(\lambda(t)), \cos(\lambda(t)))}_{=i(f'(t))}$ et donc $\lambda'(t) = k_A(f(t))$.

La courbure algébrique est donc la dérivée de (la mesure de) l'angle de la tangente avec l'horizontale, plus précisément de l'angle orienté que forme le vecteur vitesse avec le vecteur $e_1 = (1, 0)$.


†. en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le 

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$ lisse telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))^\dagger$.

D'où $f''(t) = \lambda'(t) \underbrace{(-\sin(\lambda(t)), \cos(\lambda(t)))}_{=i(f'(t))}$ et donc $\lambda'(t) = k_A(f(t))$.

La courbure algébrique est donc la dérivée de (la mesure de) l'angle de la tangente avec l'horizontale, plus précisément de l'angle orienté que forme le vecteur vitesse avec le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Inversement, si on connaît l'expression de k_A en fonction de la longueur d'arc et $\lambda(0)$ on détermine λ en intégrant. Si on connaît de plus $f(0)$, alors f est obtenue en intégrant $(\cos \circ \lambda, \sin \circ \lambda)$. On a donc montré :

†. en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le 

Théorème 22

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0 et $c : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application lisse. Soient $(p, v) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que $f(0) = p$, $f'(0) = v$ et $\forall t \in I, k_A(f(t)) = c(t)$.

Autrement dit, une courbe plane orientée est déterminée, à une isométrie directe près (ce qui correspond à se donner $f(0)$ et $f'(0)$), par sa courbure algébrique.

L'expression de la courbure algébrique d'une courbe plane en fonction de la longueur d'arc est parfois appelée *l'équation intrinsèque* de la courbe.

L'expression de la courbure algébrique d'une courbe plane en fonction de la longueur d'arc est parfois appelée *l'équation intrinsèque* de la courbe.

Exemple 23

La spirale de Cornu est la courbe d'équation intrinsèque $K(t) = t$. C'est la courbe qui sert à tracer les sorties d'autoroute.

L'expression de la courbure algébrique d'une courbe plane en fonction de la longueur d'arc est parfois appelée *l'équation intrinsèque* de la courbe.

Exemple 23

La spirale de Cornu est la courbe d'équation intrinsèque $K(t) = t$. C'est la courbe qui sert à tracer les sorties d'autoroute.

Faisons partir la courbe de $(0, 0)$
avec une vitesse initiale $(1, 0)$ (ie
 $\lambda(0) = 0$).

Si $K(t) = t$ alors $\lambda(t) = \frac{t^2}{2}$ et
donc

$$f(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds \right).$$

L'expression de la courbure algébrique d'une courbe plane en fonction de la longueur d'arc est parfois appelée *l'équation intrinsèque* de la courbe.

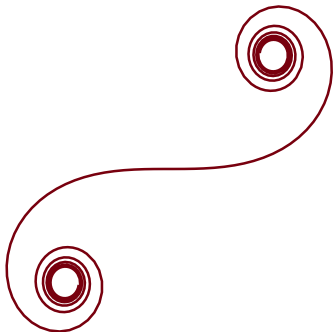
Exemple 23

La spirale de Cornu est la courbe d'équation intrinsèque $K(t) = t$. C'est la courbe qui sert à tracer les sorties d'autoroute.

Faisons partir la courbe de $(0, 0)$
avec une vitesse initiale $(1, 0)$ (ie
 $\lambda(0) = 0$).

Si $K(t) = t$ alors $\lambda(t) = \frac{t^2}{2}$ et
donc

$$f(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds \right).$$



Arcs de \mathbf{R}^3 (orienté)

Il n'y a pas de gauche et de droite dans l'espace. Mais on va voir qu'en orientant un arc A de \mathbf{R}^3 (lui-même orienté), on va pouvoir définir un « dessus » et un « dessous »...

Arcs de \mathbf{R}^3 (orienté)

Il n'y a pas de gauche et de droite dans l'espace. Mais on va voir qu'en orientant un arc A de \mathbf{R}^3 (lui-même orienté), on va pouvoir définir un « dessus » et un « dessous »...

Rappel

Soient x et y deux vecteurs de \mathbf{R}^3 . Le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$, est, par définition, l'unique vecteur de \mathbf{R}^3 tel que

$$\forall z \in \mathbf{R}^3, \langle z, x \wedge y \rangle = \det(x, y, z).$$

Arcs de \mathbf{R}^3 (orienté)

Il n'y a pas de gauche et de droite dans l'espace. Mais on va voir qu'en orientant un arc A de \mathbf{R}^3 (lui-même orienté), on va pouvoir définir un « dessus » et un « dessous »...

Rappel

Soient x et y deux vecteurs de \mathbf{R}^3 . Le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$, est, par définition, l'unique vecteur de \mathbf{R}^3 tel que

$$\forall z \in \mathbf{R}^3, \langle z, x \wedge y \rangle = \det(x, y, z).$$

Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 , les coordonnées de $x \wedge y$ dans cette base sont les $\det(x, y, e_i)$.

$(x, y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire, antisymétrique mais non associative. De plus

$$\langle x, x \wedge y \rangle = \langle y, x \wedge y \rangle = 0$$

$$\det(x, y, x \wedge y) \geq 0$$

$$\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Arcs de \mathbf{R}^3 (orienté)

Il n'y a pas de gauche et de droite dans l'espace. Mais on va voir qu'en orientant un arc A de \mathbf{R}^3 (lui-même orienté), on va pouvoir définir un « dessus » et un « dessous »...

Rappel

Soient x et y deux vecteurs de \mathbf{R}^3 . Le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$, est, par définition, l'unique vecteur de \mathbf{R}^3 tel que

$$\forall z \in \mathbf{R}^3, \langle z, x \wedge y \rangle = \det(x, y, z).$$

Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 , les coordonnées de $x \wedge y$ dans cette base sont les $\det(x, y, e_i)$.

$(x, y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire, antisymétrique mais non associative. De plus

$$\langle x, x \wedge y \rangle = \langle y, x \wedge y \rangle = 0$$

$$\det(x, y, x \wedge y) \geq 0$$

$$\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2. \quad (*)$$

En posant $\langle x, y \rangle / \|x\| \|y\| = \cos(\varphi)$, $(*)$ s'écrit $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin(\varphi)$.

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (l, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t),$$

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t), \quad \nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t)$$

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t), \quad \nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t) \quad \text{et} \quad \beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p).$$

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t), \quad \nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t) \quad \text{et} \quad \beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p).$$

Remarque

- Chaque $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ est une base orthonormée directe.

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t), \quad \nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t) \quad \text{et} \quad \beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p).$$

Remarque

- Chaque $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ est une base orthonormée directe.
- $(\tau(p), \nu(p))$ est une base du plan osculateur à A en p . Le vecteur $\beta(p)$ est normal à ce plan. On peut penser qu'il indique le « dessus » du plan.

Définition 24

Soit A un arc orienté de \mathbf{R}^3 et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point birégulier de A .

On appelle *trièdre de Frenet* de A en p , le triplet de vecteurs de \mathbf{R}^3 $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ défini par

$$\tau(p) = f'(t), \quad \nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t) \quad \text{et} \quad \beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p).$$

Remarque

- Chaque $(\tau(p), \nu(p), \beta(p))$ est une base orthonormée directe.
- $(\tau(p), \nu(p))$ est une base du plan osculateur à A en p . Le vecteur $\beta(p)$ est normal à ce plan. On peut penser qu'il indique le « dessus » du plan.
- Ce trièdre n'est pas défini en un point d'inflexion.

Soient A un arc birégulier et (I, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$.

Soient A un arc birégulier et (I, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Soient A un arc birégulier et (l, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).
Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation

Soient A un arc birégulier et (I, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Soient A un arc birégulier et (l, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$.

Soient A un arc birégulier et (l, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

Soient A un arc birégulier et (l, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$.

Soient A un arc birégulier et (I, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$.

Les relations $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, $\langle \nu(t), \tau(t) \rangle = 0$, $\langle \nu(t), \beta(t) \rangle = 0$ donnent

Soient A un arc birégulier et (I, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$.

Les relations $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, $\langle \nu(t), \tau(t) \rangle = 0$, $\langle \nu(t), \beta(t) \rangle = 0$ donnent

$$\nu'(t) = -K_A(t) \tau(t) - T_A(t) \beta(t).$$

Soient A un arc birégulier et (l, f) un paramétrage l.a. de A . On définit la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$, le trièdre de Frenet au point $f(t)$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

où on a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$ (NB : $K_A(t) \neq 0$ car A est biregulier).

Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$.

Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$.

Les relations $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, $\langle \nu(t), \tau(t) \rangle = 0$, $\langle \nu(t), \beta(t) \rangle = 0$ donnent

$$\nu'(t) = -K_A(t) \tau(t) - T_A(t) \beta(t).$$

Ces formules constituent les *formules de Frenet*. Rappelons qu'elles ne sont valables que pour un paramétrage par longueur d'arc.

Exemple 25

L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Exemple 25

L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On en déduit (\pm faisant référence au signe de $-a$) que

$$\begin{cases} \tau(t) = g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \nu(t) = g''(t) / \|g''(t)\| = \pm \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right), \\ \beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t) = \pm \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{cases}$$

Exemple 25

L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On en déduit (\pm faisant référence au signe de $-a$) que

$$\begin{cases} \tau(t) = g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \nu(t) = g''(t) / \|g''(t)\| = \pm \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right), \\ \beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t) = \pm \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{cases}$$

$$\text{D'où } \beta'(t) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu(t),$$

Exemple 25

L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On en déduit (\pm faisant référence au signe de $-a$) que

$$\begin{cases} \tau(t) = g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \nu(t) = g''(t) / \|g''(t)\| = \pm \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right), \\ \beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t) = \pm \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{cases}$$

D'où $\beta'(t) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu(t)$, ainsi la torsion est constante et vaut $-\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Exercice 3

Soit (J, g) un paramétrage quelconque d'un arc birégulier et orienté A .

- 1 Montrer que le trièdre obtenu en appliquant le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au repère $(g'(s), g''(s), g'(s) \wedge g''(s))$ est le trièdre de Frenet au point $g(s)$.
- 2 Déterminer les relations « à la Frenet » de l'application $s \mapsto (\tau_A(g(s)), \nu_A(g(s)), \beta_A(g(s)))$.

Exercice 3

Soit (J, g) un paramétrage quelconque d'un arc birégulier et orienté A .

- 1 Montrer que le trièdre obtenu en appliquant le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au repère $(g'(s), g''(s), g'(s) \wedge g''(s))$ est le trièdre de Frenet au point $g(s)$.
- 2 Déterminer les relations « à la Frenet » de l'application $s \mapsto (\tau_A(g(s)), \nu_A(g(s)), \beta_A(g(s)))$.

Comme pour la courbure, il existe une formule permettant de calculer la torsion à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) :

$$T = -\frac{\det(g', g'', g''')}{\|g' \wedge g''\|^2}$$

Exercice 3

Soit (J, g) un paramétrage quelconque d'un arc birégulier et orienté A .

- 1 Montrer que le trièdre obtenu en appliquant le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au repère $(g'(s), g''(s), g'(s) \wedge g''(s))$ est le trièdre de Frenet au point $g(s)$.
- 2 Déterminer les relations « à la Frenet » de l'application $s \mapsto (\tau_A(g(s)), \nu_A(g(s)), \beta_A(g(s)))$.

Comme pour la courbure, il existe une formule permettant de calculer la torsion à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) :

$$T = -\frac{\det(g', g'', g''')}{\|g' \wedge g''\|^2}$$

Exercice 4

Prouver l'égalité ci-dessus (montrer la pour les abscisses curvilignes et puis qu'elle est invariante par changement de paramétrage).

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Preuve : (comparer avec l'ex. 2) Soit A birégulier et à torsion nulle de paramétrage par longueur d'arc (l, f) .

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Preuve : (comparer avec l'ex. 2) Soit A birégulier et à torsion nulle de paramétrage par longueur d'arc (I, f) . D'après les formules de Frenet $\beta' = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\forall t \in I, \beta(t) = v$.

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Preuve : (comparer avec l'ex. 2) Soit A birégulier et à torsion nulle de paramétrage par longueur d'arc (I, f) . D'après les formules de Frenet $\beta' = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\forall t \in I, \beta(t) = v$.
On a $\langle v, \tau(t) \rangle \equiv 0$ d'où $\langle v, f(t) \rangle = \text{Cste}$.

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Preuve : (comparer avec l'ex. 2) Soit A birégulier et à torsion nulle de paramétrage par longueur d'arc (I, f) . D'après les formules de Frenet $\beta' = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\forall t \in I, \beta(t) = v$.

On a $\langle v, \tau(t) \rangle \equiv 0$ d'où $\langle v, f(t) \rangle = \text{Cste}$. La courbe est donc contenue dans un niveau d'une forme linéaire c'est-à-dire dans un plan. \square

Interprétation géométrique de la torsion

Propriété

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.

Preuve : (comparer avec l'ex. 2) Soit A birégulier et à torsion nulle de paramétrage par longueur d'arc (I, f) . D'après les formules de Frenet $\beta' = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\forall t \in I, \beta(t) = v$.

On a $\langle v, \tau(t) \rangle \equiv 0$ d'où $\langle v, f(t) \rangle = \text{Cste}$. La courbe est donc contenue dans un niveau d'une forme linéaire c'est-à-dire dans un plan. \square

Exemple 26

L'arc paramétré (\mathbf{R}, f) défini par $f(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{si } t > 0 \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

est lisse, régulier, birégulier sauf en $t = 0$. Sa torsion est nulle partout où elle est définie mais la courbe n'est pas plane !

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur.

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p .

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p .

Le DL à l'ordre 3 d'un paramétrage par longueur d'arc

$$\begin{aligned} f(t) = f(0) &+ \left(t - \frac{\kappa(0)^2}{6} t^3 + o(t^3)\right) \tau(0) \\ &+ \left(\frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \nu(0) \\ &+ \left(-\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \beta(0). \end{aligned}$$

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p .

Le DL à l'ordre 3 d'un paramétrage par longueur d'arc

$$\begin{aligned} f(t) = f(0) &+ \left(t - \frac{\kappa(0)^2}{6} t^3 + o(t^3)\right) \tau(0) \\ &+ \left(\frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \nu(0) \\ &+ \left(-\frac{\kappa(0)T(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \beta(0). \end{aligned}$$

On voit bien que si $T_A(0) \neq 0$ alors l'arc traverse strictement son plan osculateur en $f(0)$ (qui est $\text{Vect}(\tau(0), \nu(0))$).

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p .

Le DL à l'ordre 3 d'un paramétrage par longueur d'arc

$$\begin{aligned} f(t) = f(0) &+ \left(t - \frac{\kappa(0)^2}{6} t^3 + o(t^3)\right) \tau(0) \\ &+ \left(\frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \nu(0) \\ &+ \left(-\frac{\kappa(0)T(0)}{6} t^3 + o(t^3)\right) \beta(0). \end{aligned}$$

On voit bien que si $T_A(0) \neq 0$ alors l'arc traverse strictement son plan osculateur en $f(0)$ (qui est $\text{Vect}(\tau(0), \nu(0))$).

Exercice 5

Déduire des formules de Frenet la preuve de l'affirmation ci-dessus.

On peut voir que le signe de la torsion est ce qui différencie les coquilles dextres, des coquilles senestres ou un pas de vis de son image dans un miroir (après s'être mis d'accord sur un sens de parcours, par exemple de la pointe vers la base).



FIGURE – coquille senestre et coquille dextre

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A .

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors

$K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où ϵ désigne le signe du déterminant de dF

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors

$K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où ϵ désigne le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A .

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors $K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où ϵ désigne le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A . Le paramétrage $(I, F \circ f)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $F(A)$.

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors $K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où ϵ désigne le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A . Le paramétrage $(I, F \circ f)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $F(A)$. Comme F est une isométrie, on a :

$$(dF(\tau_A(t)), dF(\nu_A(t)), dF(\beta_A(t))) = (T_{F(A)}(t), \nu_{F(A)}(t), \epsilon \beta_{F(A)}(t)).$$

Proposition 27

Soient $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors

$K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où ϵ désigne le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A . Le paramétrage $(I, F \circ f)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $F(A)$. Comme F est une isométrie, on a :

$$(dF(\tau_A(t)), dF(\nu_A(t)), dF(\beta_A(t))) = (\tau_{F(A)}(t), \nu_{F(A)}(t), \beta_{F(A)}(t)).$$

On en déduit que $K_A(t) = K_{F(A)}(t)$ et que $T_A(t) = \epsilon T_{F(A)}(t)$. \square

Un arc birégulier est complètement décrit par sa courbure et sa torsion :

Un arc birégulier est complètement décrit par sa courbure et sa torsion :

Théorème 28

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0, $c : I \rightarrow \mathbf{R}_+^$ et $d : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications lisses. Soient $(p, v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Un arc birégulier est complètement décrit par sa courbure et sa torsion :

Théorème 28

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0, $c : I \rightarrow \mathbf{R}_+^$ et $d : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications lisses. Soient $(p, v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A de \mathbf{R}^3 ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que*

Un arc birégulier est complètement décrit par sa courbure et sa torsion :

Théorème 28

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0, $c : I \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ et $d : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications lisses. Soient $(p, v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A de \mathbf{R}^3 ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que

$$f(0) = p, f'(0) = v, \frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = w \text{ et } \forall t \in I, \begin{cases} K_A(f(t)) = c(t) \\ T_A(f(t)) = d(t) \end{cases} .$$

Un arc birégulier est complètement décrit par sa courbure et sa torsion :

Théorème 28

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0, $c : I \rightarrow \mathbf{R}_+^$ et $d : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications lisses. Soient $(p, v, w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A de \mathbf{R}^3 ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que*

$$f(0) = p, f'(0) = v, \frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = w \text{ et } \forall t \in I, \begin{cases} K_A(f(t)) = c(t) \\ T_A(f(t)) = d(t) \end{cases} .$$

En particulier, les seuls arcs biréguliers de \mathbf{R}^3 ayant une courbure et une torsion constantes sont les hélices circulaires.

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.
 Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et donc (X, Y, Z) est une base
 orthonormée

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.
 Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et donc (X, Y, Z) est une base orthonormée directe.

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.
 Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et donc (X, Y, Z) est une base
 orthonormée directe.

Soit A l'arc paramétré par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ défini par $f(t) = u + \int_0^t X(s)ds$. Il
 s'agit d'un paramétrage l.a. car $\|f'(t)\| = \|X(t)\| = 1$.

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.
Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et donc (X, Y, Z) est une base
orthonormée directe.

Soit A l'arc paramétré par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ défini par $f(t) = u + \int_0^t X(s)ds$. Il
s'agit d'un paramétrage l.a. car $\|f'(t)\| = \|X(t)\| = 1$.

De plus $\tau'(t) = X'(t) = cY(t)$, donc $K_A(f(t)) = c(t)$ et $\nu(t) = Y(t)$.

Preuve du théorème 28 :

Le problème de Cauchy (linéaire)

$$\begin{cases} (X', Y', Z') = (cY, -cX - dY, dY), \\ (X(0), Y(0), Z(0)) = (v, w, v \wedge w) \end{cases}$$

a une unique solution sur I que l'on note (X, Y, Z) .

Soit $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^6$, définie par

$$\Psi(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle).$$

Cette fonction vérifie $\Psi'_1 = 2c\Psi_4$, $\Psi'_2 = -2c\Psi_4 - 2d\Psi_6$, $\Psi'_3 = 2d\Psi_6$,
 $\Psi'_4 = c\Psi_2 - c\Psi_1 - d\Psi_5$, $\Psi'_5 = c\Psi_5 + d\Psi_4$, $\Psi'_6 = -c\Psi_5 - d\Psi_3 + d\Psi_2$.
Par conséquent $\Psi(t) \equiv (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ et donc (X, Y, Z) est une base
orthonormée directe.

Soit A l'arc paramétré par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ défini par $f(t) = u + \int_0^t X(s)ds$. Il
s'agit d'un paramétrage l.a. car $\|f'(t)\| = \|X(t)\| = 1$.

De plus $\tau'(t) = X'(t) = cY(t)$, donc $K_A(f(t)) = c(t)$ et $\nu(t) = Y(t)$.

D'où $\beta(t) = Z(t)$ et $T_A(f(t)) = d(t)$. \square